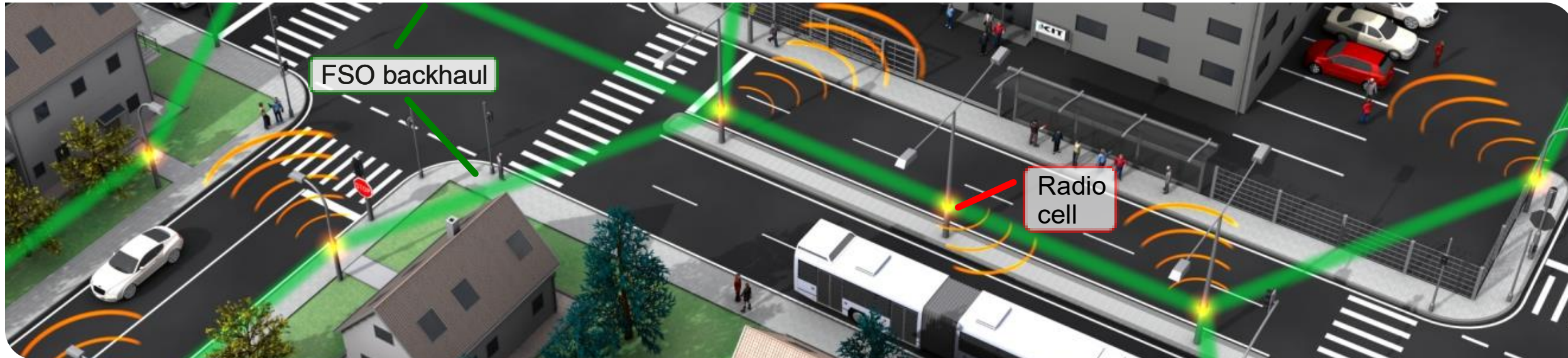


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 8

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Administratives

- Nutzt gerne weiterhin die Umfragen zu den Vorlesungen!
- Die Korrektur des Übungsblatt 7 ist abgeschlossen.
- Die Klausur findet am 10. März 2022 von 16 – 18 Uhr statt, ...
- ... die Hörsaalverteilung etc. wird noch bekannt gegeben.

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo ⁴⁴	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So Vorlesung 15	2 Mi
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo	3 Do
4 Mo ⁴⁰	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5 ⁴⁹	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 12 ⁶
8 Fr	8 Mo Übung 1 ⁴⁵	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So Übung 8	9 Mi Fragestunde
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo	10 Do
11 Mo ⁴¹	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo Übung 6 ⁵⁰	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo ⁷
15 Fr	15 Mo Übung 2 ⁴⁶	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo Übung 9 ³	17 Do
18 Mo Vorlesung 1 ⁴²	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7 ⁵¹	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo ⁸
22 Fr	22 Mo Übung 3 ⁴⁷	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 10 ⁴	24 Do
25 Mo Übung 0 ⁴³	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 Sa	27 Mo ⁵²	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo ⁹
29 Fr	29 Mo Übung 4 ⁴⁸	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 11 ⁵	

Themenübersicht (I)

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichungen, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit
Übung 3	A6, A7	Polarisation, Hertzscher Dipol
Übung 4	A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Grenzflächenübergänge
Übung 6	A10, A11	Kirchhoffsches Beugungsintegral, Fresnel Näherung
Übung 7	A12, A13	Gaußscher Strahl, Strahlenoptik

Themenübersicht (II)

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 8	A14, A15	Reflexion am idealen Leiter, Parallelplattenleitung

Verhalten von EM-Wellen am idealen Leiter

- Das Innere eines idealen Leiters ist stets feldfrei.
- Aus den Grenzflächenbedingungen für die tangentialen und normalen EM-Feldkomponenten erhalten wir die folgenden Randbedingungen der Felder am idealen Leiter:

	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Tangential	$E_t = 0$	$H_t = i'$
Normal	$D_n = \sigma$	$B_n = 0$

- Hier bezeichnet i' den Oberflächenstrom und σ die Oberflächenladung.

Ströme am idealen Leiter (I)

- Durchflutungsgesetz:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Oberflächenstromdichte
Verschiebungsstromdichte

- Die Tangentialkomponente des elektrischen Felds muss auf der Leiteroberfläche stets verschwinden.
- Infolgedessen darf (für lineare & isotrope Medien) auch der Verschiebungsstrom an der Leiteroberfläche keine Tangentialkomponenten aufweisen.
- Das magnetische Feld verläuft entsprechend parallel zur Leiteroberfläche, weshalb i.A. gemäß des Durchflutungsgesetzes ein Oberflächenstrom an der Leiteroberfläche auftreten muss.

Ströme am idealen Leiter (II)

Oberflächenstromdichte J_s

Verschiebungsstromdichte $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$

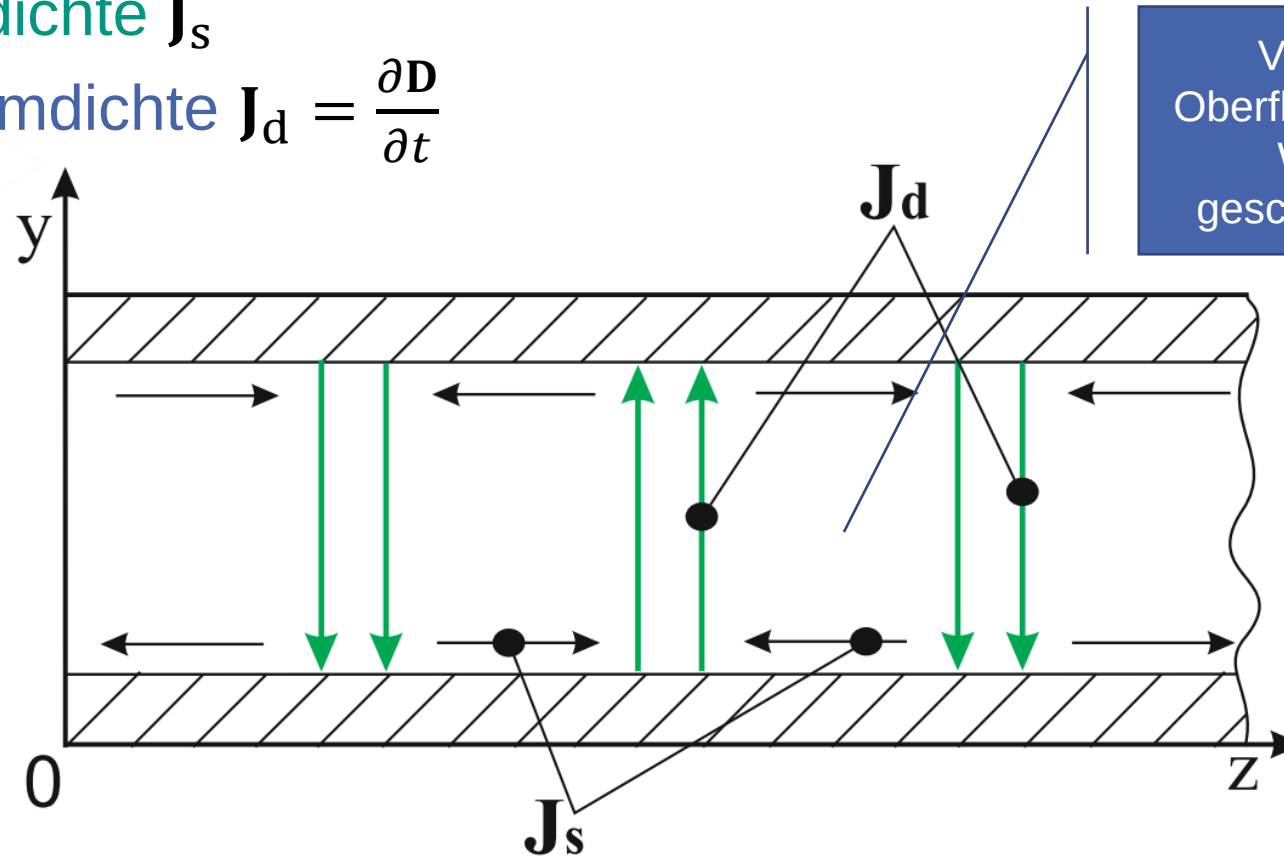


Abbildung aus Nickelson (2019): Electromagnetic Theory and Plasmonics for Engineers, S. 475

Reflexion am idealen Leiter (I)

- Beispiel: Reflexion einer parallel polarisierten Welle (Einfallsebene ist yz -Ebene) an einem idealen Leiter ($\kappa \rightarrow \infty$)
- Was fällt euch an der Abbildung auf?

Antwort: Die Randbedingungen sind nicht erfüllt!

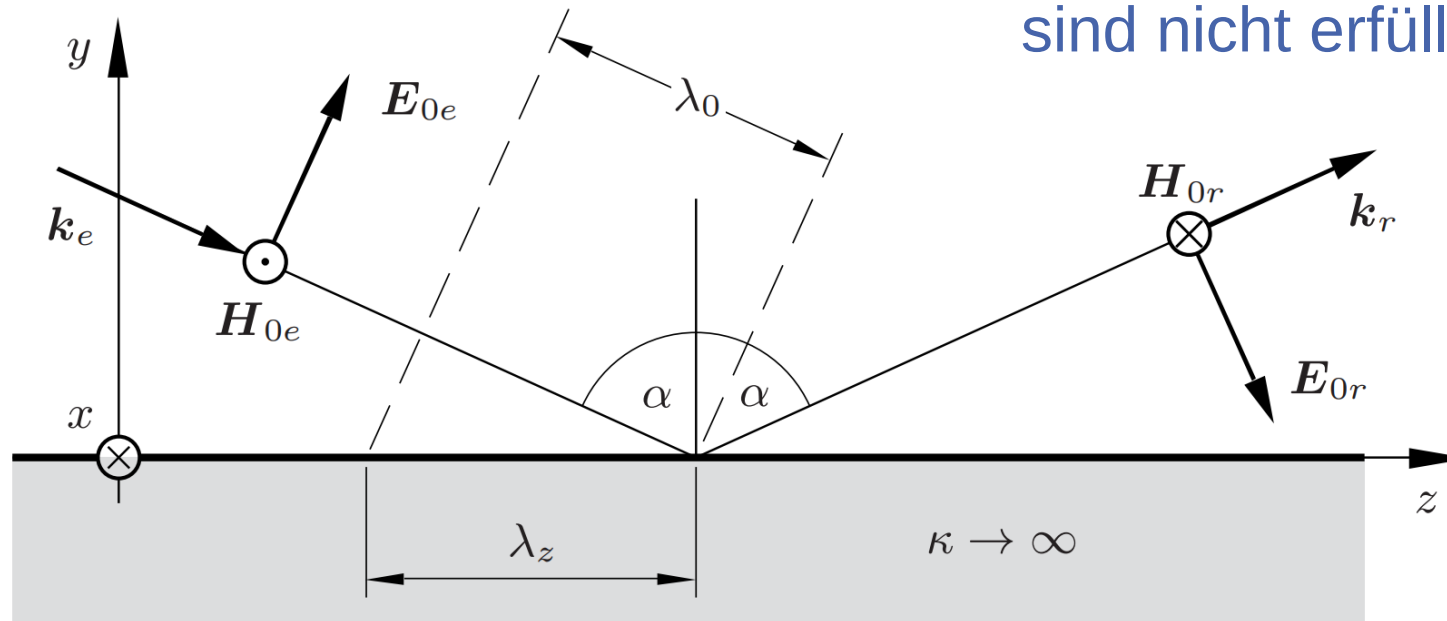


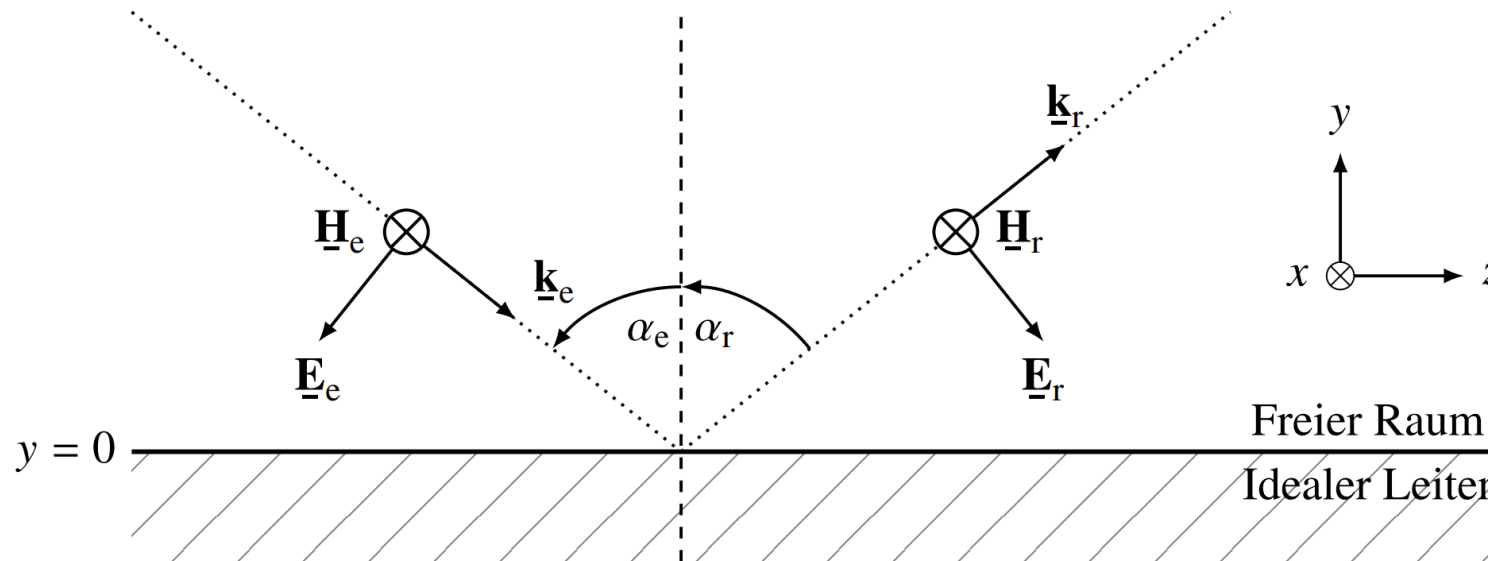
Abbildung aus Henke 2020, S. 325

Reflexion am idealen Leiter (II)

Wir untersuchen nun eine parallel polarisierte ebene Welle im freien Raum ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) mit

$$\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{H}_e \exp(j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{r})) \mathbf{e}_x,$$

die unter einem Winkel α_e auf einen idealen Leiter in der Ebene $y = 0$ trifft (an dem sie vollständig reflektiert wird) und sich in z -Richtung ausbreitet. Für den Fall $\alpha_e \rightarrow \pi/2$ weist die Welle nur



Polarisation

- Bislang haben wir zwischen senkrechter und paralleler Polarisation unterschieden.
- Die beiden Polarisationen unterscheiden sich darin, ob das E- bzw. H-Feld Komponenten in Ausbreitungsrichtung (hier z) aufweist.
- Wir bezeichnen daher die ...
 - ... parallel polarisierte Welle als transversal-magnetische Welle (TM-Welle), bei der nur das elektrische Feld Komponenten in Ausbreitungsrichtung besitzt; es gilt $E_z \neq 0$ und $H_z = 0$.
 - ... senkrecht polarisierte Welle als transversal-elektrische Welle (TE-Welle), bei der nur das magnetische Feld Komponenten in Ausbreitungsrichtung besitzt; es gilt $H_z \neq 0$ und $E_z = 0$.

Aufgabe 14

- a) Welche Aussagen können Sie über die tangentialen und normalen E- bzw. H-Feldkomponenten an der Grenzfläche zu dem idealen Leiter treffen?

Hinweis: Ziehen Sie die Stetigkeitsbedingungen am idealen Leiter aus der Vorlesung heran.

- b) Stellen Sie mithilfe von Abbildung 1 die Wellenvektoren $\underline{k}_e$ und $\underline{k}_r$ in Abhängigkeit des Einfalls- bzw. Ausfallswinkels α_e bzw. α_r dar. Nehmen Sie dabei an, dass $k_e = k_r = k_0$.
- c) Geben Sie die einfallenden bzw. reflektierten elektrischen und magnetischen Felder an. Verwenden Sie dabei das Durchflutungsgesetz um die elektrischen Felder zu erhalten.
- d) Zeigen Sie, dass sich durch Superposition der einfallenden und reflektierten Welle in y-Richtung stehende Wellen ausbilden.

Reflexion am idealen Leiter: Spezialfälle

- Im Allgemeinen: **stehende Welle** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (hier y), **fortlaufende Welle** in Ausbreitungsrichtung (hier z)
- Spezialfälle:
 - Einfall senkrecht zu leitender Platte
 $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{E}_y = 0$: reine stehende Welle in y -Richtung, keine Ausbreitung
 - Einfall parallel zu leitender Platte
 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{E}_z = 0$: TEM-Welle (transversalelektromagnetische) da elektrisches & magnetisches Feld keine Komponenten in Ausbreitungsrichtung aufweisen

Parallelplattenleitung

- In den Ebenen $y = \text{const}$, in denen die Tangentialkomponente des E-Felds verschwindet, können ideal leitende Platten (Abstand d) eingelegt werden ohne das EM-Feld zwischen den Platten zu beeinflussen.
- Resultat: **Parallelplattenleiter**
- Konsequenz: Der Plattenabstand ist mit der Ausbreitungskonstante in y -Richtung verknüpft

$$d = \frac{m\lambda_y}{2} = \frac{m\pi}{k_y}, m \in \mathbb{N}$$

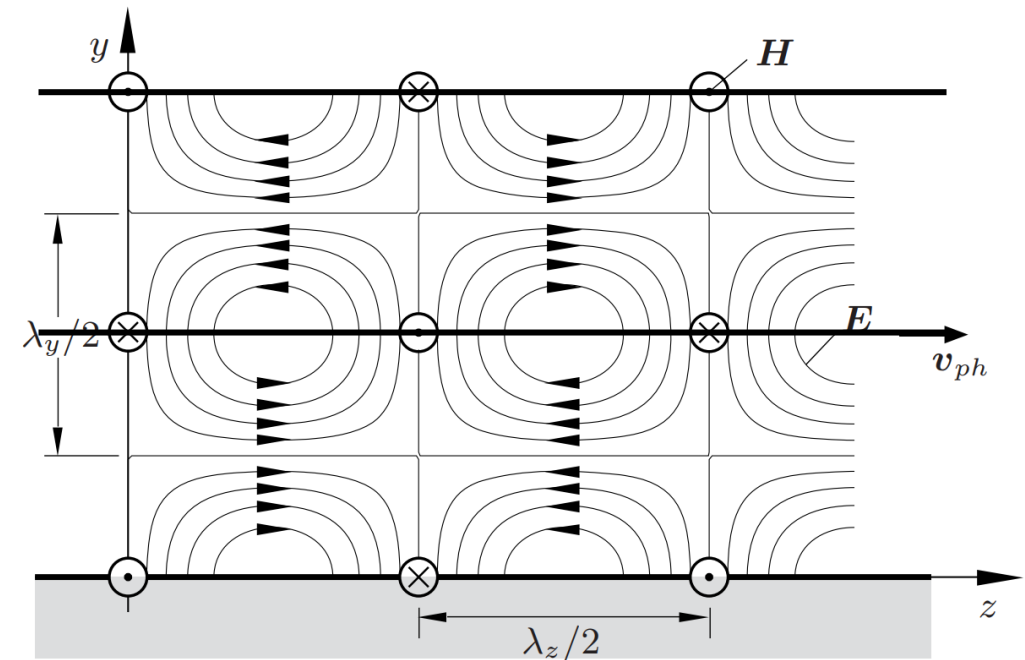


Abbildung aus Henke 2020

Aufgabe 15

Anstelle einer Herleitung der Feldverteilungen über das Verhalten einer elektromagnetischen Welle an einer ideal leitenden Platte (siehe Vorlesung), können wir die Felddarstellungen im Parallelplattenleiter auch direkt aus den Maxwellschen Gleichungen herleiten. Dazu müssen wir lediglich geeignete Randbedingungen wählen.

Wir wollen uns im Folgenden mit der TM-Welle

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}(x, y) \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

beschäftigen, für welche gemäß der Maxwellschen Gleichungen im Allgemein gilt, dass

$$\underline{E}_x = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

$$\underline{H}_x = \frac{j \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{E}_y = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{H}_y = \frac{-j \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

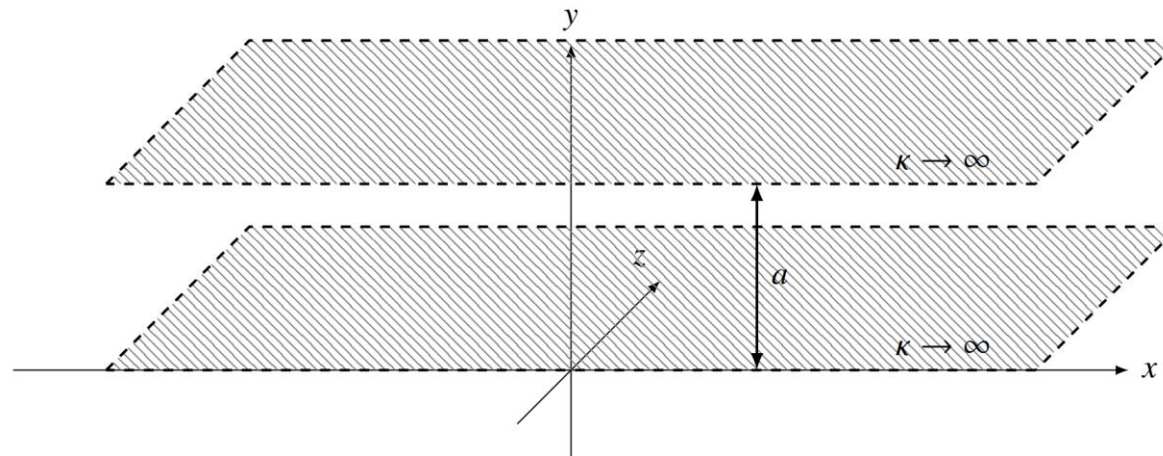
Gute Übung:
Eigenständig
herleiten

und

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) \underline{E}_z = 0.$$

Aufgabe 15 – Teil a) & b)

Ein Wellenleiter bestehe nun aus zwei in x - und z -Richtung unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Platten im Abstand a , wie in Abbildung 2 dargestellt. Der Raum zwischen den Platten sei vakuumiert.



- a) Verwenden Sie die Definition der TM-Welle und die Maxwell'schen Gleichungen, um das E- und H-Feld einer TM-Welle zu berechnen, welche sich zwischen den Platten ausbreitet. Lösen Sie dazu zunächst die Wellengleichung für $\underline{E}_z$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Platten in x -Richtung unendlich ausgedehnt sind, weshalb $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = 0$. Verwenden Sie zudem die Randbedingung $\underline{E}_z(y = 0) = \underline{E}_z(y = a) = 0$.

- b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für die magnetischen Feldkomponenten mit denen aus Aufgabe 14 Teil d).

Aufgabe 15 – Teil c)

- c) Skizzieren Sie die E_z -Komponenten ($E_z = \Re\{\underline{E}_z\}$) der ersten zwei Moden des Parallelplattenleiters.



Aufgabe 15 – Teil d) & e)

- d) Berechnen Sie die Phasenkonstante in Ausbreitungsrichtung k_z . Ab welcher Frequenz kann sich eine Welle im Wellenleiter ausbreiten?
- e) Zeigen Sie rechnerisch, dass eine Welle, welche die Grenzfrequenz unterschreitet, im Wellenleiter nicht ausbreitungsfähig ist.

Wellenausbreitung im Parallelplattenleiter

- Bei gegebenem Plattenabstand d sind gemäß unserer Überlegungen nur diskrete Ausbreitungskonstanten zulässig:

$$k_y = \frac{m\pi}{d} \Rightarrow k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}$$

- Gilt $k_y > k_0$, wird k_z imaginär und die Welle in z -Richtung exponentiell gedämpft
- Entsprechend können wir eine Grenzfrequenz $\omega_c = 2\pi c_0/\lambda_c$ definieren, sodass mit $k_0 = \omega/c_0$ gilt

$$k_z = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

- Somit ist nur für Frequenzen $\omega > \omega_c$ ungedämpfte Wellenausbreitung möglich

Aufgabe 15 – Teil f)

- f) Bestimmen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Welle. Erklären Sie außerdem, weshalb die Phasengeschwindigkeit größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 sein kann.

Phasen- & Gruppengeschwindigkeit (I)

- Für die Phasengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter gilt

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} > c_0$$

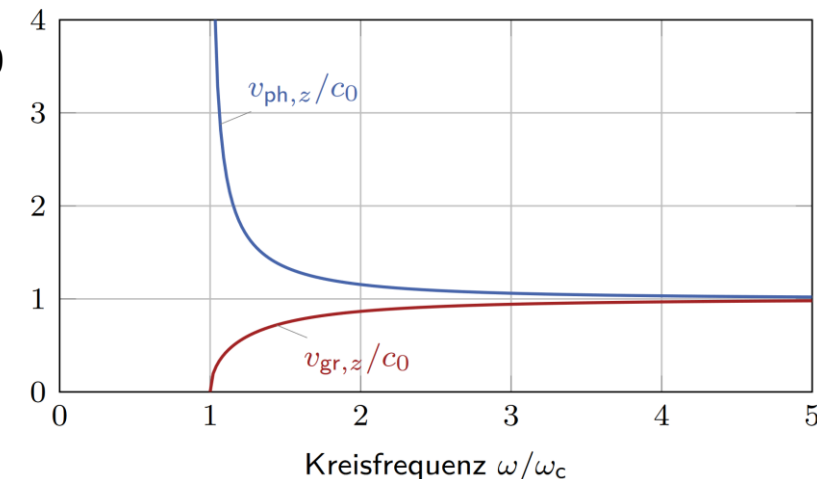
Widerspruch zur
Relativitätstheorie?

- Für die Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter gilt

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk_z} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c_0$$

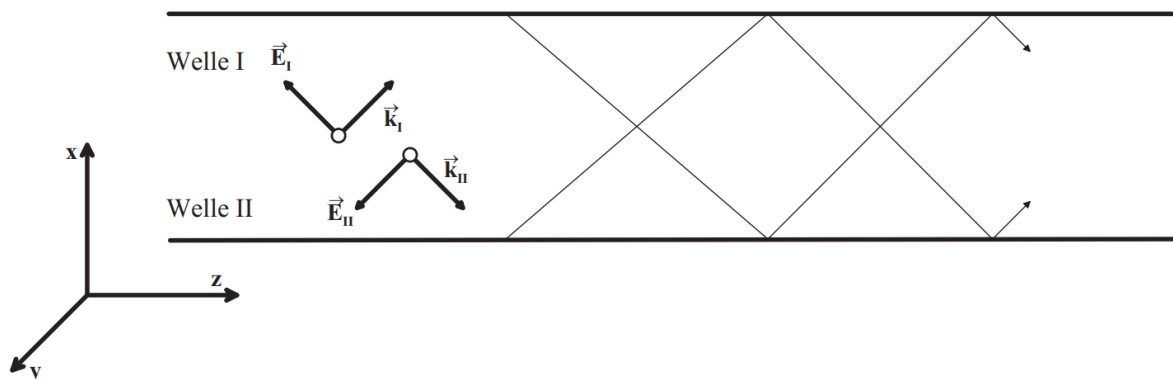
- Folglich gilt hier

$$c_0^2 = v_{\text{ph}} v_{\text{gr}}$$



Phasen- & Gruppengeschwindigkeit (II)

- Steht $v_{ph} > c_0$ tatsächlich im Widerspruch zur Relativitätstheorie? Nein!
- Vereinfachtes Modell der Wellenausbreitung im Parallelplattenleiter:
 - EM-Welle bewegt sich auf Zickzackkurs.
 - Feldverteilung entsteht durch Überlagerung (Interferenz) der hin- und herreflektierten Wellenanteile.
 - Phasengeschwindigkeit beschreibt Ausbreitungsgeschwindigkeit dieses Interferenzmusters jedoch nicht die Signal-/Energiegeschwindigkeit, welche sich auf den Zickzackkurs bezieht.



Animation zur Veranschaulichung:
<https://www.pa3fwm.nl/tools/waveguide.html>