EMW Übungsblatt 07

Abgabe bis zum 20.12.2021 um 12:00 via ILIAS

Strahlenoptik und optische Systeme

Die geometrische Optik oder auch Strahlenoptik beschreibt die Ausbreitung von Licht durch Lichtstrahlen. Diese Näherung einer elektromagnetischen Welle als infinitesimal dünne Linie gilt allerdings nur näherungsweise für Wellenlängen $\lambda \to 0$ oder sehr kurze Distanzen, für welche die beugungsbedingte Strahlaufweitung vernachlässigbar ist. Diese vereinfachte Darstellung erlaubt es, technische optische Systeme wie Linsen, Prismen etc. mathematisch einfach zu beschreiben. Ein Lichtstrahl an der Stelle z kann demnach einzig durch seinen Abstand $r(z)$ und seine Steigung gegenüber der optischen Achse $\tan(\alpha)$ (bzw. dem Winkel $\alpha(z)$) beschrieben werden als

$$\mathbf{r}(z) = \begin{pmatrix} r(z) \\ \tan\alpha(z) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} r(z) \\ \alpha(z) \end{pmatrix} .$$

Nehmen wir die Gültigkeit der paraxialen Näherung an, ist die Steigung des Lichtstrahls klein und der Tangens lässt sich gemäß $\tan\alpha \approx \alpha$ annähern. Mit dieser Definition des Strahls können wir ein optisches System mit einer Matrix $\mathbf{M}$ beschreiben, welches einen eintreffenden Strahl $\mathbf{r}$ in einen austretenden Strahl $\mathbf{r}'$ transformiert (siehe Abbildung 1)

$$\mathbf{r}'(z_2) = \mathbf{M}\mathbf{r}(z_1) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(z_1) \\ \alpha(z_1) \end{pmatrix} .$$

Bedingt durch ihre Form werden solche Matrizen üblicherweise auch als ABCD-Matrizen bezeichnet. Eine Kombination von N optischen Systemen lässt sich dann durch eine Linksmultiplikation der

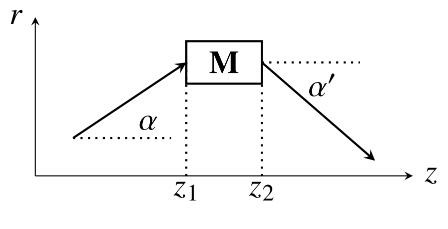

Abbildung 1

einzelnen Matrizen $\mathbf{M}_{\text{total}} = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_N \ \ldots \ \mathbf{M}_1$ berechnen. Untenstehend sind die Transfermatrizen einiger grundlegender optischer Systeme gezeigt: Die Transfermatrix eines Strahls, welcher ungehindert ein Medium der Länge L und Brechungsindex n passiert, einer dünnen Linse mit Brennweite f, eines sphärischen Spiegels mit Wölbung ζ und einer sphärischen Grenzfläche mit den Brechungsindizes n_1 (einfallend) und n_2 (transmittiert) mit der Wölbung ζ.

Translation:	$\begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Dünne Linse:	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$
Sphärischer Spiegel:	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/\zeta & 0 \end{pmatrix}$	Sphärische Grenzfläche:	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/\zeta & 1 \end{pmatrix}$

Die Verwendung der Matrizenoptik ist nicht nur auf die Strahlenoptik beschränkt, sondern lässt sich auch auf den Gaußschen Strahl aus der Vorlesung anwenden. Hierfür wendet man die Matrizen nun nicht mehr auf einen Strahlenvektor, sondern auf den Strahlparameter $\underline{q}$ gemäß

$$\underline{q}_2 = \frac{A\underline{q}_1 + B}{C\underline{q}_1 + D}$$

an. Setzt man hier die ABCD-Matrix für eine dünne Linse ein, so erhält man den Ausdruck

$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{1}{\underline{q}_1} - \frac{1}{f}\,.$$

Aufgabe 12:

Das elektrische Feld eines sich in $+z$-Richtung ausbreitenden Gaußschen Strahls sei in Zylinderkoordinaten gegeben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\rho, z, t) = \underline{E}_0\, \underline{\psi}(\rho, z) \exp(\mathrm{j}(\omega t - kz))\mathbf{e}_x\,.$$

Hierbei beschreibt $\underline{E}_0$ die Feldamplitude, $\underline{\psi}(\rho, z)$ die transversale Feldverteilung des Strahls und der Exponentialterm die räumliche Ausbreitung in z-Richtung und die zeitliche Entwicklung mit t. Da wir den Strahl als rotationssymmetrisch annehmen, ist die transversale Feldverteilung nicht von ϕ abhängig. $\underline{\psi}(\rho, z)$ ist mit der Gouy-Phasenverschiebung $\varphi_\mathrm{G}(z) = \arctan(z/z_R)$ gegeben durch

$$\underline{\psi}(\rho, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{k\rho^2}{2R(z)}\right) \exp\left(\mathrm{j}\,\varphi_\mathrm{G}(z)\right).$$

a) Die Lichtintensität des Strahls ist proportional zum Betragsquadrat des elektrischen Feldes, d.h. $I(\rho, z) \propto |\underline{\mathbf{E}}(\rho, z)|^2$. Berechnen Sie die Lichtintensität $I(\rho, z)$. Nehmen Sie hierfür eine Proportionalitätskonstante I_0 an.

   Hinweis: Überlegen Sie sich, wie das Betragsquadrat einer Phasenverschiebung, also $\exp(\mathrm{j}\,\varphi)$, aussieht.

b) Zeigen Sie nun, dass die Lichtleistung P in einer Ebene $z = \mathrm{const}$ mit $w(z) = w_0\sqrt{1 + z^2/z_R^2}$ durch

$$P = \frac{\pi w_0^2}{2} I_0$$

   gegeben ist. Erklären Sie wieso die Leistung nicht von z abhängt. Wäre dieser Zusammenhang auch für große z in einem realistischen Experiment zu beobachten?

   Hinweis: Die Intensität des Lichtes aus Aufgabenteil a) bezeichnet eine Flächenleistungsdichte (vgl. Vorlesung zum Poynting-Vektor).

c) Eine dünne Linse mit einer Brennweite f transformiert einen Gaußschen Strahl mit komplexem Strahlradius $\underline{q}_1$ in einen Gaußschen Strahl mit komplexen Strahlradius $\underline{q}_2$ entsprechend

$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{1}{\underline{q}_1} - \frac{1}{f}\,.$$

   Zeigen Sie, dass eine solche Transformation lediglich den Krümmungsradius der Phasenfront, nicht aber den Strahlradius direkt nach der Linse ändert. Um dies zu zeigen sollen folgende Beziehungen für den Strahl nach der Linse hergeleitet werden:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \qquad\qquad w_2 = w_1\,.$$

d) Ein Gaußscher Strahl mit Strahlradius w_0 trifft nun auf eine Linse mit der Brennweite f (siehe Abbildung 2). Der austretende Strahl, hier durch ein $'$ gekennzeichnet, wird in einer Distanz d auf einen Strahlradius w_0' fokussiert. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten

$$d = \frac{f}{1 + \frac{4f^2}{k^2 w_0^4}}$$
$$w_0' = \frac{w_0}{\sqrt{1 + \frac{k^2 w_0^4}{4f^2}}}$$

Verwenden Sie dafür die gezeigten Beziehungen aus der vorherigen Teilaufgabe.

Hinweis: Beginnen Sie damit jeweils einen Ausdruck von z_R' durch Betrachtung des Strahlradius $w'(-d)$ und durch Betrachtung des Krümmungsradius $R'(-d)$ aufzustellen. Beachten Sie dabei, dass bei der Linse an der Stelle $z = -d$ $R \to \infty$ gilt. Leiten Sie hieraus nun eine Gleichung für die Distanz d her. Schließlich muss nur noch w_0' als letzte Unbekannte eliminiert werden.

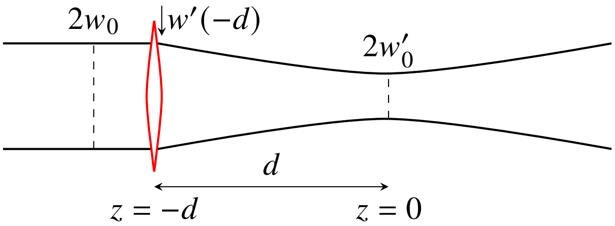

Abbildung 2

Aufgabe 13:

Teleskope aus sphärischen Linsen werden oftmals verwendet, um den Strahlradius von Lichtstrahlen zu vergrößern bzw. zu verkleinern. Der Aufbau eines Keplerschen Teleskops ist in Abbildung 3 gezeigt.

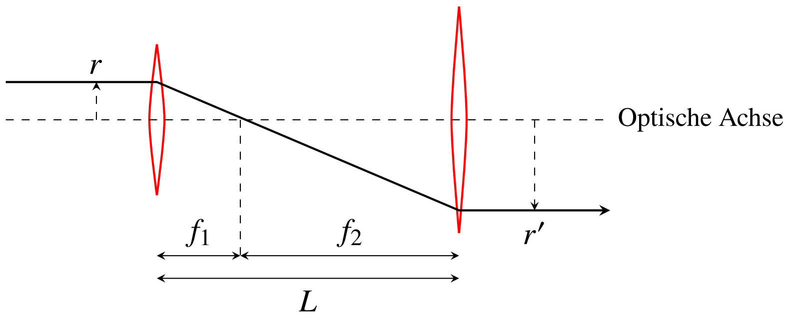

Abbildung 3

a) Betrachten Sie ein Teleskop bestehend aus zwei dünnen Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 im Abstand L zueinander. Stellen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die gesamte Transfermatrix $\mathbf{M}_{\text{total}}$ auf.

b) Berechnen Sie nun die Transfermatrix für den Fall $f = f_1 = f_2$ und $L = 2f$. Was stellen Sie fest? Welches Bild würde ein Beobachter hinter der zweiten Linse sehen? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Betrachten Sie nun den Fall $f_1 \neq f_2$ und $L = f_1 + f_2$. Wie wird ein einfallender Strahl $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ durch dieses optische System transformiert? Geben Sie den austretenden Strahl $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r' \\ \alpha' \end{pmatrix}$ an.

d) Welchen Vergrößerungsfaktor erhalten Sie mit dem optischen System aus Aufgabenteil c), wenn $f_2 = 2f_1$ gilt?

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu