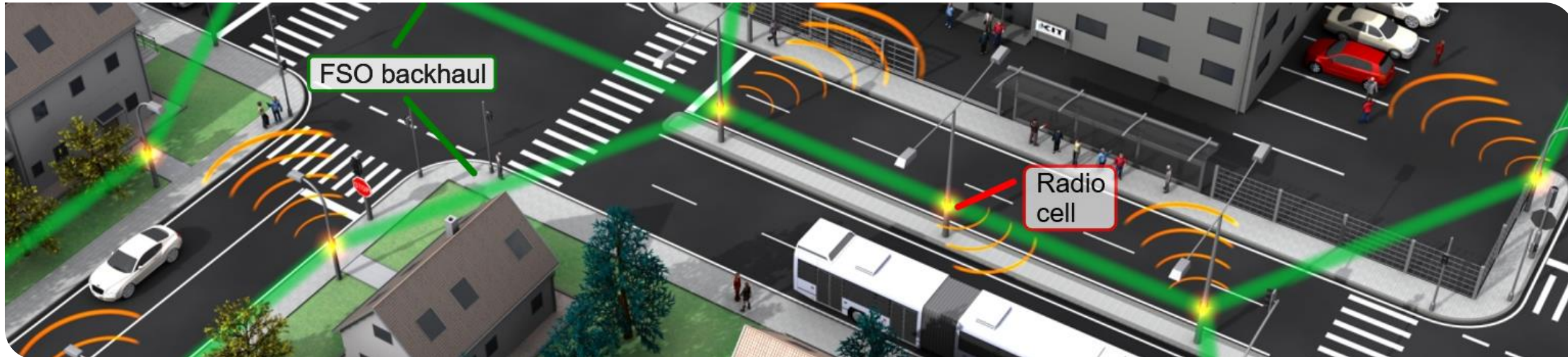


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 9

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Administratives

- Nutzt Umfragen zu den Vorlesungen.
- **Das heutige Übungsblatt wird eingesammelt!**
- Die Klausur findet am 10. März 2022 von 16 – 18 Uhr statt, ...
- ... die Hörsaalverteilung etc. wird noch bekannt gegeben.

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo ⁴⁴	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So Vorlesung 15	2 Mi
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo	3 Do
4 Mo ⁴⁰	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5 ⁴⁹	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 12 ⁶
8 Fr	8 Mo Übung 1 ⁴⁵	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So	9 Mi Fragestunde
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo Übung 8 ²	10 Do
11 Mo ⁴¹	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo Übung 6 ⁵⁰	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo ⁷
15 Fr	15 Mo Übung 2 ⁴⁶	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So Übung 9 ³	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo	17 Do
18 Mo Vorlesung 1 ⁴²	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7 ⁵¹	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo ⁸
22 Fr	22 Mo Übung 3 ⁴⁷	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 10 ⁴	24 Do
25 Mo Übung 0 ⁴³	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 Sa	27 Mo ⁵²	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo ⁹
29 Fr	29 Mo Übung 4 ⁴⁸	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 11 ⁵	

Themenübersicht (I)

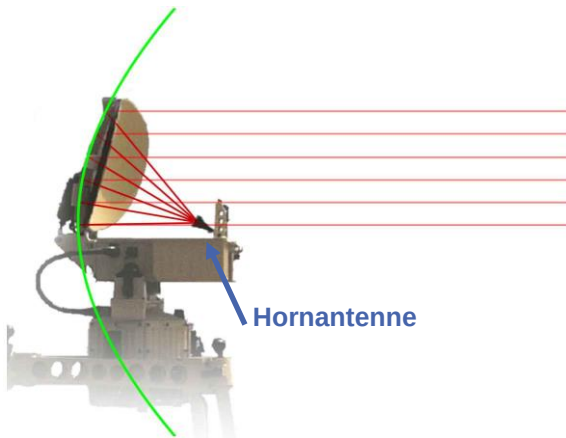
Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichungen, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit
Übung 3	A6, A7	Polarisation, Hertzscher Dipol
Übung 4	A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Grenzflächenübergänge
Übung 6	A10, A11	Kirchhoffsches Beugungsintegral, Fresnel Näherung
Übung 7	A12, A13	Gaußscher Strahl, Strahlenoptik

Themenübersicht (II)

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 8	A14, A15	Reflexion am idealen Leiter, Parallelplattenleitung
Übung 9	A16	Rechteckhohlleiter

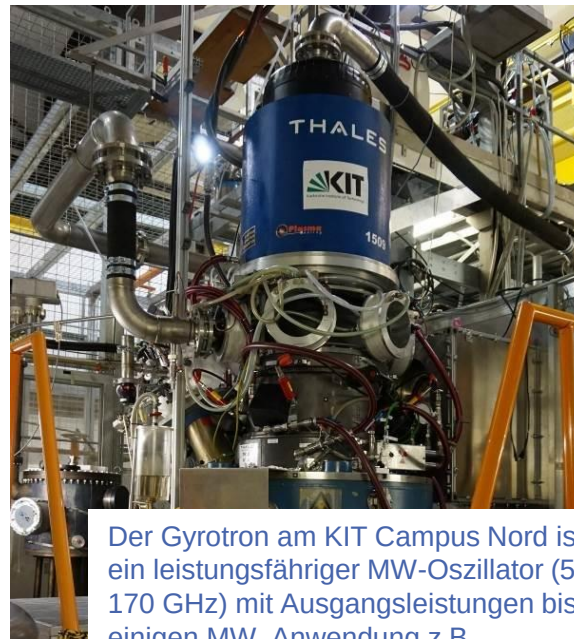
Hohlleiter in der Anwendung

- Geführte Übertragung von Wellen im Mikrowellen-Frequenzbereich (300 MHz - 300 GHz) & bei sehr hohen Leistungen.
- Anwendungsfelder: Antennenspeisung von z.B. Funkanlagen, Satelliten, Teleskopen, Radargeräte und zur hochfrequenter Signal- & Energieübertragung in z.B. Gyrotrons, Teilchenbeschleuniger, etc.



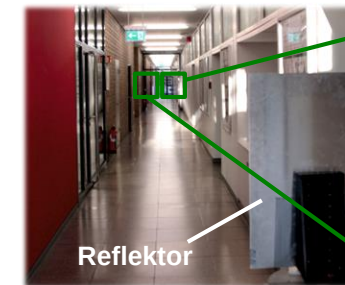
Hornantenne

Signal von/zu der Hornantenne, wird über einen Hohlleiter gespeist.



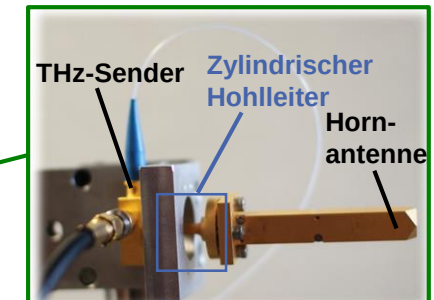
Der Gyrotron am KIT Campus Nord ist ein leistungsfähiger MW-Oszillator (5-170 GHz) mit Ausgangsleistungen bis einigen MW. Anwendung z.B. Teilchenbeschleuniger & Kernfusion.

Z. Ioannidis et al., "Report of recent experiments with the European 1MW, 170 GHz CW and SP prototype gyrotrons for ITER", EPJ Web Conf., 2019.



Reflektor

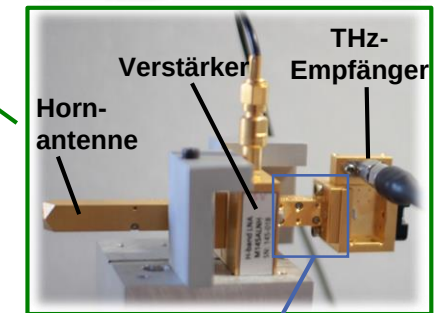
115 Gbit/s Funkübertragung über mehr als 110 Meter bei einer Trägerfrequenz der EM-Welle von 300 GHz.



THz-Sender

Zylindrischer Hohlleiter

Hornantenne



Verstärker

THz-Empfänger

Hornantenne

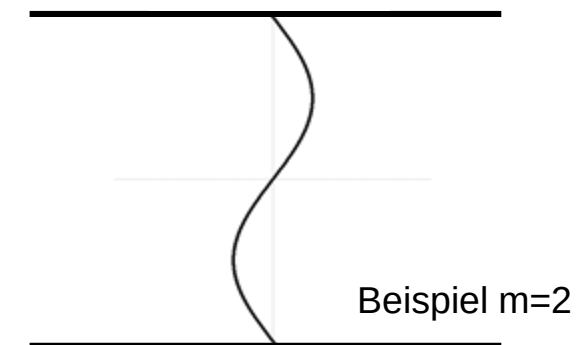
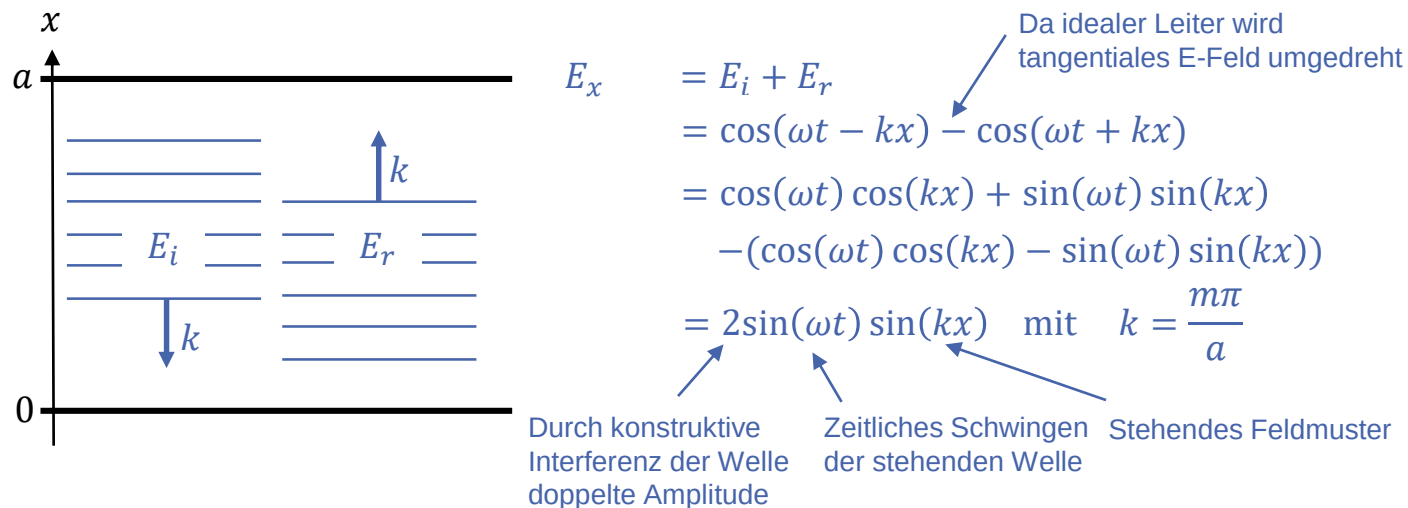
Rechteckhohlleiter

<https://www.radartutorial.eu/06.antennas/Offset-Antenna.en.html>

https://www.kit.edu/kat/pi_2020_076_terahertz-empfangen-fur-6g-mobilfunknetze.php

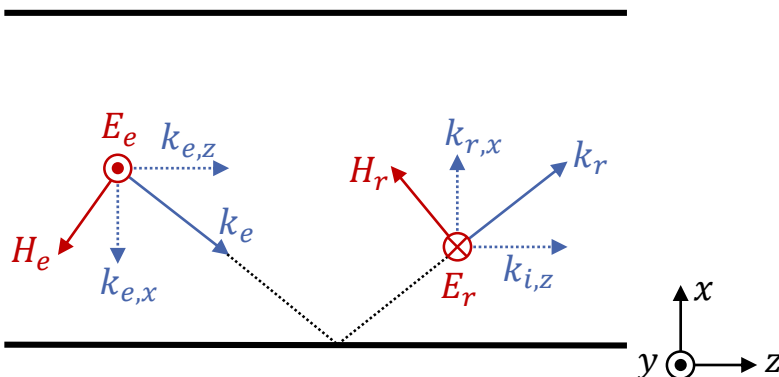
Moden in Hohlleitern

- Immer wenn eine Welle (egal ob EM-Welle, akustische Welle, mechanische Welle) im Raum begrenzt ist, bilden sich durch Interferenz der einfallenden und reflektierten Welle für bestimmte Frequenzen stehende Wellen aus.
- Beispiel Gitarren-Saite: Beim Anschlagen der Saite entsteht eine stehende Wellen, welche einen Ton erzeugen.
- Selbiges passiert bei einem Wellenleiter, welcher in der transversalen Richtung räumlich begrenzt ist.
- Je nach Hohlleiterdimensionierung passen bei entsprechender Frequenz mehrere Wellenbäuche in den Hohlleiter.
- Bei einem idealen Leiter muss das elektrische Feld an den Hohlleiterwänden verschwinden → Knotenpunkte der stehenden Welle.



E- und H-Wellen in Hohlleitern (I)

- Betrachten wir einen schrägen Einfall der einfallenden & reflektierten Welle erhalten wir ebenso stehende Wellen in transversaler Richtung. Durch Interferenz der beiden Wellen entsteht eine resultierende Welle mit transversalem festen Feldbild, welches sich in z-Richtung ausbreitet.
- Die einfallende/reflektierte Wellen sind immer noch ebene Wellen im Vakuum (Rechtshandsystem) und haben daher keine Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung (Richtung des Wellenvektors)!
- Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die z-Achse in Ausbreitungsrichtung der Welle, also in Ausrichtung des Wellenleiters zeigt.
- Betrachten wir die E- bzw. H-Feldkomponenten, stellen wir fest, dass durch den schrägen Einfall der Wellen eine Feldkomponente in z-Richtung vorhanden sein kann. Wir nennen diese Wellen E- und H-Welle.
- Die folgende 2D-Betrachtung gilt für die y- ebenso wie für die x-Richtung.



$$\begin{aligned}
 \underline{E}_y &= \underline{E}_e + \underline{E}_r \\
 &= \underline{E}_0 e^{j(\omega t + k_x x - k_z z)} - \underline{E}_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \\
 &= \underline{E}_0 e^{j(\omega t - k_z z)} 2j \sin(k_x x)
 \end{aligned}$$

Welle, welche in +z-Richtung propagiert. Also entlang dem Wellenleiter.

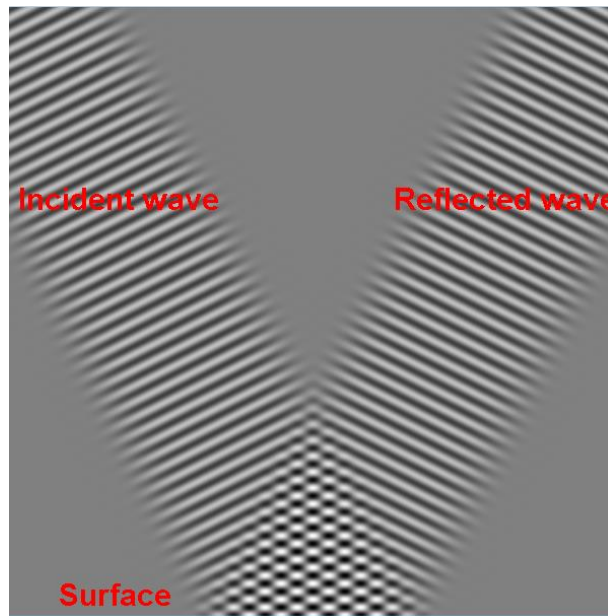
Stehende Welle in transversaler Richtung. Feldbild, welches unabhängig von z ist.

Das H-Feld lässt sich in eine z- und x-Komponente aufteilen.
 → Es handelt sich hier um eine H-Welle

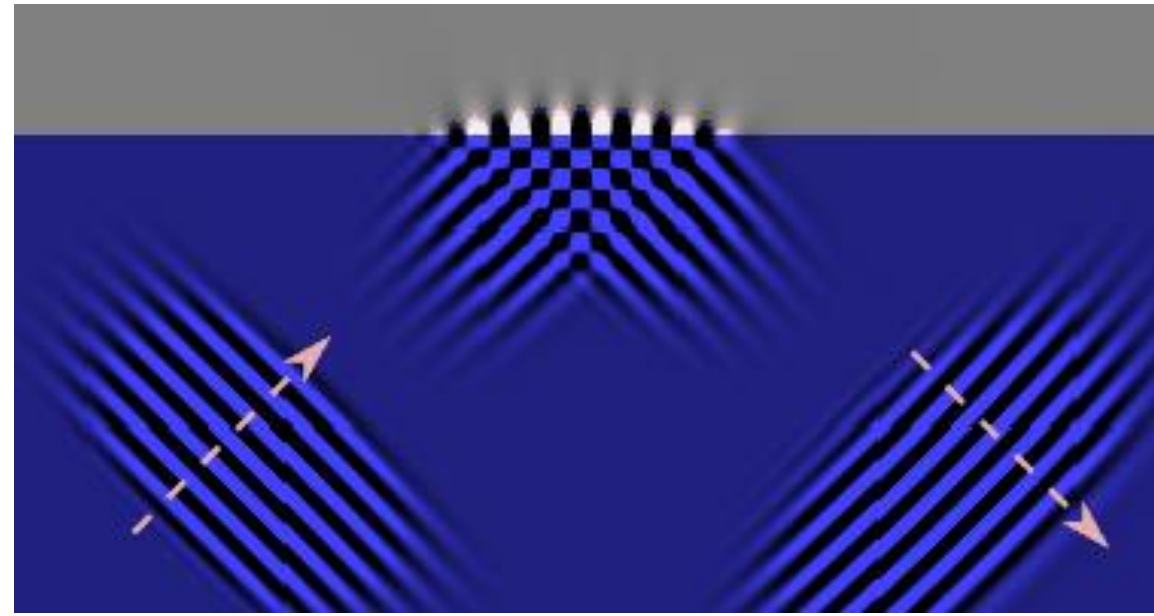
Für eine E-Welle gilt dieselbe Überlegung

E- und H-Wellen in Hohlleitern (II)

- Veranschaulichung der Interferenz einer schräg einfallenden Welle und der schräg reflektierten Welle
- In diesem Beispiel betrachten wir ebene Wellen im Vakuum. Hier gezeigt als ein Wellen-“Streifen“ bzw. als ein Wellen-Puls (Animation). In der Realität sind die ebenen Wellen allerdings unendlich ausgebreitet und so „füllt“ das resultierende Interferenzmuster den gesamten Hohlleiter aus.
- Beachte, dass das Interferenzmuster senkrecht zur Grenzfläche steht. Das Muster ist fix in der vertikalen und wandert in entlang der Horizontalen.



<https://physics.stackexchange.com/questions/555278/do-reflected-and-incident-rays-interfere>



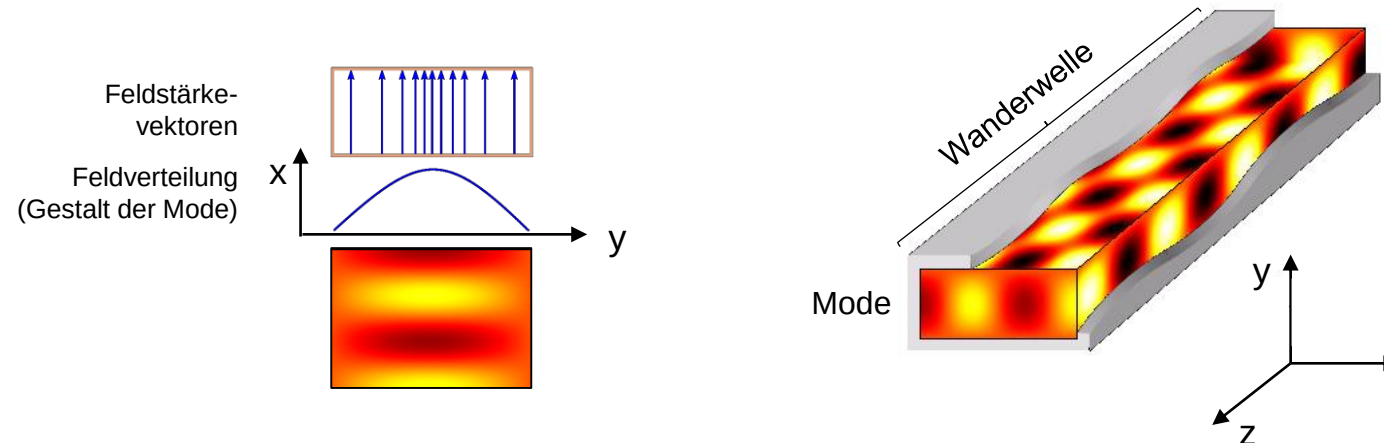
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Internal-reflection.gif>

Achtung: Die hier gezeigte Animation dient der Veranschaulichung des Interferenzmusters. Man erkennt im grauen Bereich ein evaneszentes Feld, welches wir im ideal leitenden Hohlleiter nicht haben! Es handelt sich hier daher um eine dielektrische Grenzfläche.

Wellenleiter-Moden

■ Gestalt einer Welle

- Transversale Ebene (Wellenleiterquerschnitt): Mode (festes Feldmuster); die Moden verändern ihre Gestalt während der Ausbreitung nicht, d.h. sie sind Eigenfunktionen des Wellenleiters
- Ausbreitungsrichtung: Wanderwelle

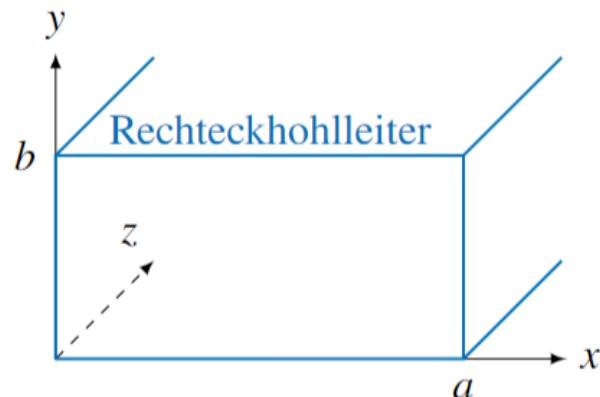


Visualisierung der Moden im Rechteckhohlleiter mit unserer Web-Anwendung
<http://34c98bbf-bf93-46a9-aad2-88a6c293e55a.ka.bw-cloud-instance.org/rechteckhohlleiter>

Aufgabe 16,a)

a) Geben Sie die Randbedingungen für das elektrische Feld $\underline{E}(x, y, z, t)$ auf den Leiterflächen an.

- Die Randbedingungen ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen für das elektrische und magnetische Feld an den ideal leitenden ($\kappa \rightarrow \infty$) Hohlleiterwänden.
- Tangentiales E-Feld = 0
- Normales H-Feld = 0
- Daraus folgt:



$$\begin{aligned}
 \underline{E}_x(x=0, y, z, t) &= 0, & \underline{E}_x(x=a, y, z, t) &= 0 \\
 \underline{E}_y(x, y=0, z, t) &= 0, & \underline{E}_y(x, y=b, z, t) &= 0 \\
 \underline{E}_z(x=0, y, z, t) &= 0, & \underline{E}_z(x=a, y, z, t) &= 0 \\
 \underline{E}_z(x, y=0, z, t) &= 0, & \underline{E}_z(x, y=b, z, t) &= 0
 \end{aligned}$$

Aufgabe 16,b)

- b) Welche der beiden angegebenen Funktionen für $\underline{E}_z(x, y, z, t)$ genügt den Randbedingungen? Begründen Sie durch Rechnung. Welche Werte sind demnach für die transversalen Wellenzahlen k_x und k_y erlaubt? Bezeichnen Sie die Modenindizes in x - bzw. y -Richtung mit m bzw. n .

$$\underline{E}_z(x, y, z, t) = E_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{E}_z(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

- Wieso können die trivialen Lösungen $m = 0$ bzw. $n = 0$ (E-Welle) und $m = n = 0$ (H-Welle) nicht existieren?
 - Bei der E-Welle ist für $m = 0$ oder $n = 0$ neben $\underline{H}_z = 0$ auch $\underline{E}_z = 0$. Die transversalen Feldkomponenten verschwinden ebenso und es resultiert ein Nullfeld, d.h. das Feld verschwindet im Hohlleiter.
 - Bei der H-Welle ist für $m = n = 0$ die Maxwellgleichung $\nabla \cdot \mu \underline{\mathbf{H}} = 0$ nicht mehr erfüllt.

Aufgabe 16,c-e)

- c) Bestimmen Sie für eine gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ die Wellenzahl k_z mit dem größtmöglichen Betrag unter Berücksichtigung Ihrer bisherigen Ergebnisse. Wählen Sie als Ausgangspunkt die allgemeine Wellengleichung für homogene Materialien.
- d) Ermitteln Sie die Grenzfrequenz $f_{c,m,n}$ aller Moden (m, n) indem Sie $k_z = 0$ setzen. Erklären Sie was für Frequenzen $f < f_{c,m,n}$ gilt.
- e) Im Folgenden sei für die Dimensionierung des Hohlleiters $a = 2b$ gegeben. In welchem Bereich $f_l < f < f_h$ muss die Frequenz der E-Wellen liegen, damit ausschließlich die niedrigste Mode (Grundmode) im Wellenleiter angeregt wird?

Aufgabe 16,f)

f) Berechnen Sie für die E-Grundmode alle Feldkomponenten $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{E}_z$, $\underline{H}_x$, $\underline{H}_y$ und $\underline{H}_z$.

Da $\underline{H}_z = 0$

$$\begin{aligned}\underline{E}_x &= -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}} \right) \\ \underline{E}_y &= -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \left(jk_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - j\omega\mu \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}} \right) \\ \underline{H}_x &= -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \left(jk_z \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}} - j\omega\epsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right) \\ \underline{H}_y &= -\frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \left(jk_z \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}} + j\omega\epsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

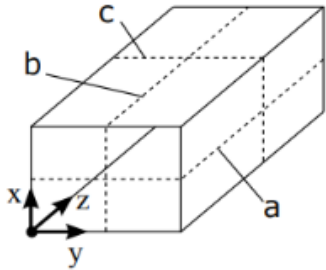


Einsetzen von $\underline{E}_z$

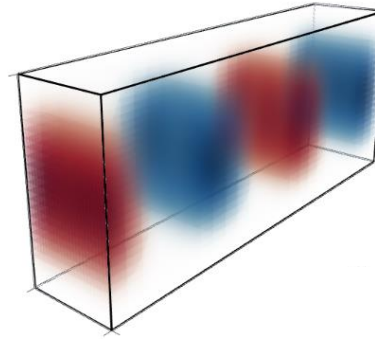
$$\underline{E}_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\ &= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\ &= \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\ &= -\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - k_z z)}\end{aligned}$$

Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



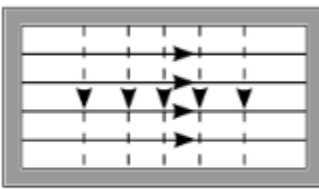
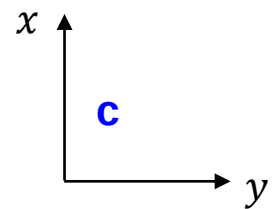
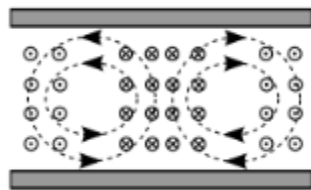
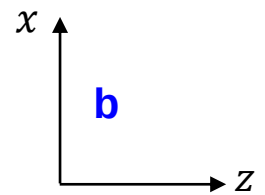
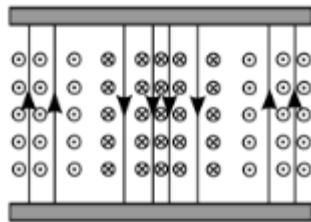
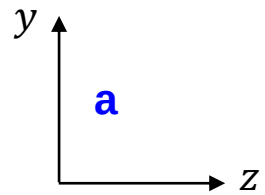
Darstellung auf dem Übungsblatt



Visualisierung mit unserer Web-Anwendung

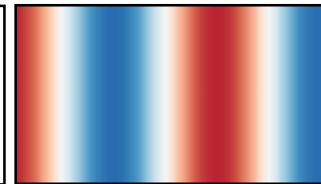
Literaturdarstellung:
Pozar, „Microwave Engineering“

H₁₀-Welle

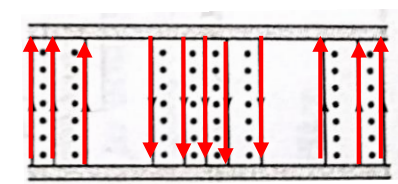


Schnittebene: c

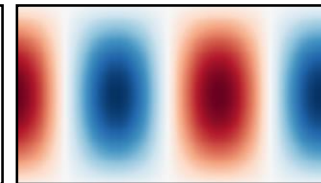
$$\underline{E}_x = 0$$



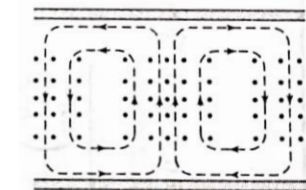
$$\underline{E}_z = 0$$



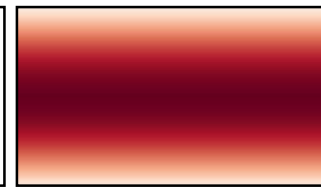
$$\underline{E}_x = 0$$



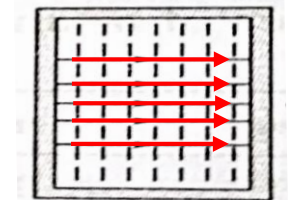
$$\underline{E}_z = 0$$



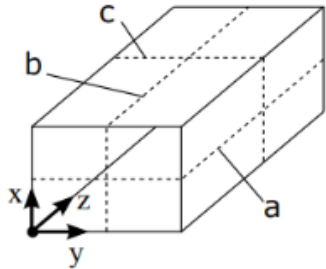
$$\underline{E}_x = 0$$



$$\underline{E}_z = 0$$

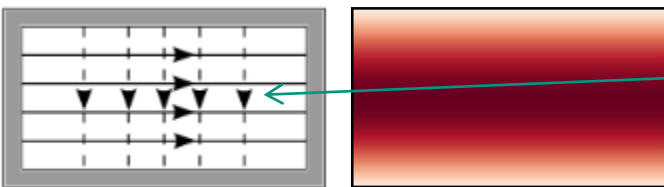
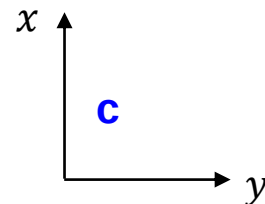
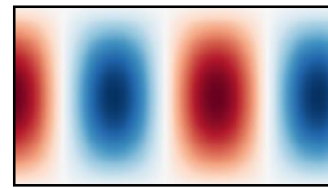
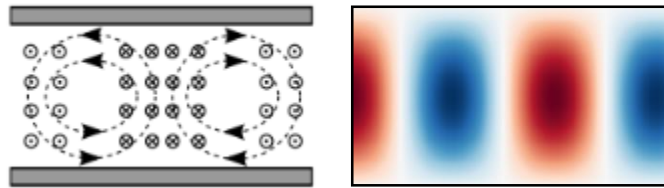
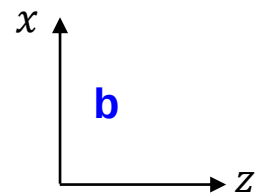
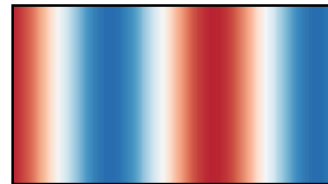
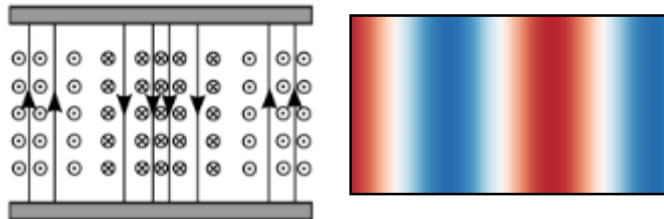
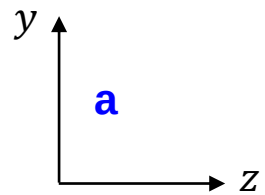


Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



Darstellung auf dem
Übungsblatt

H_{10} -Welle



Schnittebene: c

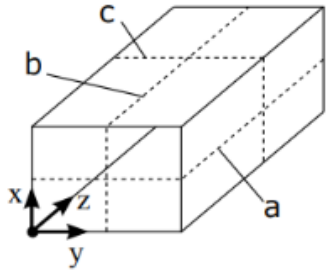
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$

Es gilt $\underline{E}_x = 0$ und $\underline{E}_y \neq 0$.

- Laufen wir in x -Richtung so begegnen wir einem Extremum (Maximum bzw. Minimum) von $\underline{E}_y$, daher ist $m = 1$.
- Laufen wir in y -Richtung so begegnen wir keinem Extremum (Maximum bzw. Minimum) von $\underline{E}_x$, daher ist $n = 0$.

Die Darstellung ist nicht ideal, da man nicht sieht, dass das Feld nach außen hin abnimmt.

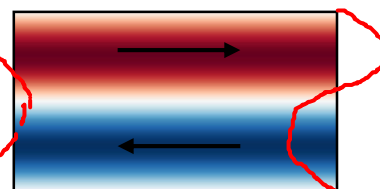
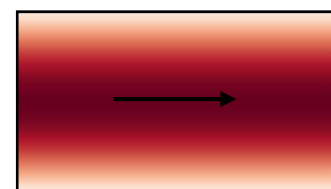
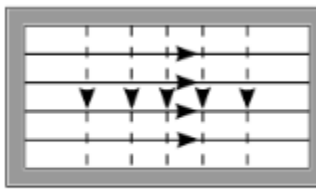
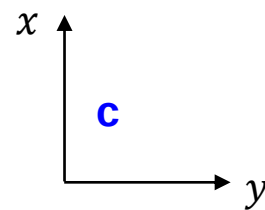
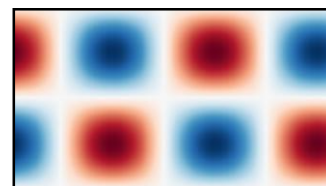
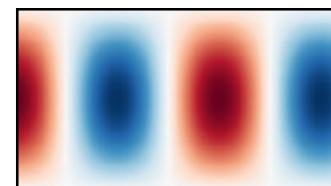
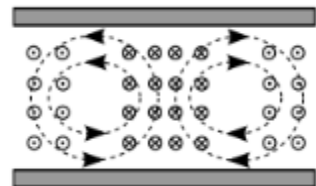
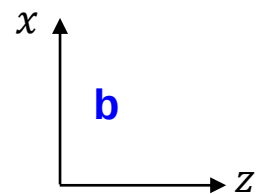
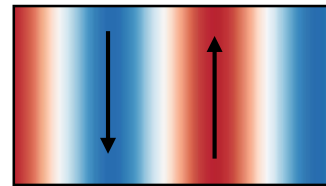
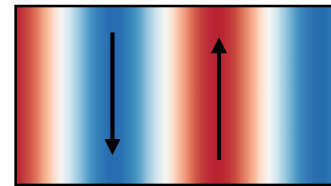
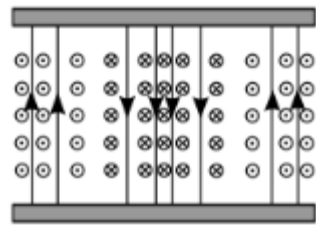
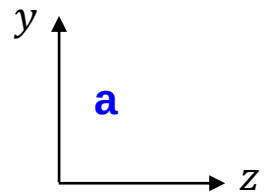
Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



Darstellung auf dem Übungsblatt

H_{10} -Welle

H_{20} -Welle

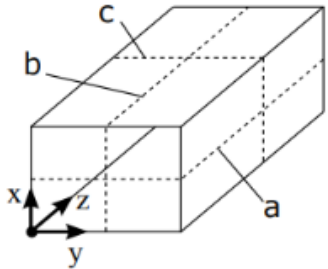


Schnittebene: c

Es gilt nach wie vor $\underline{E}_x = 0$ und $\underline{E}_y \neq 0$.

- Laufen wir in x -Richtung so begegnen wir zwei Extrema von $\underline{E}_y$, daher ist $m = 2$.
- Laufen wir in y -Richtung so begegnen wir keinem Extremum (Maximum bzw. Minimum) von $\underline{E}_x$, daher ist $n = 0$.

Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden

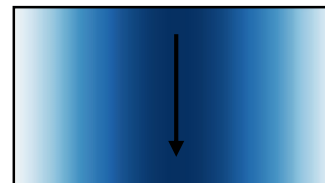
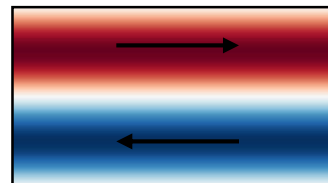
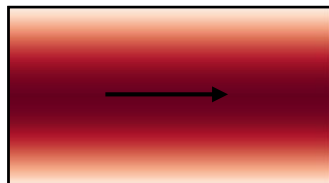
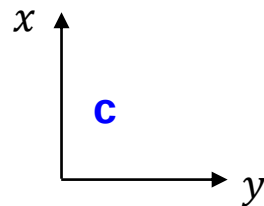
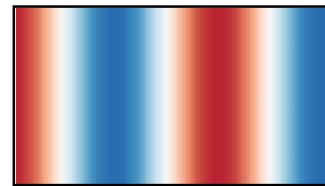
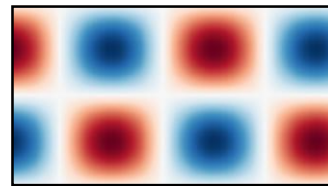
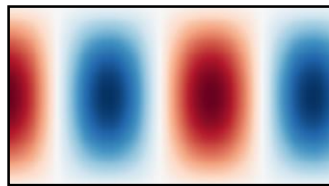
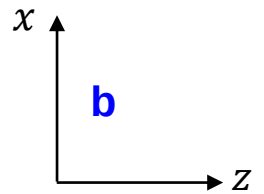
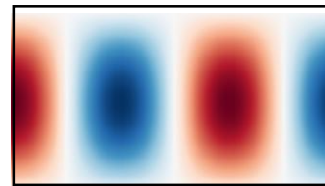
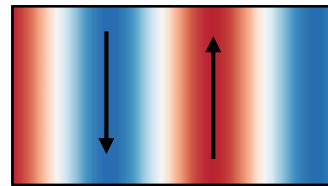
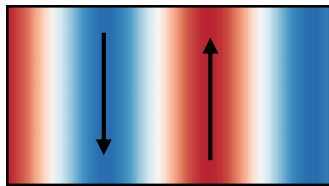
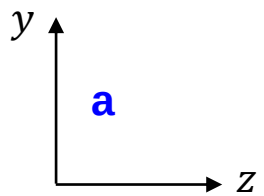


H₁₀-Welle

H₂₀-Welle

H₀₁-Welle

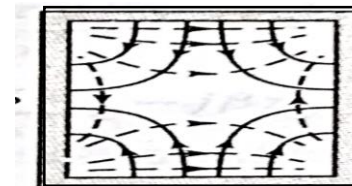
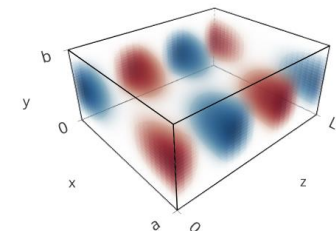
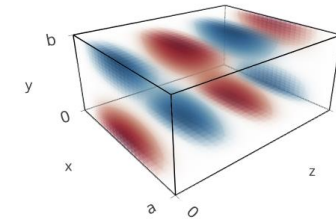
H₁₁-Welle



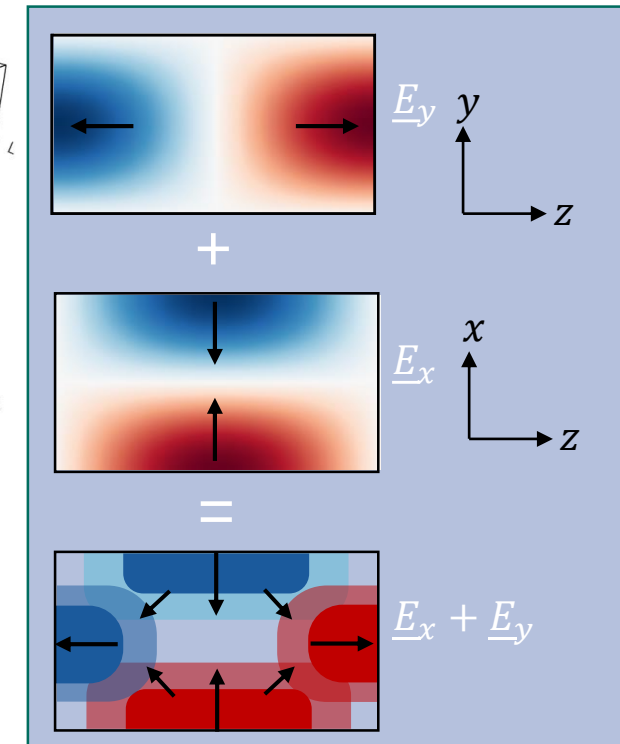
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$
wobei $E_x = 0$

$\underline{E}_x + \underline{E}_y$
wobei $E_x = 0$

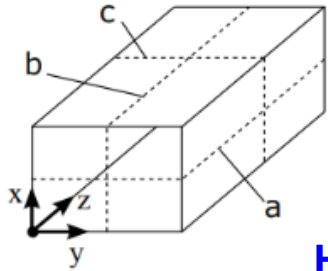
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$
wobei $E_y = 0$



$\underline{E}_x + \underline{E}_y$



Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



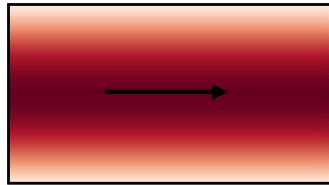
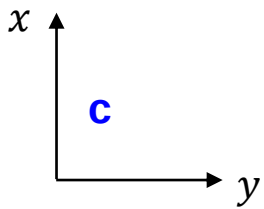
H₁₀-Welle

H₂₀-Welle

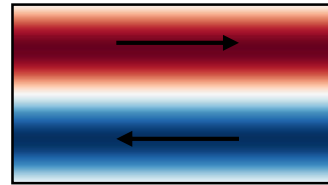
H₀₁-Welle

H₁₁-Welle

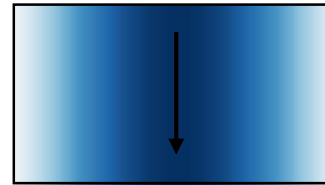
H₂₁-Welle



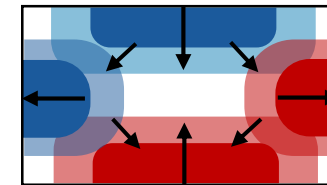
$$\underline{E}_x + \underline{E}_y$$



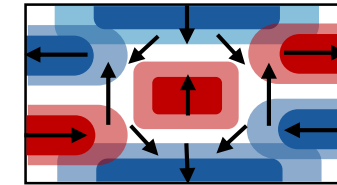
$$\underline{E}_x + \underline{E}_y$$



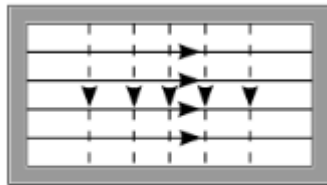
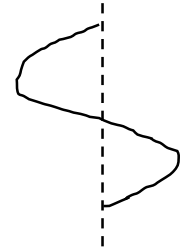
$$\underline{E}_x + \underline{E}_y$$



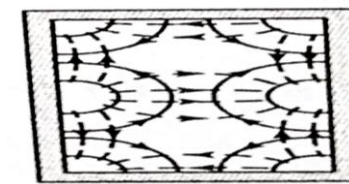
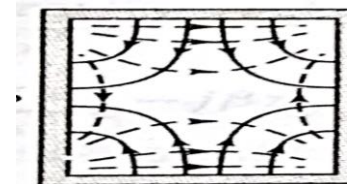
$$\underline{E}_x + \underline{E}_y$$



$$\underline{E}_x + \underline{E}_y$$



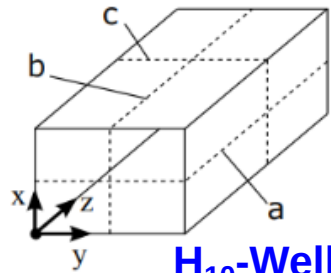
Schnittebene: c



Es gilt $\underline{E}_x \neq 0$ und $\underline{E}_y \neq 0$.

- Laufen wir in x -Richtung so begegnen wir zwei Extrema von $\underline{E}_y$, daher ist $m = 2$.
- Laufen wir in y -Richtung so begegnen wir einem Extremum von $\underline{E}_x$, daher ist $n = 1$.

Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



H₁₀-Welle

H₂₀-Welle

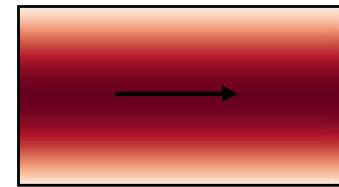
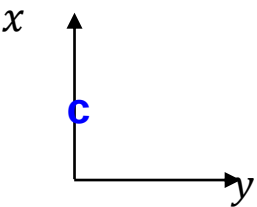
H₀₁-Welle

H₁₁-Welle

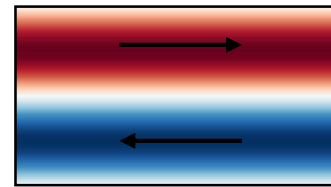
H₂₁-Welle

E₁₁-Welle

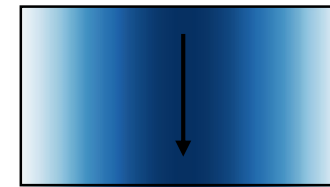
Longitudinalkomponente $\underline{E}_z$



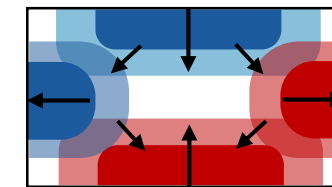
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$



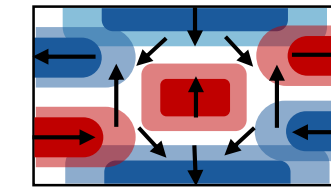
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$



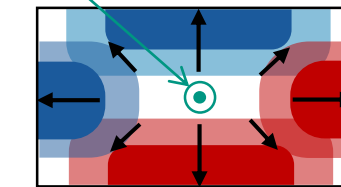
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$



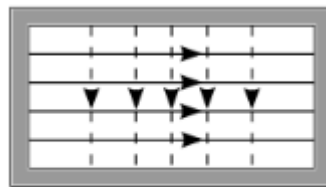
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$



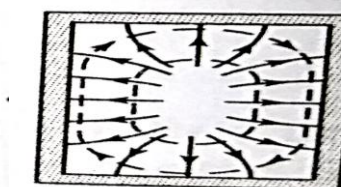
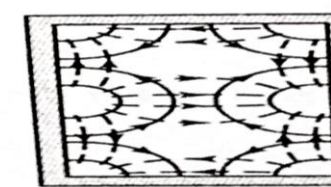
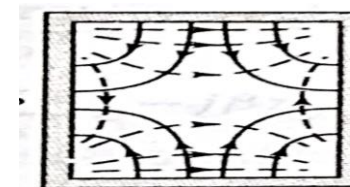
$\underline{E}_x + \underline{E}_y$



$\underline{E}_x + \underline{E}_y$



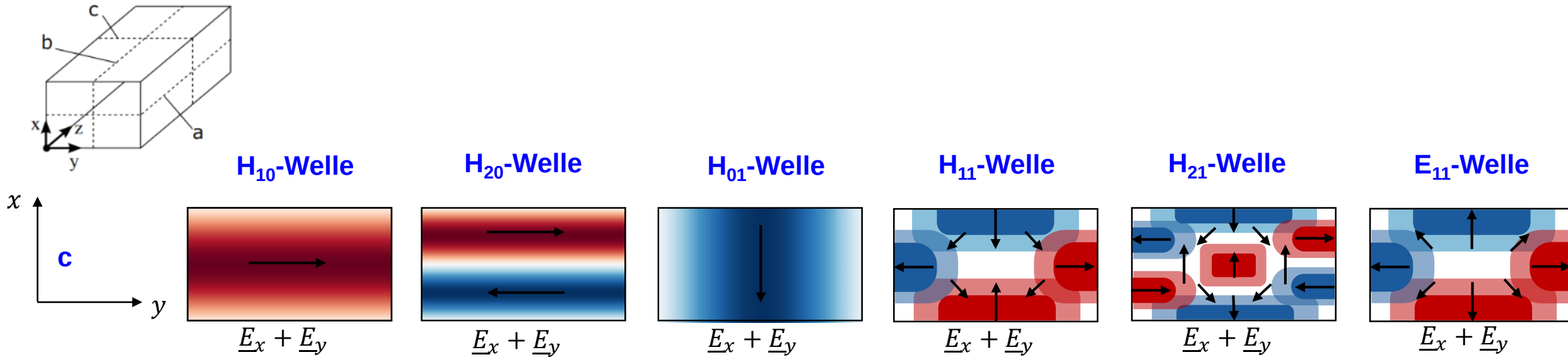
Schnittebene: c



Es gilt $\underline{E}_x \neq 0$, $\underline{E}_y \neq 0$ und $\underline{E}_z \neq 0$.

- Sichtbare z-Komponente, daher E-Welle, insbesondere in Schnittebenen **a** und **b**.
- Jeweils ein Extremum für $\underline{E}_x$ und $\underline{E}_y$, daher ist $m = n = 1$.

Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



Schlussfolgerung:

Die Modenzahlen m und n geben die Anzahl der Extremstellen bzw. Schwingungsbäuche (rot und blau) der stehenden Wellen an.

- m Anzahl der Extrema des E-Feldes entlang der x -Richtung
- n Anzahl der Extrema des E-Feldes entlang der y -Richtung

Achtung

- Man zählt stets die Extremstellen des E-Feldes, welches senkrecht zum Weges steht, welchen man abläuft.
- Da der x - y -Querschnitt meist eine Überlagerung von dem E-Feld in x - und y -Richtung zeigt, hat das Feld an verschiedenen Stellen im Hohlleiter verschieden viele Extremstellen.
→ Am Rand verschwindet die Normalkomponente des E-Feldes nicht. Zählen der Extremstellen am Rand.