EMW Übungsblatt 10

Abgabe bis zum 24.01.2022 um 12:00 via ILIAS

Aufgabe 17:

Gegeben sei ein zylindersymmetrischer Rundhohlleiter mit dem Radius a. Das Innere des Wellenleiter sei vakuumiert und die Wand ideal leitend $\kappa \to \infty$. In der Ebene $z = 0$ befinde sich nun eine ebenfalls ideal leitende Kreisscheibe infinitesimaler Dicke mit dem Radius b, wie in Abbildung 1 dargestellt. Zwischen dieser Kreisscheibe und der Hohlleiterwand liege eine Wechselspannung an, wodurch in

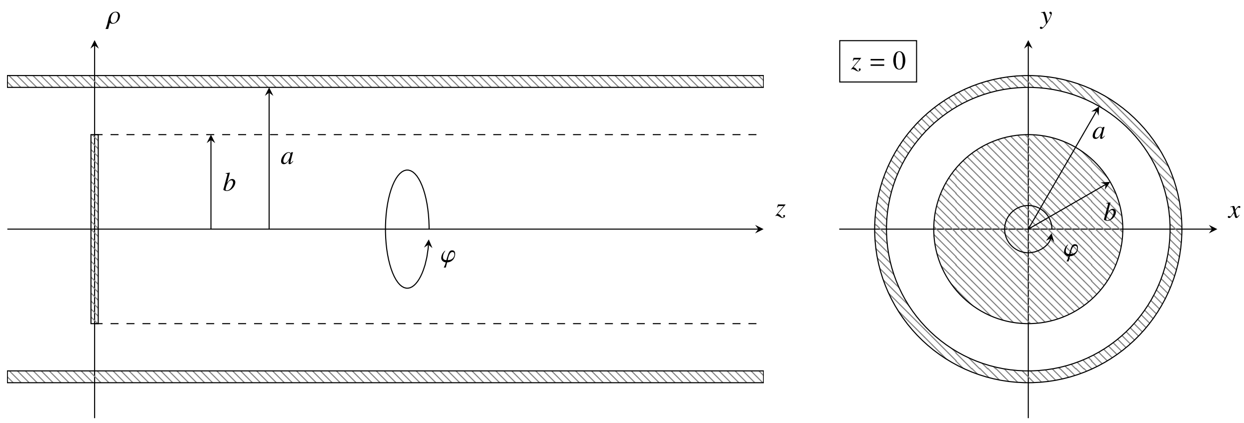

Abbildung 1: Links: Längsschnitt. Rechts: Querschnitt.

$z = 0$ ein elektrisches Feld mit der komplexen Amplitude

$$\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{s}}(\rho, \varphi, z = 0) = \underline{E}^{\mathrm{s}}_{\rho}(\rho, z = 0)\, \mathbf{e}_{\rho} = \mathbf{e}_{\rho} \begin{cases} \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

anliege, wobei wir die harmonische Zeitabhängigkeit $\exp(\mathrm{j}\,\omega t)$ nicht explizit anführen. Dieses elektrische Feld rege elektromagnetische Wellen im Rundhohlleiter an, die sich in positive z-Richtung ausbreiten. Bemerkung: In Rundhohlleitern können sich keine TEM-Wellen ausbreiten, lediglich E- und H-Wellen sind ausbreitungsfähig.

a) Weisen Sie mithilfe des Induktionsgesetzes nach, dass das rotationssymmetrische elektrische Feld an der Kreisscheibe ein magnetisches Feld der Form $\underline{\mathbf{H}} = \underline{H}_{\varphi}(\rho, z)\, \mathbf{e}_{\varphi}$ zur Folge hat.

b) Analog zu der Anregung werden auch die ausbreitungsfähigen Wellen im Hohlleiter $\underline{E}_{\rho}$- und $\underline{H}_{\varphi}$-Komponenten aufweisen. Begründen Sie anhand der folgenden Beziehungen aus der Vorlesung, dass es sich bei den im Rundhohlleiter angeregten, zylindersymmetrischen Wellen um E-Wellen handeln muss. Stellen Sie zudem die nicht verschwindenden Komponenten von $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ in Abhängigkeit von $\underline{E}_z$ dar.

Hinweis: Wir nehmen an, dass in unserem Fall alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Felds unabhängig von φ sind. Daher gilt stets $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

$$\underline{E}_{\rho} = -\mathrm{j}\, \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} \right) \qquad \underline{E}_{\varphi} = -\mathrm{j}\, \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \right)$$

$$\underline{H}_{\rho} = -\mathrm{j}\, \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} - \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} \right) \qquad \underline{H}_{\varphi} = -\mathrm{j}\, \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} + \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \right) .$$

Für die E-Wellen im Rundhohlleiter wählen wir mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ den folgenden Ansatz

$$\underline{E}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z) = \underline{A}_0^{m,n} \, J_m(\underline{k}_\mathrm{t}^{m,n}\rho) \, \exp(\mathrm{j}\, m\varphi) \, \exp\left(-\mathrm{j}\, \underline{k}_z^{m,n} z\right) \, .$$

c) Begründen Sie, dass für die Modenzahl $m = 0$ gelten muss, um die Zylindersymmetrie der Lösungen zu gewährleisten.

d) Welche Bedingung muss die transversale Wellenzahl $\underline{k}_\mathrm{t}^{m,n}$ erfüllen, um die Randbedingungen des elektrischen Felds an den Hohlleiterwänden zu erfüllen?

e) Geben Sie möglichst weit vereinfachte Ausdrücke für die nicht verschwindenden Feldkomponenten aus b) an.

Mithilfe dieses Ansatzes möchten wir nun das magnetische Feld der elektromagnetischen Welle ermitteln, die durch die Kreisscheibe in $z = 0$ im Hohlleiter angeregt wird. Dafür setzen wir mit $i \in \{\rho, z\}$ an, dass (die Gewichtung erfolgt durch die Koeffizienten $\underline{A}_0^{0,n}$)

$$\underline{E}_i(\rho, z) = \sum_n \underline{E}_i^{0,n}(\rho, z) \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{H}_\phi(\rho, z) = \sum_n \underline{H}_\phi^{0,n}(\rho, z) \, .$$

Mithilfe dieses Ansatzes soll nun das magnetische Feld der resultierenden elektromagnetischen Welle im Rundhohlleiter bestimmt werden. Aufgrund der Anregung durch die Kreisscheibe muss in der Ebene $z = 0$ gelten, dass

$$\underline{E}_\rho(\rho, z = 0) = \begin{cases} \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \stackrel{!}{=} \sum_n \underline{E}_\rho^{0,n}(\rho, z = 0) \, . \tag{1}$$

f) Ermitteln Sie die Koeffizienten $\underline{A}_0^{0,n}$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

  i) Setzen Sie den in e) erhaltenen Ausdruck für $\underline{E}_\rho^{0,n}$ in die Bedingung (1) ein.

  ii) Multiplizieren Sie auf beiden Seiten mit $\rho \, J_1(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho)$ und integrieren Sie anschließend von $\rho = 0$ bis $\rho = a$.

  Hinweis: Beachten Sie, dass $J_0(cx) = -cJ_1(cx)$ gilt und verwenden Sie die folgende Beziehung in der $\delta_{\ell,n}$ das Kronecker-Delta bezeichnet:

$$\int_0^a \rho \, J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a}\rho\right) \mathrm{d}\rho = \delta_{\ell,n} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} = \begin{cases} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} & \ell = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \, .$$

g) Drücken Sie $\underline{H}_\varphi$ mithilfe der Koeffizienten $\underline{A}_0^{0,n}$ aus.

h) *Optional:* Welche Bedingung muss für die Betriebsfrequenz des Rundhohlleiters gelten, damit ausschließlich die Fundamentalmode angeregt wird?

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu