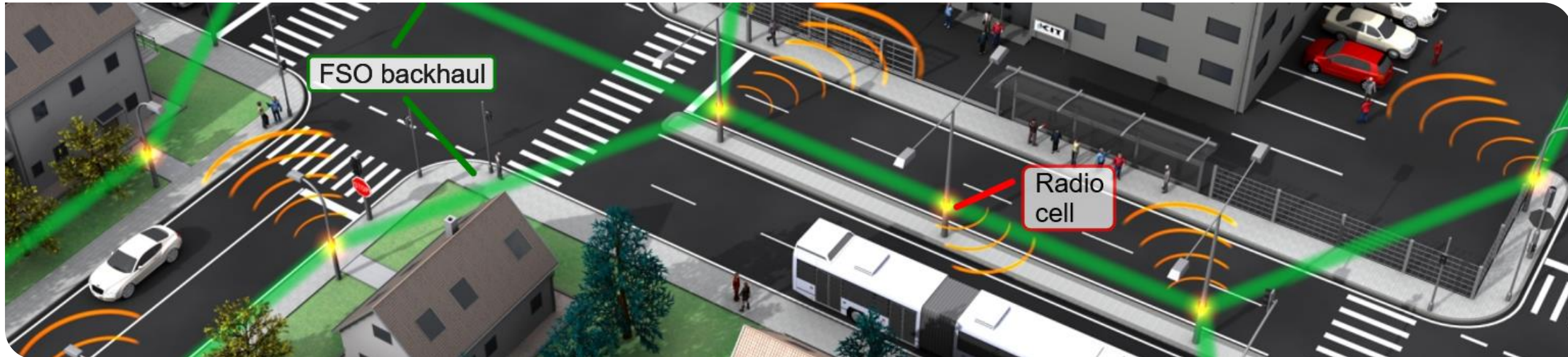


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 11

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Administratives

- Die Klausur findet am 10. März 2022 von 16 – 18 Uhr statt, ...
- ... die Hörsaalverteilung etc. wird noch bekannt gegeben.
- In der Vorlesung 15 stellen wir aktuelle Forschungsthemen unseres Instituts vor.

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo ⁴⁴	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So Vorlesung 15	2 Mi
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo	3 Do
4 Mo ⁴⁰	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5 ⁴⁹	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 12 ⁶
8 Fr	8 Mo Übung 1 ⁴⁵	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So	9 Mi Fragestunde
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo Übung 8 ²	10 Do
11 Mo ⁴¹	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo Übung 6 ⁵⁰	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo ⁷
15 Fr	15 Mo Übung 2 ⁴⁶	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo Übung 9 ³	17 Do
18 Mo Vorlesung 1 ⁴²	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7 ⁵¹	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo ⁸
22 Fr	22 Mo Übung 3 ⁴⁷	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 10 ⁴	24 Do
25 Mo Übung 0 ⁴³	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 Sa	27 Mo ⁵²	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo ⁹
29 Fr	29 Mo Übung 4 ⁴⁸	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 11	

Themenübersicht (I)

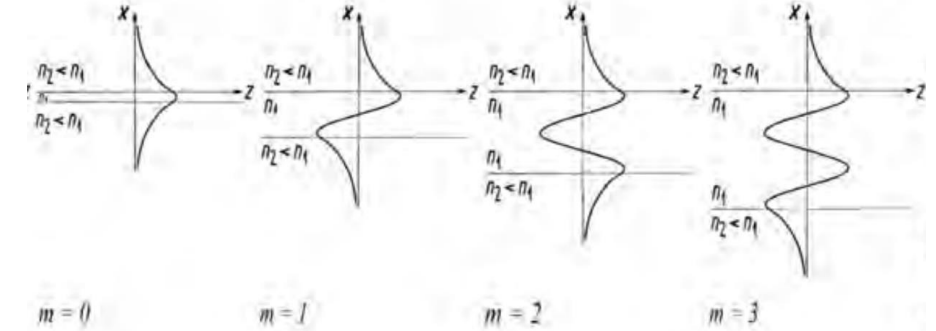
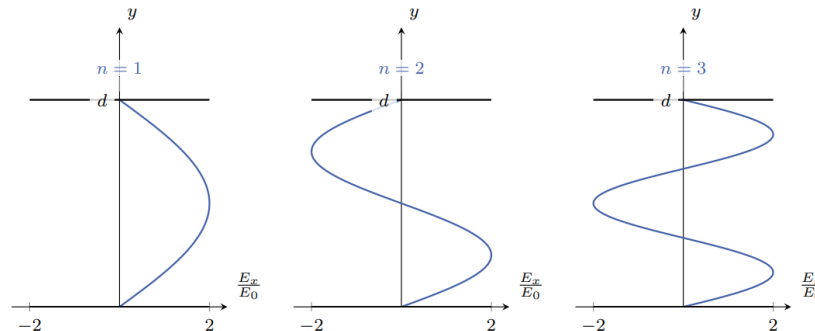
Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichungen, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit
Übung 3	A6, A7	Polarisation, Hertzscher Dipol
Übung 4	A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Grenzflächenübergänge
Übung 6	A10, A11	Kirchhoffsches Beugungsintegral, Fresnel Näherung
Übung 7	A12, A13	Gaußscher Strahl, Strahlenoptik

Themenübersicht (II)

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 8	A14, A15	Reflexion am idealen Leiter, Parallelplattenleitung
Übung 9	A16	Rechteckhohlleiter
Übung 10	A17	Anregung von Moden im Rundhohlleiter
Übung 11	A18, A19	Dielektrische Platte

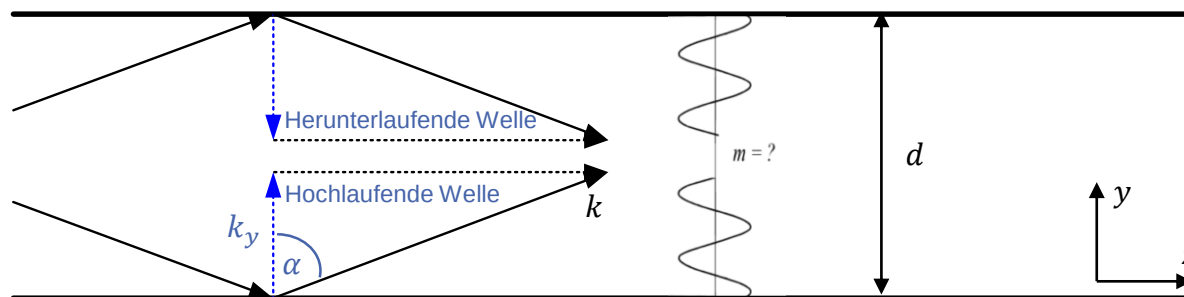
Parallelplattenleiter vs. Schichtwellenleiter

	Metallischer Parallelplattenleiter	Dielektrischer Schichtwellenleiter
Materialien	Vakuum/Luft oder anderes Dielektrikum umgeben von einer metallischen Hülle	Schichtsystem aus dielektrischen Materialien, z.B. Siliziumdioxid (Quarz)
Grundprinzip	Reflexion der Welle an den metallischen Grenzflächen aufgrund der hohen (idealen) Leitfähigkeit des Metalls	Totalreflexion an den Grenzflächen zwischen den Dielektrika
Bedingungen	Stetigkeitsbedingungen vereinfachen sich zu Randbedingungen	Stetigkeitsbedingungen
Phasensprung	Senkrechte Polarisierung: 180° (Vorzeichenwechsel) Parallele Polarisierung: 0°	Komplexe Transmissions- und Reflexionskoeffizienten führen zu wellenleiterabhängigen Phasensprüngen
Modenarten	TE- oder TM-Moden (TEM: Zweiter Leiter im Inneren – Koaxialkabel)	TE- oder TM-Moden
Abschirmung	Felder dringen nicht in die metallische Außenhülle des Leiters ein → ideale Abschirmung	Evaneszenz (exponentiell abklingende) Felder jenseits der Grenzfläche



Die Selbstkonsistenzbedingung

- Wir erinnern uns an die intuitive Erklärung zur Entstehung von transversal stehenden Wellen in einem Hohlleiter/Parallelplattenleiter (Übung 9), den sogenannten Moden. Durch die Bedingungen der konstruktiven Interferenz der einfallenden & reflektierten Welle, konnten wir eine Bedingung für die transversale Wellenzahl herleiten.
- Für den dielektrischen Schichtwellenleiter ist selbige Betrachtung auch gültig, allerdings mit einem beliebigen komplexen Reflexionsfaktor $\underline{r}$. Hier gibt der Betrag des Reflexionsfaktors $|\underline{r}|$ den Anteil der reflektierten Welle an und die Phase des Reflexionsfaktors $\arg(\underline{r}) = \psi$ den Phasensprung an der Grenzfläche. (Herleitung siehe Vorlesung)
- Wir wissen: Für eine stehende Welle darf sich die Phasendifferenz von einfallender und reflektierter Welle nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden. In anderen Worten: Nach dem Hoch- und Runterlaufen muss die Welle sich selbst reproduzieren.
- Betrachten einer herunterlaufenden und hochlaufenden Welle:



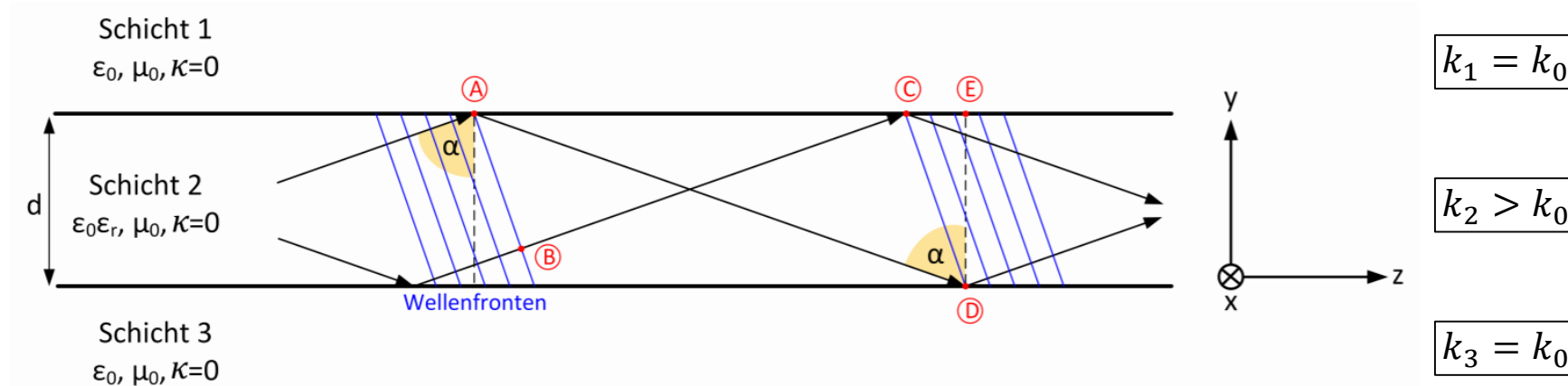
$$k_y d + \psi = -k_y d - \psi + m2\pi$$

$$2k_y d = m2\pi - 2\psi$$

$$k_y d = m\pi - \psi$$

$$\boxed{k \cos(\alpha) d = m\pi - \psi}$$

Aufgabe 18 a)



- Die Selbstkonsistenzbedingung für k_y lässt sich auch aus einer geometrischen Überlegung zeigen.
- Da die Moden Eigenfunktionen des Wellenleiters darstellen, wird diese Bedingung auch als **Eigenwertgleichung des Wellenleiters** bezeichnet.
- Punkte, die zu einem Zeitpunkt auf einer Wellenfront liegen, müssen dies auch an einem späteren Zeitpunkt noch tun, selbst wenn sie zwischenzeitlich unterschiedliche Wegstrecken zurücklegen. Ihre Phase muss bis auf ein ganzzahliges Vielfaches m von 2π übereinstimmen.

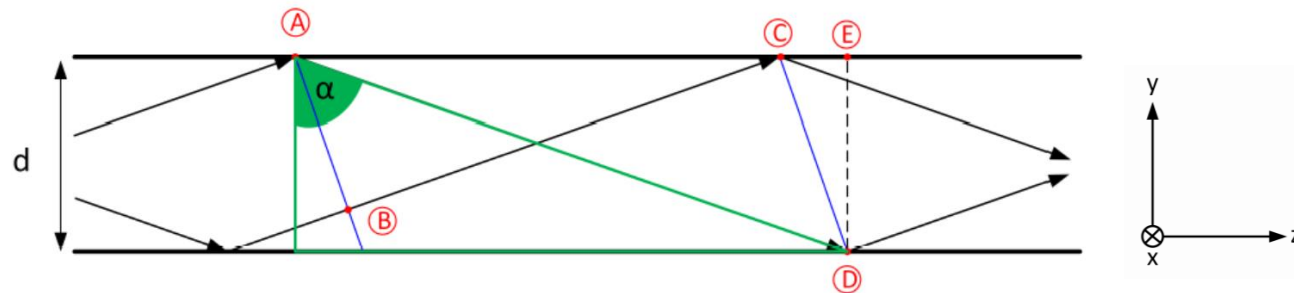
$$-2\psi - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2$$

Phasensprünge bei Reflexion

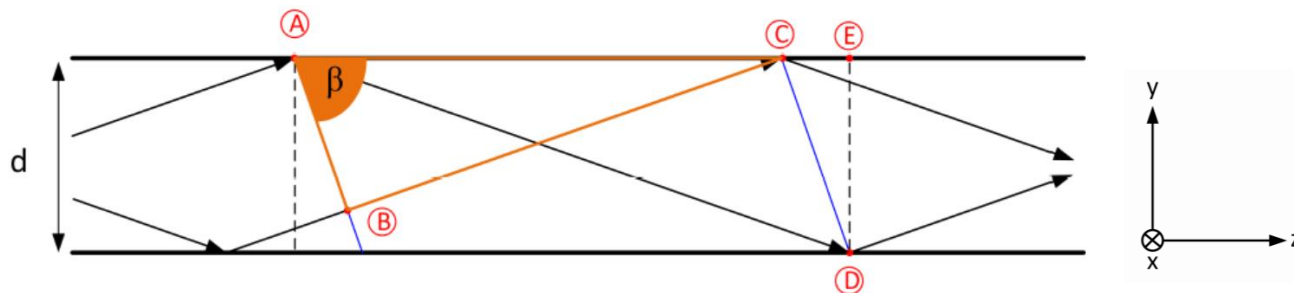
Entlang der Wege akkumulierte Phasendifferenz, da $e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$

Aufgabe 18 a)

■ Bestimmung von $\overline{AD}$



■ Bestimmung von $\overline{BC}$



$$-2\psi - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{d}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{d}{\cos(\alpha)}$$

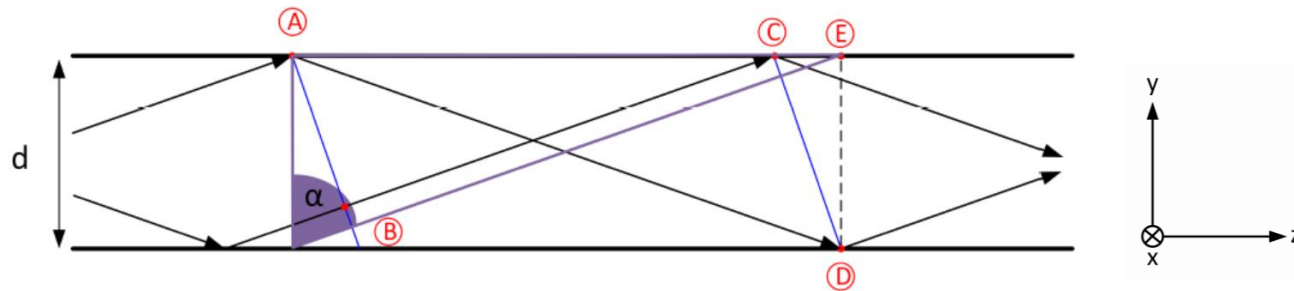
$$\sin(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{BC} = \sin(\beta) \overline{AC} = \sin(\beta) (\overline{AE} - \overline{CE}) = \sin(\alpha) (\overline{AE} - \overline{CE})$$

$\overline{AE}$ und $\overline{CE}$ sind noch unbekannt

Aufgabe 18 a)

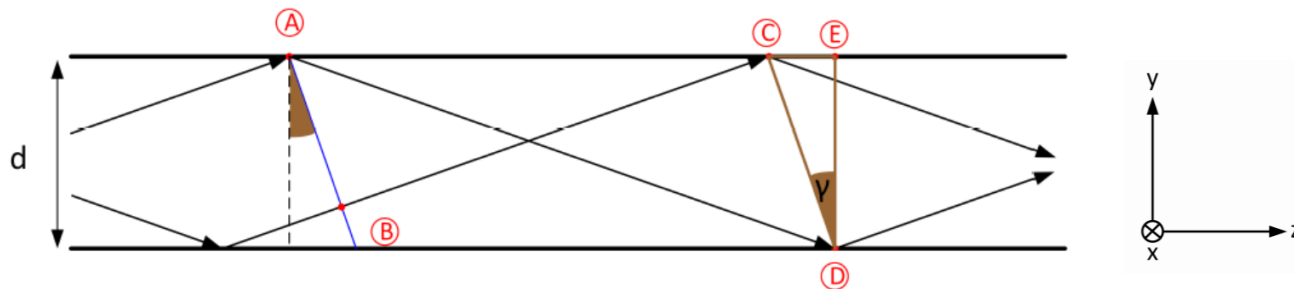
■ Bestimmung von $\overline{AE}$



$$-2\psi - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{AE}}{d} \Leftrightarrow \overline{AE} = d \tan(\alpha)$$

■ Bestimmung von $\overline{CE}$



$$\tan(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{CE}}{d} \Leftrightarrow$$

$$\overline{CE} = d \tan(\gamma) = d \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{d}{\tan(\alpha)}$$

Aufgabe 18 a)

- Einsetzen in $\overline{BC}$

$$\overline{BC} = \sin(\alpha) (\overline{AE} - \overline{CE}) = \sin(\alpha) \left(d \tan(\alpha) - \frac{d}{\tan(\alpha)} \right) = d \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right)$$

- Einsetzen von $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ in Selbstkonsistenzbedingung

$$-2\psi - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2\psi - \frac{dk_2}{\cos(\alpha)} + m2\pi = -dk_2 \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$dk_2 \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) - \frac{1}{\cos(\alpha)} \right) + m2\pi = 2\psi \quad \Leftrightarrow$$

$$dk_2 \left(\frac{\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) - (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}{\cos(\alpha)} \right) = 2\psi - m2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$-2dk_2 \cos(\alpha) = 2\psi - m2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$dk_2 \cos(\alpha) = m\pi - \psi$

Nur für diskrete Winkel α erfüllt die transversale Wellenzahl $k_x = k_2 \cos(\alpha)$ die Bedingung zur transversalen konstruktiven Interferenz. Für andere Winkel herrscht keine konstruktive Interferenz. Die einfallenden und mehrfach reflektierten Wellen löschen sich dann gegenseitig aus.

Aufgabe 18 b)

- Da unendliche Ausdehnung des Schichtwellenleiters in x -Richtung $\rightarrow$ es gilt $\frac{\partial}{\partial x} = 0$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x} = 0} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

TM-Welle (E-Welle):

$\underline{H}_z = 0$. Daraus folgt, dass auch $\underline{E}_x = \underline{H}_y = 0$.
TM-Wellen haben daher nur die Feldkomponenten $\underline{E}_y, \underline{E}_z$ und $\underline{H}_x$.

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial t} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x} = 0} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

TE-Welle (H-Welle):

$\underline{E}_z = 0$. Daraus folgt, dass auch $\underline{E}_y = \underline{H}_x = 0$.
TE-Wellen haben daher nur die Feldkomponenten $\underline{H}_y, \underline{H}_z$ und $\underline{E}_x$.

Aufgabe 18 c)

■ **Ziel:** Herleitung einer mathematischen Darstellung der Mode

■ **Vorgehen:**

- Start von der Wellengleichung
- Wahl eines geeigneten Lösungsansatzes
- Einsetzen der Stetigkeitsbedingungen

■ **Gegeben:** Harmonischer Ansatz der Mode

Das Feld hat nur
eine x -Komponente

Mode

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \underline{E}_x \mathbf{e}_x = \underline{E}_{x,m}(y) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_x$$

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \underline{E}_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial t^2} = 0$$

Das Feld hat nur eine x -Komponente.
Die Wellengleichung ist separierbar.

Einsetzen des
Laplace-Operators

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ ergibt Multiplikation mit } -\omega^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ ergibt Multiplikation mit } -k_z^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} - k_z^2 \underline{E}_x + k^2 \underline{E}_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) \underline{E}_x = 0$$

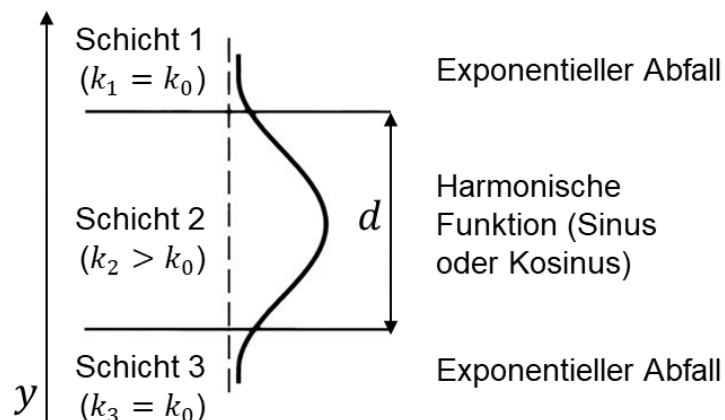
Aufgabe 18 c)

- Einsetzen des $\underline{E}_x$ -Feldes

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) \underline{E}_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_{x,m}(y)}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) \underline{E}_{x,m}(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_{x,m}(y)}{\partial y^2} = \underbrace{-(k^2 - k_z^2)}_{\text{Konstante } -k_y^2} \underline{E}_{x,m}(y) = -k_y^2 \underline{E}_{x,m}(y)$$

↑ Kürzen des Exponentialterms

- Gesucht ist eine Funktion $\underline{E}_{x,m}(y)$, deren zweite Ableitung ein Vielfaches ihrer selbst ist. Bei der Parallelplattenleitung haben wir $A \sin(k_y y)$, $A \cos(k_y y)$ oder deren Überlagerung als Ansatz verwendet.
- Aufgrund der Randbedingungen dringen die Felder auch in das Material jenseits der Grenzfläche ein
- Folglich müssen wir unseren **Lösungsansatz** um die Schichten 1 und 2 erweitern



$$\underline{E}_{x,m}(y) = \begin{cases} B \exp\left(+jk_{1,y}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos(k_{2,y}y - \psi), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ C \exp\left(-jk_{1,y}\left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Rein imaginäre Wellenzahl in y -Richtung Schicht 1 und 3, wobei die Materialien identisch sind.

Die VZ wurden also derart gewählt, dass sich ein exponentieller Abfall ergibt.

Aufgabe 18 c)

- Die Tangentialkomponenten der elektrischen Felder müssen an den Grenzflächen (d.h. bei $y = \pm d/2$) stetig sein. Dies nutzen wir um B und C in Abhängigkeit von A zu bestimmen.
- Grenzübergang bei $y = d/2$

$$C = A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right)$$

- Grenzübergang bei $y = -d/2$

$$B = A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right)$$

- Einsetzen ergibt

$$\underline{E}_{x,m}(y) = \begin{cases} A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) \exp\left(+jk_{1,y} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos(k_{2,y} y - \psi), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) \exp\left(-jk_{1,y} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Aufgabe 18 c)

- Nun muss neben der Stetigkeit des tangentialen E -Feldes, auch die Stetigkeit für das tangentiale H -Feld erfüllt sein.
- Die H-Welle hat nur eine einzige tangentiale H -Feldkomponente, welches sich aus den Maxwellgleichungen aus c) mit

$\underline{H}_{z,m} = -\frac{j}{\mu\omega} \frac{\partial \underline{E}_{x,m}}{\partial y}$ berechnen lässt

$$\underline{H}_{z,m}(y) = -\frac{j}{\mu\omega} \begin{cases} A jk_{1,y} \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) \exp\left(+jk_{1,y} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \\ -A k_{2,y} \sin(k_{2,y}y - \psi) & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ -A jk_{1,y} \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) \exp\left(-jk_{1,y} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \end{cases}$$

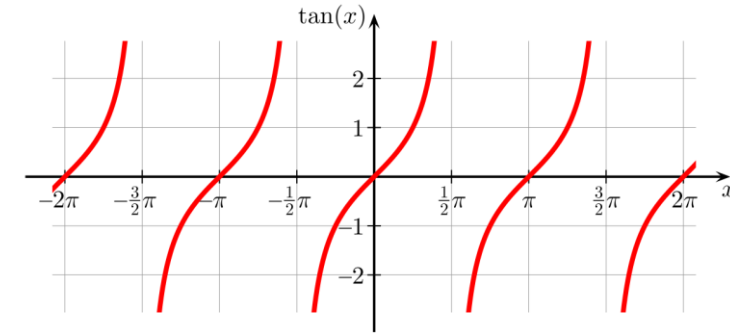
- Grenzübergang bei $y = d/2$

$$jk_{1,y} \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) = -k_{2,y} \sin\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) \Leftrightarrow \tan\left(k_{2,y} \frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{jk_{1,y}}{k_{2,y}}$$

- Grenzübergang bei $y = d/2$

$$jk_{1,y} \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) = k_{2,y} \sin\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) \Leftrightarrow \tan\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{jk_{1,y}}{k_{2,y}}$$

Aufgabe 18 c)



- Mit $k_{2,y} \frac{d}{2} = \xi$ und $jk_{1,y} \frac{d}{2} = \eta$ und der Periodizität des Tangens erhalten wir

$$\tan\left(k_{2,y} \frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{jk_{1,y}}{k_{2,y}} \Leftrightarrow \tan(\xi + \psi) = \frac{\eta}{\xi} \Leftrightarrow \xi + \psi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m_1\pi$$

$$\tan\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{jk_{1,y}}{k_{2,y}} \Leftrightarrow \tan(\xi - \psi) = \frac{\eta}{\xi} \Leftrightarrow \xi - \psi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m_2\pi$$

- Einmal Gleichungen nach ξ umformen und einsetzen und einmal Gleichungen nach η umformen und einsetzen.
Außerdem $m = m_1 + m_2$ und $m' = m_1 - m_2$

$$\xi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m \frac{\pi}{2} \qquad \psi = m' \frac{\pi}{2}$$

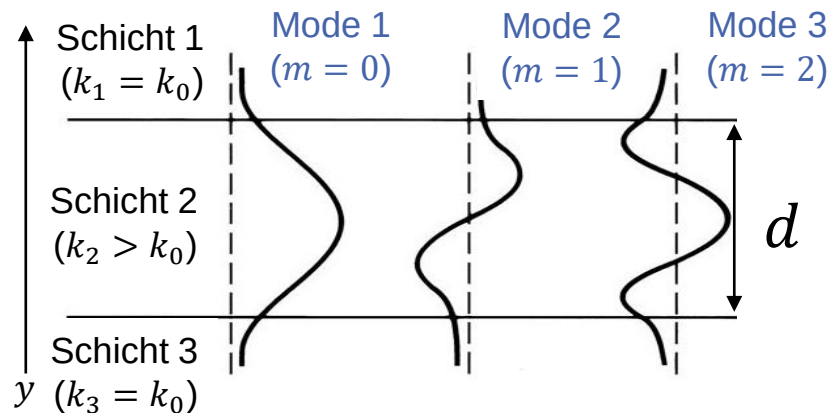
- Es gilt $m' = 2m_1 - m$. Das heißt: m' ist gerade, wenn m gerade ist. m' ist ungerade, wenn m ungerade ist.
- Außerdem wissen wir, dass ein ψ , welches sich um Vielfaches von π unterscheidet, im selben Modenfeld resultiert.
- D.h. für ein gegebenes gerades m , sind alle m' gerade und gehören zur selben Mode.
- Analog sind für ein gegebenes ungerades m alle m' ungerade und gehören zur selben Mode.

Aufgabe 18 c+d)

- Entsprechend können wir mit einem einzigen m schreiben:

$$\xi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m \frac{\pi}{2} \qquad \psi = m \frac{\pi}{2}$$

- Die Gleichung mit dem ξ und η beinhalten die transversalen Wellenzahlen. Diese Gleichung stellt die Eigenwertgleichung dar und kann numerisch gelöst werden, um je nach Wellenleiterparameter die Moden, welche sich ausbilden, zu bestimmen. (siehe Vorlesung)
- Das ψ lässt sich nun in den Feldansatz einsetzen



$$E_{x,m}(y) = \begin{cases} A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(+jk_{1,y} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} y - m \frac{\pi}{2}\right), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-jk_{1,y} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Wir stellen fest: Aufgrund von $\psi = m \frac{\pi}{2}$ ist der Cosinus für jedes ungerade m ein Sinus. Es ist egal, ob zu Beginn ein Cosinus oder Sinus im Ansatz gewählt wurde. Man unterscheidet die Feldlösungen daher auch häufig in eine Sinus-Lösung für ungerade m und eine Cosinus-Lösung für gerade m . Beachten Sie: $k_{2,y}$ ist ebenso abhängig von m (siehe Selbstkonsistenzbedingung). Mit steigendem m , steigt auch $k_{2,y}$. Folglich, passen dann mehrere Schwingungsbäuche des cos/sin in Schicht 2.

Aufgabe 19 a+b)

- a) Welche Bedingung an den Einfallswinkel θ_e an der Grenzfläche muss erfüllt sein, damit sich im Plattenleiter ein konstantes, in z -Richtung laufendes Wellenbild/Feldmuster ausbildet?
- b) Wir betrachten nun Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 0.87 \mu\text{m}$ das in den Schichtwellenleiter der Dicke $d = 2 \mu\text{m}$ eingekoppelt wird. Die für den Schichtwellenleiter verwendeten Dielektrika weisen die Brechungsindizes $n_1 = 1.6$ bzw. $n_2 = 1.4$ auf. Ermitteln Sie den für die Ausbreitung im Wellenleiter kritischen Winkel θ_c , den maximalen Winkel θ_e unter dem Licht aus der Luft ($n_e = 1$) eingekoppelt werden kann und die numerische Apertur (NA) des Wellenleiters.

Hinweis: In Luft gilt $NA \approx \sin \theta_e$.

■ Bedingungen:

- Snelliussche Brechungsgesetz

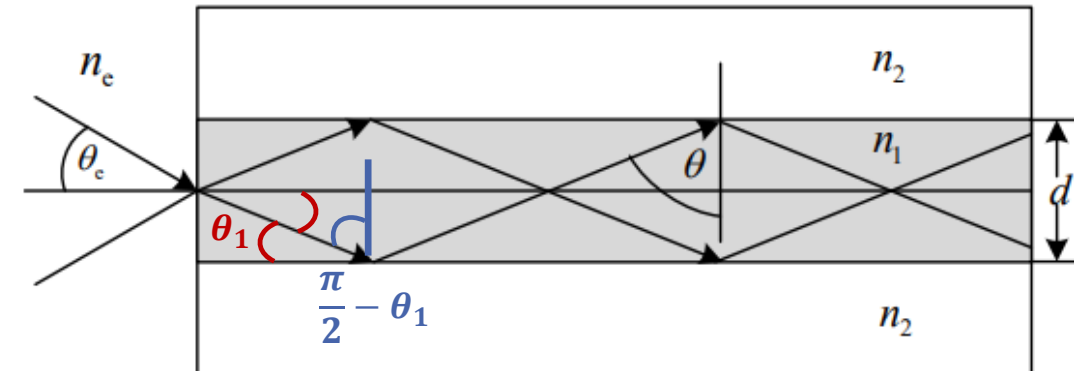
$$k_e \sin(\theta_e) = k_1 \sin(\theta_1)$$

- Totalreflektion, damit Leistung nicht durch transmittierte Welle aus dem Wellenleiterkern transportiert wird

$$\pi/2 - \theta_1 \geq \theta_c$$

- Selbstkonsistenzbedingung, damit sich transversal konstante Feldmuster bilden können, welche in z -Richtung propagieren

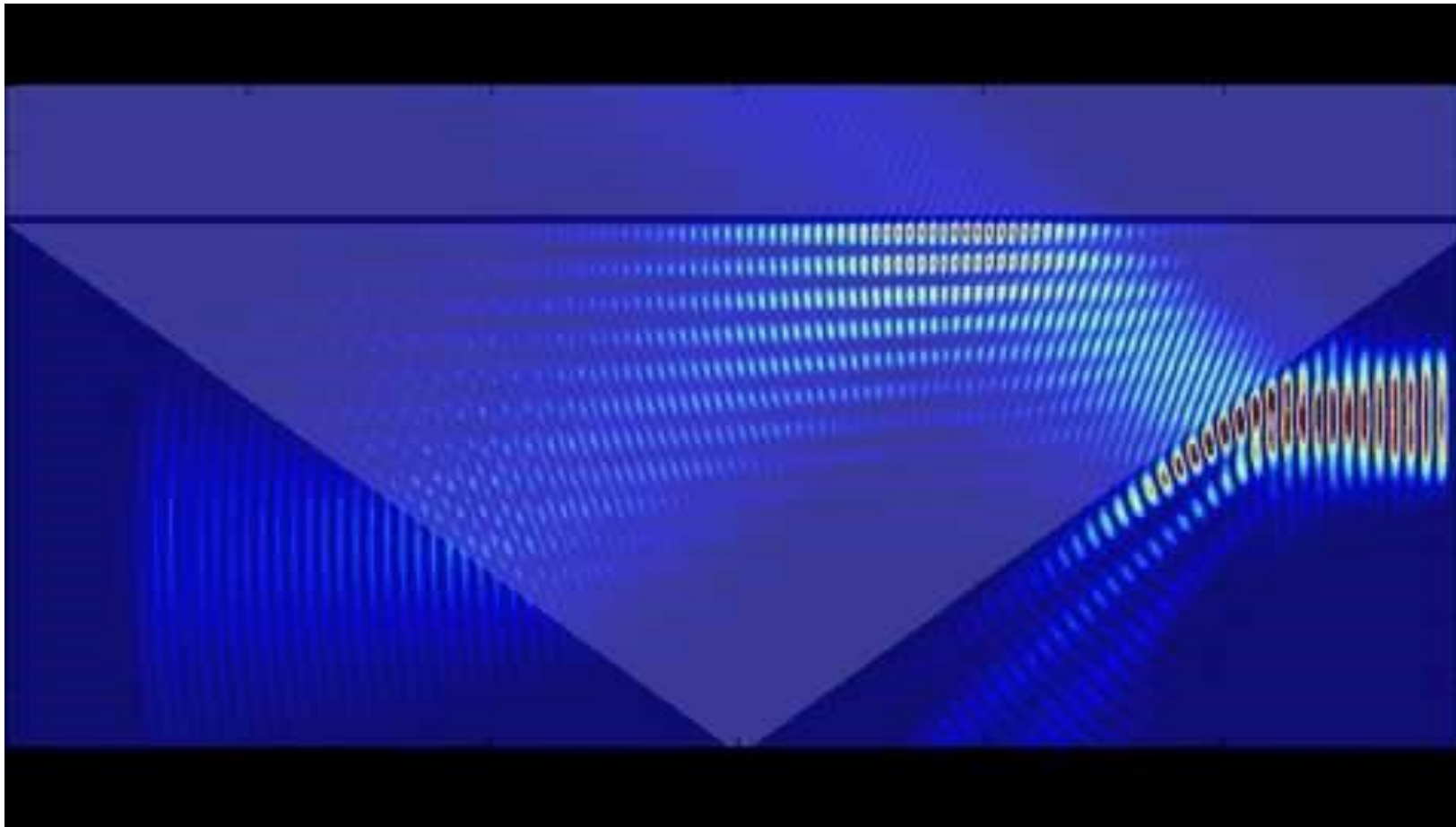
$$\cos \theta_m = \frac{m\pi - \psi}{k_1 d}$$



Kopplung mit Prisma

Wellenleiter

Prisma



Referenz: *Prism Tunneling von MatlabFDTDToolbox*, <https://youtu.be/qBL67nI-hpI>

Aufgabe 19 c-e)

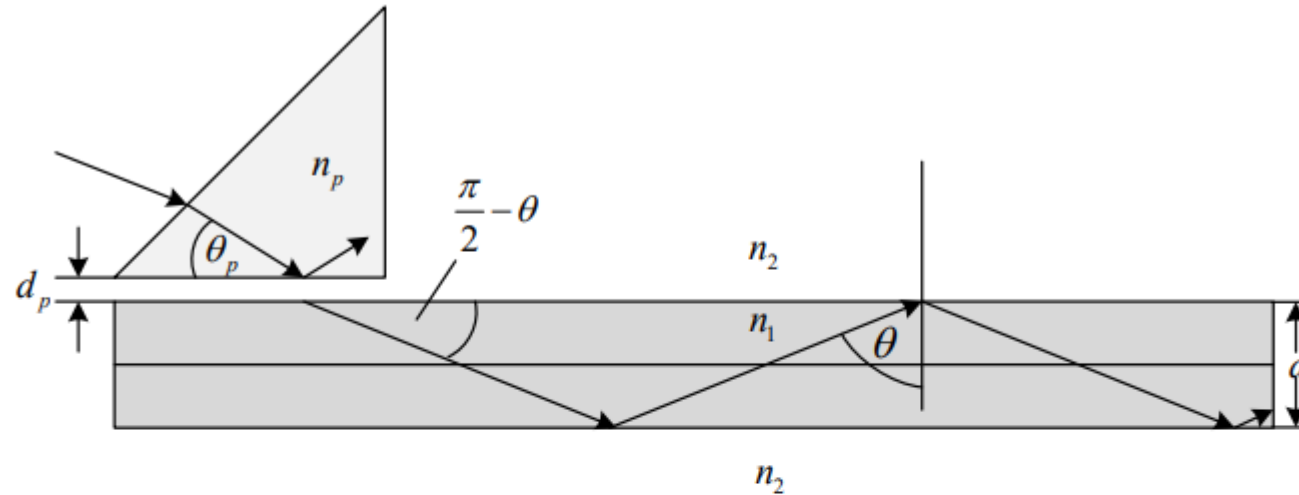


Abbildung 3

- c) Erklären Sie, wie Licht in den dielektrischen Plattenleiter einkoppeln kann, obwohl die einfallende Welle im Prisma Totalreflexion erfährt. Welche Bedingung muss der Abstand d_p erfüllen?
- d) Wie dick muss der Abstand d_p gewählt werden um noch 50 % der Ausgangsamplitude zu übertragen?
- e) Welche Bedingung muss für die Ausbreitungskonstante β_p erfüllt sein, damit sich im Plattenleiter ein konstantes in z -Richtung laufendes Wellenbild ergibt?

Wellenleiter – Evaneszente Felder

- Randbedingungen → Felder dringen auch in Material jenseits der Grenzfläche ein und klingen exponentiell ab (**evaneszente Felder**)
- Konsequenzen:
 - Wirkleistungstransport (Energie) einzig und allein entlang der Grenzfläche. Ansonsten: Verletzung der Energieerhaltung bei Totalreflexion
 - Blindleistungsaustausch senkrecht zur Grenzfläche, da die Felder in diese Richtung (mit)schwingen. Andernfalls: Verletzung der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche (und damit der Maxwellgleichungen)

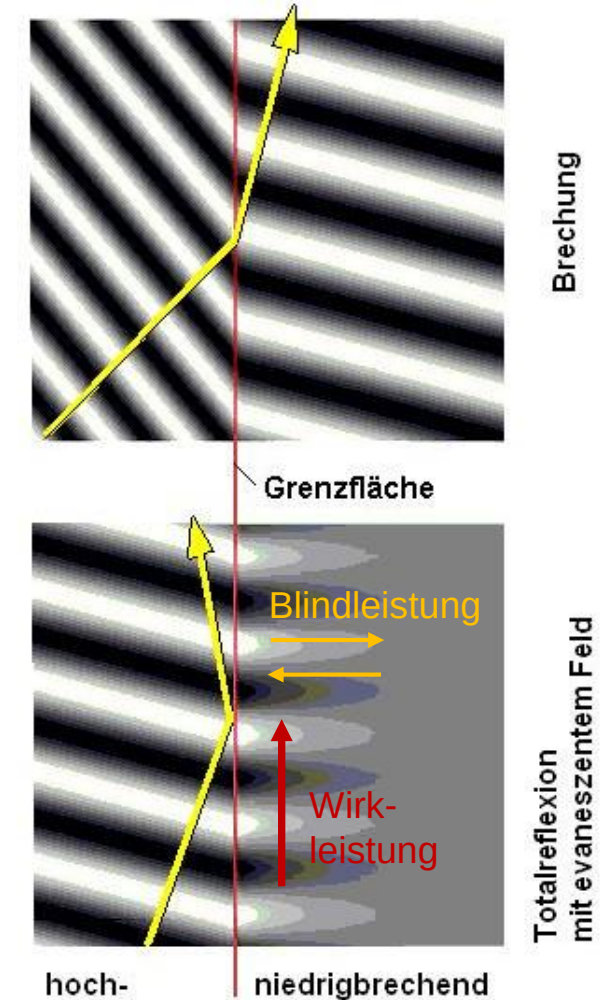


Bild: Wikipedia (Ulfbastel)

Wellenleiter – Evaneszente Felder

- Effekt ähnelt dem Tunneleffekt in der Quantenmechanik.
- Anwendung:
 - Je ähnlicher die verwendeten Dielektrika in Schicht 1, 2 und 3 sind, desto stärker dringt die Mode in das Material hinter der Grenzfläche ein. Für manche Applikationen ist dies vorteilhaft.
 - Beispiel: Kopplung von elektromagnetischen Wellen zwischen zwei Wellenleitern, die nahe genug zusammengebracht werden.
- Folge: evaneszentes Feld enthält Energie...
 - ... jedoch nur im Nahfeld.
 - Kein Energietransport in Bereiche weit weg von der Grenzfläche (Fernfeld)

