

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 11

Abgabe bis zum 31.01.2022 um 12:00 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 12:

Gegeben sei ein dielektrischer Schichtwellenleiter, welcher sich aus drei übereinander geschichteten Dielektrika (Vakuum-Schicht 2-Vakuum) zusammensetzt und die einfachste Form eines dielektrischen Wellenleiters darstellt. Längs dieses Wellenleiters, d.h. in z -Richtung breite sich eine elektromagnetische Welle aus. Die Wellenausbreitung kann anhand von ebenen Wellen anschaulich gemacht werden, die an den Grenzflächen wiederholt vollständig reflektiert werden und somit einem Zick-Zack-Pfad durch den Wellenleiter folgen.

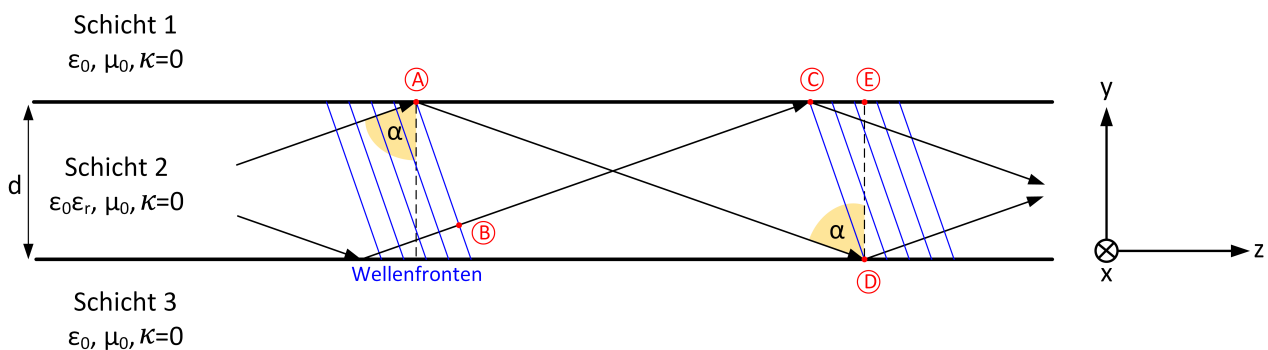


Abbildung 1

- a) Stellen Sie mit Hilfe von Abbildung 1 die Bedingung dafür auf, damit sich ein konstantes in z -Richtung laufendes Wellenbild / Feldmuster ergibt. Stellen Sie dafür zunächst die Bedingung in Abhängigkeit der Weglängen auf und ermitteln Sie anschließend durch geometrische Überlegung wie diese formuliert werden können. Gehen Sie davon aus, dass der in der Abbildung gegebene Winkel α größer als der kritische Winkel der Totalreflexion ist.

Ges: Eine Form der Selbstkonsistenzbedingung, in der nur noch beeinflussbare Größen auftauchen

Geg: Materialparameter, Einfallswinkel α

Damit sich ein festes transversales Feldmuster in z -Richtung in der dielektrischen Plattenleitung ausbreiten kann, muss entlang des Zick-Zack-Pfades die Selbstkonsistenzbedingung erfüllt sein. Das bedeutet an den Grenzflächen reflektierte ebene Wellen müssen sich derart überlagern, dass sich zwischen eben diesen Grenzflächen eine stehende Welle ausbildet. Die Gestalt der stehenden Welle definiert dann das sich ausbreitende Feldmuster. Dieses Muster - eine ausbreitungsfähige Lösung der Wellengleichung - wird auch als Mode bezeichnet. Da sie Eigenfunktionen des Wellenleiters darstellen, wird die Selbstkonsistenzbedingung auch als Eigenwertgleichung des Wellenleiters bezeichnet. Die Gestalt und Anzahl der Moden hängt sowohl von der Geometrie des Wellenleiters (Höhe d), als auch von dessen Material (Brechzahlen bzw. Permittivitäten

der verschiedenen dielektrischen Schichten), der Frequenz der Welle (Wellenzahl im Vakuum k_0) und dem Einfallswinkel (α) ab. Damit ergeben sich insgesamt vier Freiheitsgrade. Diese Abhängigkeit soll im Folgenden hergeleitet werden.

Die Selbstkonsistenz kann auch strahlenoptisch interpretiert werden, wie in der Abbildung der Aufgabendarstellung visualisiert. Liegen zwei Punkte (A) und (B) zu einem beliebigen Zeitpunkt auf einer gemeinsamen Wellenfront (in blau), d.h. sind sie identisch in Phase, so müssen sie auch zu jedem beliebigen späteren Zeitpunkt noch auf einer gemeinsamen Wellenfront liegen, da sich ansonsten die Überlagerung der ebenen Wellen und damit das Feldmuster zwischen den Grenzflächen verändert hätte. Dann läge keine ausbreitungsfähige Lösung der Wellengleichung mehr vor. Die Bedingung ist auch dann zu erfüllen, wenn die beiden Punkte zwischenzeitlich verschiedene Wege zurücklegen und dementsprechend unterschiedliche Veränderungen ihrer Phase erfahren. Anschaulich bedeutet dies, dass auch die Punkte (C) und (D) auf einer gemeinsamen Wellenfront liegen müssen. Folglich darf sich die erfahrene Phasenveränderung entlang der Strecken (A)-(D) und (B)-(C) nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden.

- Entlang des Weges (A)-(D) ergibt sich die Phasenveränderung durch zwei Phasensprünge bei der Reflexion und der auf der Distanz $\overline{AD}$ „angesammelten“ Phasendrehung, welche sich aus dem Produkt mit der Wellenzahl k_2 des Mediums in der zweiten Schicht ergibt. Dass zwei Reflexionen zu berücksichtigen sind, ist daran zu erkennen, dass die in der Abbildungen eingezeichneten Wellenfronten jeweils nach links verkippt sind, und daher in (A) dem Zeitpunkt unmittelbar vor, in (D) dagegen dem Zeitpunkt unmittelbar nach der Reflexion zuzuordnen sind.
- Entlang des Weges (B)-(C) muss nur die Wellenzahl des Mediums mit der Distanz $\overline{BC}$ multipliziert werden, da keine Reflexion stattfindet.
- Das negative Vorzeichen vor den Wellenzahlen ergibt sich aus der Ausbreitung in positive z -Richtung, wie in $\exp(j\omega t - kz)$.

Somit erhalten wir die Gleichung

$$-k_2 \overline{AD} - 2\psi_{s,p} + m2\pi = -k_2 \overline{BC}.$$

In der aktuellen Form der Selbstkonsistenzbedingung sind die Größe $\psi_{s,p}$ und die Weglängen $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ jedoch noch unbekannt. Auf die Herleitung einer Gleichung für den Phasensprung bei der Reflexion $\psi_{s,p}$ soll an dieser Stelle verzichtet werden. Das Vorgehen dazu ist ausführlich im Foliensatz der Vorlesung dargestellt. Die unbekannten Weglängen können jedoch durch geometrische Überlegungen bestimmt werden, die in Abbildung 2 zusammengefasst sind.

- Aus Abbildung 2 (1) entnehmen wir unter Ausnutzung des Reflexionsgesetzes, dass die Distanz $\overline{AD}$ gerade durch den Kosinus ausgedrückt werden kann mit $\overline{AD} = \frac{d}{\cos(\alpha)}$.
- Für die Distanz $\overline{BC}$ gilt nach Abbildung (2) hingegen, dass $\overline{BC} = \sin(\beta) \overline{AC}$. Die Strecke $\overline{AC}$ ist noch unbekannt.
- Wir können die unbekannte Strecke $\overline{AC}$ ausdrücken durch $\overline{AC} = \overline{AE} - \overline{CE}$, wobei $\overline{AE} = \tan(\alpha)d$ gemäß Abbildung (3) und $\overline{CE} = \tan(\gamma)d$ gemäß Abbildung (4). Dort sehen wir auch, dass $\gamma = 90^\circ - \alpha$ gelten muss. Damit folgt: $\overline{BC} = \sin(\beta)d [\tan(\alpha) - \tan(\gamma)]$
- Noch sind die Winkel β und γ unbekannt, doch zeigen die Abbildungen (5) und (6), dass $\delta = \gamma$ und dass sowohl $\delta = 90^\circ - \alpha$ gilt, als auch $\delta = 90^\circ - \beta$. Dies resultiert in $\beta = \alpha$.

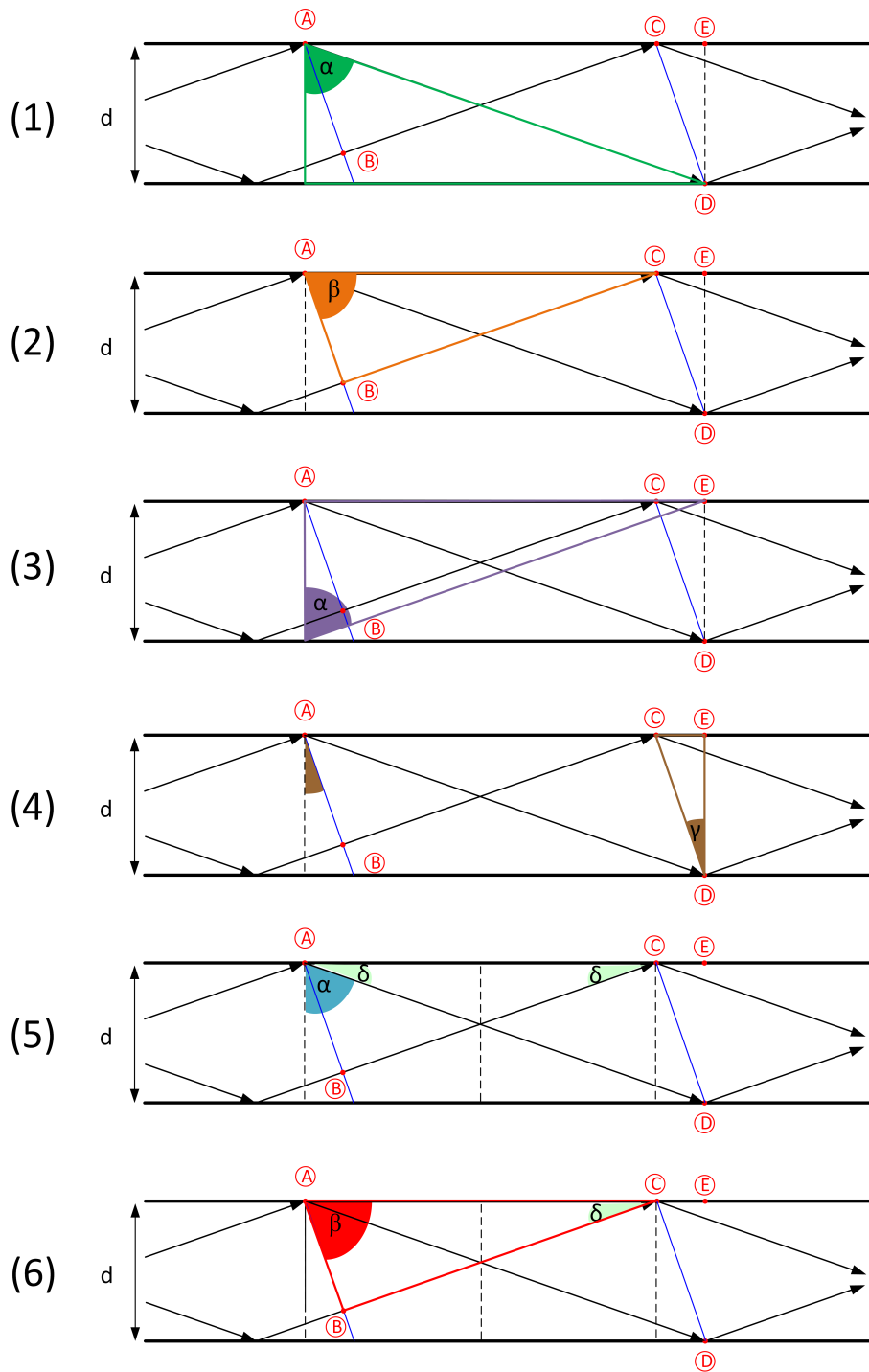


Abbildung 2: Geometrische Überlegungen zur Selbstkonsistenzbedingung

- Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
 \overline{BC} &= \sin(\alpha)d [\tan(\alpha) - \tan(90^\circ - \alpha)] \\
 &= \sin(\alpha)d \left[\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} \right] \\
 &= d \left[\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right] \\
 &= d \left[\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right]
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Weglängen in die Selbstkonsistenzbedingung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & -k_2 \overline{AD} - 2\psi_{s,p} + m2\pi = -k_2 \overline{BC} \\
 \Leftrightarrow & -k_2 \frac{d}{\cos(\alpha)} - 2\psi_{s,p} + m2\pi = -k_2 d \left[\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right] \\
 \Leftrightarrow & -k_2 d \left[\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha) \right] = 2\psi_{s,p} - m2\pi \\
 \Leftrightarrow & -k_2 d \left[\frac{\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} \right] = 2\psi_{s,p} - m2\pi \\
 \Leftrightarrow & dk_2 \cos(\alpha) = m\pi - \psi_{s,p} .
 \end{aligned}$$

Wie zuvor erläutert ergeben sich vier Freiheitsgrade (der Phasensprung bei der Reflexion hängt nur von den Brechzahlen und dem Einfallswinkel ab): die Geometrie des Wellenleiters (Höhe d), dessen Material (Brechzahlen bzw. Permittivitäten der verschiedenen dielektrischen Schichten), die Frequenz der Welle (Wellenzahl im Vakuum k_0) und der Einfallswinkel (α). Sind also Wellenleiter und Frequenz vorgegeben, so ist nur eine diskrete Zahl an Einfallswinkeln erlaubt, nämlich solche, mit denen die Selbstkonsistenzbedingung erfüllt ist.

Aus den Überlegungen in a) wird ersichtlich, dass eine elektromagnetische Welle in der dielektrischen Platte nur dann ausbreitungsfähig ist, wenn sich die einfallenden und reflektierten ebenen Wellen auf ihrem Zick-Zack-Pfad derart überlagern, dass sich eine stehende Welle zwischen den Grenzflächen ausbildet. Das aus der stehenden Welle resultierende konstante Wellenbild / Feldmuster breitet sich in z -Richtung aus und wird auch als Modus (englisch: mode, eingedeutscht: Mode) bezeichnet. Es genügt daher, die transversale Verteilung solcher Moden mit $\underline{E}_{x,m}$ mathematisch zu beschreiben.

- b) Gehen Sie vom Durchflutungsgesetz und Induktionsgesetz aus und zeigen Sie, dass es zwei Modenfamilien (senkrechte und parallele Polarisierung oder in der Literatur auch TE- und TM-Moden) gibt, die sich unabhängig voneinander im Wellenleiter ausbreiten können. Nutzen Sie dazu die Tatsache, dass der Wellenleiter in x -Richtung unendlich ausgedehnt ist.

Ges: Separation der Maxwellgleichungen in zwei unabhängige Sätze von Gleichungen

Geg: Induktionsgesetz und Durchflutungsgesetz

Für ein homogenes, nichtleitendes und raumladungsfreies Medium lauten das Durchflutungsgesetz und Induktionsgesetz in komplexer Zeigerschreibweise

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} \\
 \nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

Aufgrund der unendlichen Ausdehnung der Wellenfronten der einfallenden und reflektierten Wellen in x -Richtung erstreckt sich auch das Wellenbild (die Mode) unendlich weit in dieser Dimension. Damit gilt $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ und es ergeben sich letztlich zwei unabhängige Paare gekoppelter Differentialgleichungen wie schon im Fall ebener Wellen. Das erste Paar enthält die Feldkomponenten $\{E_x, H_y, H_z\}$ und wird aufgrund der rein transversalen elektrischen Feldkomponente als **TE-Polarisation, TE-Welle** oder **H-Welle** bezeichnet. Hingegen setzt sich das zweite aus den Feldkomponenten $\{H_x, E_y, E_z\}$ zusammen und wird aufgrund der rein transversalen magnetischen Feldkomponente als **TM-Polarisation, TM-Welle** oder **E-Welle** bezeichnet.

TE-Polarisation

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}\end{aligned}$$

TM-Polarisation

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}\end{aligned}$$

Eine Welle mit senkrechter Polarisation (TE-Mode) mit dem elektrischen Feld $\underline{E}_x(y)$ breitet sich in z -Richtung aus. Demnach gilt für das elektrische Feld an jedem beliebigen Ort

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = E_x \mathbf{e}_x = \underline{E}_{x,m}(y) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_x.$$

- c) Leiten Sie eine allgemeine Gleichung für das elektrische Feld $\underline{E}_{x,m}(y)$ der TE-Mode her. Wählen Sie dazu als Ausgangspunkt die Wellengleichung, welche die Mode erfüllen muss. Wählen Sie anschließend einen geeigneten Lösungsansatz für jede der drei dielektrischen Schichten und nutzen Sie die Randbedingungen (bzw. Stetigkeitsbedingungen) an den Grenzflächen aus.

Ges: Mathematischer Ausdruck für $\underline{E}_{x,m}(y)$

Geg: Harmonischer Ansatz, allgemeine Wellengleichung

Das elektrische Feld der TE-Welle $\underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \underline{E}_{x,m}(y) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_x = \underline{E}_x \mathbf{e}_x$ muss die Wellengleichung erfüllen. Wir formen die allgemeine Wellengleichung um mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} - \varepsilon_i \mu \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} - \varepsilon_i \mu \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}_{x,m}}{\partial y^2} + \left(\omega^2 \mu \varepsilon_i - k_z^2 \right) \underline{E}_{x,m} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}_{x,m}}{\partial y^2} + \left(k_i^2 - k_z^2 \right) \underline{E}_{x,m} &= 0, \quad (1)\end{aligned}$$

wobei k_i und ε_i die Wellenzahl und Permittivität der i -ten dielektrischen Schicht sind, mit $i \in \{1, 2, 3\}$. Die zweite partielle Ableitung nach der Variable x entfällt aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Wellenleiters und damit auch der Mode in diese Richtung.

Wie immer bei Totalreflexion ist die Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung identisch, $k_z = k_{1,z} = k_{2,z} = k_{3,z}$ (Brechungsgesetz). Aus der Symmetrie der Anordnung (Schicht 1 = Schicht 3) ergibt sich zudem $k_1 = k_3 = k_0$. Im Allgemeinen gilt für die Wellenzahl der zweiten Schicht $|\mathbf{k}_2| = k_2 = \sqrt{k_{2,x}^2 + k_{2,y}^2 + k_{2,z}^2} = \sqrt{k_{2,y}^2 + k_{2,z}^2}$ und entsprechend in der ersten und dritten Schicht $|\mathbf{k}_3| = k_3 = |\mathbf{k}_1| = k_1 = \sqrt{k_{1,x}^2 + k_{1,y}^2 + k_{1,z}^2} = \sqrt{k_{1,y}^2 + k_{1,z}^2}$. Gleichung (1) vereinfacht sich damit zu

$$\frac{\partial^2 E_{x,m}}{\partial y^2} = -k_{i,y}^2 E_{x,m}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Funktion $E_{x,m}$ deren zweifache Ableitung nach der Variablen y ein Vielfaches $-k_{i,y}^2$ der Funktion selbst ist. Somit kommen u.a. Sinusterme, Kosinusterme, Exponentialterme oder Superpositionen solcher in Frage. Als Vorgehen bietet es sich an einen geeigneten Ansatz zu wählen und mit Hilfe der Randbedingungen bzw. Stetigkeitsbedingungen zu prüfen, ob es sich tatsächlich um eine gültige Lösung handelt. Zu berücksichtigen ist jedoch, dass bei einem dielektrischen Wellenleiter die Felder auch in den Bereich jenseits der Grenzflächen eindringen. Aufgrunddessen werden unterschiedliche Lösungsansätze für die drei Schichten benötigt. Jenseits der Grenzflächen (Schichten 1 und 3) muss das elektrische Feld aufgrund der Totalreflexion exponentiell mit y abklingen (evaneszente Felder), wohingegen zwischen den beiden Grenzflächen (Schicht 2) eine stehende Welle entstehen muss, damit sich die Welle ausbreiten kann.

Lösungsansatz:

$$E_{x,m}(y) = \begin{cases} B \exp\left(k_B \left(y + \frac{d}{2}\right)\right), & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos(k_A y - \psi), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ C \exp\left(k_C \left(y - \frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Wir definieren das Koordinatensystem so, dass sich die Höhe d des Wellenleiters gleichmäßig auf den positiven und negativen y -Bereich verteilt. Da das Feldstärkemaximum der ersten Mode in diesem Fall bei $y = 0$ liegt, bietet sich ein Kosinus als harmonische Funktion an. Die Phasendrehung durch Reflexion wird durch die Variable ψ berücksichtigt. Zur Bestimmung der Unbekannten k_A, k_B, k_C setzen wir die Lösungsansätze zunächst einzeln in die Wellengleichung ein.

Bestimmen von k_A, k_B, k_C :

Fall 1: $-\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, k_i = k_2$

$$\begin{aligned} -Ak_A^2 \cos(k_A y - \psi) + (k_2^2 - k_z^2) A \cos(k_A y - \psi) &= 0 \Leftrightarrow \\ k_A^2 &= k_2^2 - k_z^2 = k_{2,y}^2 \end{aligned}$$

Da die Wellenzahl $k_{2,y}$ rein reell ist, treten in diesem Fall keine Komplikationen auf. In Fall 2 und 3 ergibt sich jedoch eine Besonderheit.

- Der kritische Winkel der Totalreflexion ergibt sich aus dem Brechungsgesetz $k_2 \sin(\alpha) = k_1 \sin(\alpha_t)$ für einen Transmissionswinkel $\alpha_t = 90^\circ$ mit $k_2 \sin(\alpha_{\text{krit}}) = k_1$. Da die Sinusfunktion für wachsende Winkel $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ größer wird, gilt für Winkel $\alpha > \alpha_{\text{krit}}$ demnach, dass $k_2 \sin(\alpha) > k_1$ und $\sin(\alpha_t) > 1$. Es gibt keinen reellen Winkel α_t , der diese Gleichung erfüllen kann. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Wellenzahl $k_{1,y}$ rein imaginär wird, wie wir im Folgenden sehen werden.

- Aus der Abbildung in der Aufgabenstellung lässt sich durch trigonometrische Beziehungen erkennen, dass $k_{2,z} = k_2 \sin(\alpha)$.
- Wie bereits zuvor erwähnt, gilt aufgrund des Brechungsgesetzes $k_z = k_{z,1} = k_{z,2} = k_{z,3}$. In Kombination mit der vorherigen Beziehung folgt daraus $k_{2,z} = k_2 \sin(\alpha) = k_{1,z} > k_1$. Im Material jenseits der Grenzfläche (d.h. Schicht 1) ist die Wellenzahl in z -Richtung $k_{1,z}$ also größer als der Betrag der Wellenzahl k_1 insgesamt, siehe Abbildung 3 unten. Daher muss die Wellenzahl in y -Richtung rein imaginär werden. Es gilt $k_{1,y} = \sqrt{k_1^2 - k_{1,z}^2} < 0 \Leftrightarrow k_{1,y} = \pm j k_{1,y}^{(i)}$, wobei der Index (i) den Imaginärteil kennzeichnet. Der Imaginärteil ist also $k_{1,y}^{(i)} = \sqrt{k_z^2 - k_1^2}$.
- Wegen der üblichen Konvention $\underline{k} = k_r - j k_i$ in der Elektrotechnik wählen wir das negative Vorzeichen für den Imaginärteil.
- Aus Symmetriegründen gilt die gleiche Argumentation für Schicht 3.

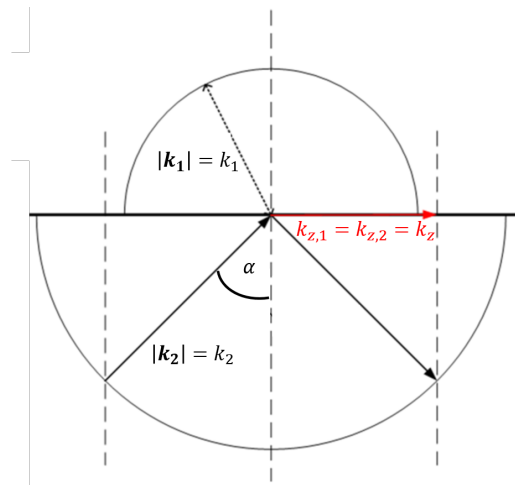


Abbildung 3: Wellenzahlen bei der Totalreflexion

Fall 2: $y < -\frac{d}{2}$, $k_i = k_1$

$$B k_B^2 \exp\left(k_B \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) + (k_1^2 - k_z^2) B \exp\left(k_B \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_B = \sqrt{k_z^2 - k_1^2} = k_{1,y}^{(i)}$$

Fall 3: $y > d$, $k_i = k_3 = k_1$

$$C k_C^2 \exp\left(k_C \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) + (k_1^2 - k_z^2) C \exp\left(k_C \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_C = \sqrt{k_z^2 - k_3^2} = k_{3,y}^{(i)} = k_{1,y}^{(i)}$$

Fortsetzung Hauptrechnung:

Als Zwischenlösung erhalten wir somit

$$E_{x,m}(y) = \begin{cases} B \exp\left(+j k_{1,y} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right), & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos(k_{2,y} y - \psi), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ C \exp\left(-j k_{1,y} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Prüfen der Stetigkeitsbedingungen:

Die weiteren Unbekannten A, B, C bestimmen wir mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen. $E_{x,m}$ ist eine Tangentialkomponente bzgl. der Grenzfläche und muss damit am Grenzübergang stetig sein. Daraus folgt an der Grenzfläche $y = -d/2$

$$B \exp \left(+jk_{1,y} \left(y + \frac{d}{2} \right) \right) \Big|_{y=-\frac{d}{2}} = A \cos(k_{2,y}y - \psi) \Big|_{y=-\frac{d}{2}}$$

$$\Leftrightarrow B = A \cos \left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right)$$

sowie an der Grenzfläche $y = d/2$

$$C \exp \left(-jk_{1,y} \left(y - \frac{d}{2} \right) \right) \Big|_{y=\frac{d}{2}} = A \cos(k_{2,y}y - \psi) \Big|_{y=\frac{d}{2}}$$

$$\Leftrightarrow C = A \cos \left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right)$$

Daraus folgt abschließend durch Einsetzen in den ursprünglichen Ansatz:

$$E_{x,m}(y) = \begin{cases} A \cos \left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right) \exp \left(+jk_{1,y} \left(y + \frac{d}{2} \right) \right), & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos(k_{2,y}y - \psi), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ A \cos \left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right) \exp \left(-jk_{1,y} \left(y - \frac{d}{2} \right) \right), & y > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Basierend auf unserem Ansatz erfüllt Gleichung (2) nun die Stetigkeitsbedingungen für das tangentielle elektrische Feld. Aus Aufgabenteil b) wissen wir allerdings, dass noch eine tangentielle magnetische Feldkomponente $H_{z,m}$ existiert. Auch diese muss die Stetigkeitsbedingungen erfüllen. Wir erhalten die H-Feldkomponente aus mit Hilfe der Maxwellschen Gleichung $H_{z,m}(y) = -\frac{j}{\mu\omega} \frac{\partial E_{x,m}(y)}{\partial y}$, welche wir zuvor gezeigt haben:

$$H_{z,m}(y) = -\frac{j}{\mu\omega} \begin{cases} A j k_{1,y} \cos \left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right) \exp \left(+jk_{1,y} \left(y + \frac{d}{2} \right) \right), & y < -\frac{d}{2} \\ -A k_{2,y} \sin(k_{2,y}y - \psi), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ -A j k_{1,y} \cos \left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right) \exp \left(-jk_{1,y} \left(y - \frac{d}{2} \right) \right), & y > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Analog zum E-Feld betrachten wir die Stetigkeit an den Grenzflächen. Es folgt an der Grenzfläche $y = -d/2$:

$$j k_{1,y} \cos \left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right) = -k_{2,y} \sin \left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \left(k_{2,y} \frac{d}{2} + \psi \right) = \frac{j k_{1,y}}{k_{2,y}} \quad (3)$$

An der Grenzfläche $y = d/2$ muss gelten:

$$j k_{1,y} \cos \left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right) = k_{2,y} \sin \left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \left(k_{2,y} \frac{d}{2} - \psi \right) = \frac{j k_{1,y}}{k_{2,y}} \quad (4)$$

Schließlich müssen nun Gleichung (3) und (4) auch erfüllt sein, damit unser Ansatz alle Stetigkeitsbedingungen erfüllt. Wir substituieren $k_{2,y} \frac{d}{2} = \xi$ und $jk_{1,y} \frac{d}{2} = \eta$ um die Gleichungen ordentlicher darzustellen und bilden anschließend den Arkustangens. Da der Tangens jedoch eine periodische Funktion ist, kann das Argument des Tangens verschiedene Lösungen haben, welche hier durch den zusätzlich Term $m_1\pi$ bzw. $m_2\pi$ berücksichtigt sind. Es folgt daraus

$$\begin{aligned} \tan(\xi + \psi) &= \frac{\eta}{\xi} & \Leftrightarrow & \xi + \psi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m_1\pi \\ \tan(\xi - \psi) &= \frac{\eta}{\xi} & \Leftrightarrow & \xi - \psi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m_2\pi. \end{aligned}$$

Die Gleichungen dieses Gleichungssystem lassen sich nun ineinander einsetzen um so jeweils ξ und ψ zu eliminieren, bzw. einen Ausdruck für beide Größen zu erhalten. Dazu formt man beide Gleichungen einmal nach ξ um und setzt sie ineinander ein und einmal nach η . Die ganzzahligen Variablen m_1 und m_2 fasst man des Weiteren als $m = m_1 + m_2$ und $m' = m_1 - m_2$ zusammen.

$$\xi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m\frac{\pi}{2} \quad \psi = m'\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

Es gilt zudem $m' = 2m_1 - m$. Da $2m$ stets eine gerade ganzzahlige Zahl ist, folgt hieraus, dass m' ebenso eine gerade Zahl ist, wenn m ebenso gerade ist. Umgekehrt ist m' ungerade, wenn m ungerade ist. Des Weiteren wissen wir, dass ein ψ , welches sich um ein Vielfaches von π unterscheidet, im selben Modenfeld resultiert. Dies ist ersichtlich, wenn wir uns unseren Ansatz, z.B. in Gleichung (2), anschauen. Da die Kosinus-Funktion eine periodische Funktion ist, erhalten wir für ein $\psi = m\frac{\pi}{2}$ mit geradem m , also $m = \{0, 2, 4, \dots\}$ stets denselben Kosinus. Für ein $\psi = m\frac{\pi}{2}$ mit ungeradem m , also $m = \{1, 3, 5, \dots\}$ ist der Kosinus um 90° phasenverschoben und ergibt somit stets denselben Sinus. Es lässt sich schlussfolgern, dass für ein gegebenes gerades m , alle m' gerade sind und zur selben Mode gehören und umgekehrt für ungerades m . Die Gleichungen in (5) lassen sich somit mit nur einem gemeinsamen m formulieren

$$\xi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m\frac{\pi}{2} \quad \psi = m\frac{\pi}{2}$$

Die Gleichung mit dem ξ und η beinhalten die transversalen Wellenzahlen und somit die oben genannten Wellenleiterparameter. Diese Gleichung stellt die Eigenwertgleichung dar und kann numerisch gelöst werden, um je nach Parameter die Moden, welche sich in dem Wellenleiter ausbilden, zu bestimmen (siehe Vorlesung). Mit dem Ausdruck für die Phasendrehung lässt sich nun unser Ansatz vervollständigen:

$$\underline{E}_{x,m}(y) = \begin{cases} A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - m\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(+jk_{1,y} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right), & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} y - m\frac{\pi}{2}\right), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - m\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-jk_{1,y} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

- d) Skizzieren Sie über der y -Achse das elektrische Feld $\underline{E}_{x,m}(y)$ der ersten drei TE-Moden, die sich im Wellenleiter ausbreiten können. Welcher wesentliche Unterschied besteht gegenüber der in der 15. Aufgabe diskutierten Parallelplattenleitung mit ideal leitfähigen Platten?

Ges: Skizze der ersten drei Moden

Geg: Ergebnis aus Aufgabe c)

Im dielektrischen Wellenleiter dringen die Felder in den Bereich jenseits der Grenzfläche ein anstatt dort vollständig zu verschwinden. Anders als bei der Parallelplattenleitung mit ideal leitfähigen Platten ist die Mode hier also nicht mehr identisch zur stehenden Welle, sondern diese ist nur einer von drei Bestandteilen, da zusätzlich zwei evaneszente Felder zur Beschreibung der Mode notwendig sind.

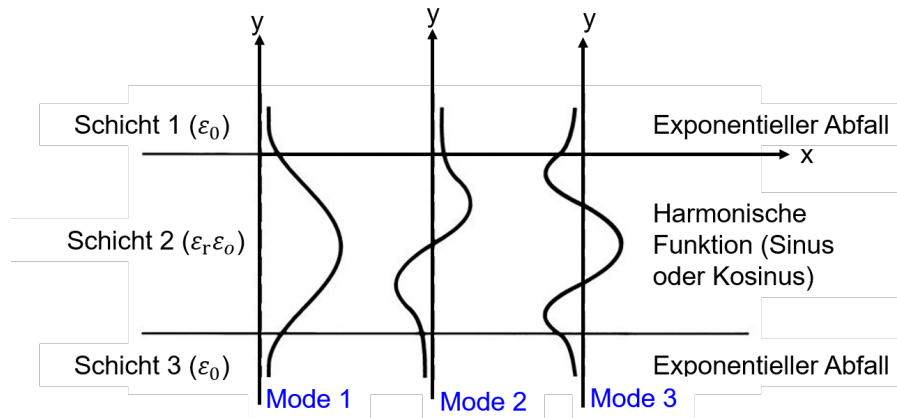


Abbildung 4: TE-Moden der dielektrischen Platte

- e) Berechnen Sie die zugehörigen magnetischen Felder $\underline{H}_{y,m}(y)$ und $\underline{H}_{z,m}(y)$ der TE-Moden. Es ist eine allgemeine, für alle TE-Moden gültige Darstellung gesucht.

Ges: Mathematische Ausdrücke für die magnetischen Felder

Geg: Ergebnis aus Aufgabe c) (Ausdruck für die elektrischen Felder), Maxwellgleichungen

Die magnetischen Feldkomponente $\underline{H}_{y,m}(y)$ und $\underline{H}_{z,m}(y)$ der TE-Mode ergeben sich aus der in c) bestimmten elektrischen Feldkomponente $\underline{E}_{x,m}(y)$ mit den in b) aus den Maxwellgleichungen gewonnen Beziehungen.

Komponente $\underline{H}_{y,m}(y)$

$$\begin{aligned}
 -\mu \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} \\
 \Leftrightarrow \underline{H}_y &= \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} \\
 \Leftrightarrow \underline{H}_y &= \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_{x,m}(y) e^{j(\omega t - k_z z)}}{\partial z} \\
 \Leftrightarrow \underline{H}_y &= \frac{j}{\omega \mu} (-j k_z) \underline{E}_x \\
 \Leftrightarrow \underline{H}_{y,m}(y) &= \frac{k_z}{\omega \mu} \begin{cases} A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(+j k_{1,y} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right), & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} y - m \frac{\pi}{2}\right), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-j k_{1,y} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Komponente $\underline{H}_{z,m}(y)$

$$\begin{aligned}
 & -\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \\
 \Leftrightarrow & \quad \underline{H}_z = -\frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \\
 \Leftrightarrow & \quad \underline{H}_{z,m}(y) = -\frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_{x,m}(y)}{\partial y} \\
 \Leftrightarrow & \quad \underline{H}_{z,m}(y) = -\frac{j}{\omega \mu} \begin{cases} j k_{1,y} A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(+j k_{1,y} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right), & y < -\frac{d}{2} \\ -k_{2,y} A \sin\left(k_{2,y} y - m \frac{\pi}{2}\right), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ -j k_{1,y} A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-j k_{1,y} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 13:

Wir betrachten die Einkopplung von Licht in einen dielektrischen Schichtwellenleiter welcher sich aus drei übereinander geschichteten Dielektrika zusammensetzt. Damit sich in einem solchen Wellenleiter geführte Wellen ausbreiten können, muss der Winkel θ unter welchem das Licht auf die Grenzflächen der Dielektrika trifft, folgende Beziehung erfüllen (siehe vorherige Aufgabe)

$$\cos \theta = \frac{m \pi - \psi_{s,p}}{k_1 d}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

wobei $\varphi_{s,p}$ den Phasensprung für senkrechte / parallele Polarisierung im Zuge der Reflexion darstellt. Im Folgenden werde das Licht an der linken, seitlichen Kante in den Schichtwellenleiter eingekoppelt (siehe Abbildung 5).

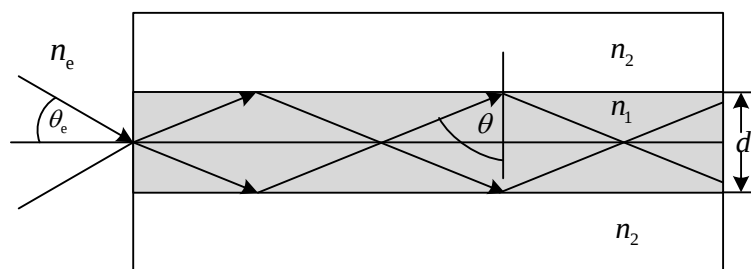


Abbildung 5

- a) Welche Bedingung an den Einfallswinkel θ_e an der Grenzfläche muss erfüllt sein, damit sich im Plattenleiter ein konstantes, in z -Richtung laufendes Wellenbild/Feldmuster ausbildet?

Licht, welches von links auf die seitliche Grenzfläche fällt wird nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochen. Es gilt also

$$k_e \sin \theta_e = k_1 \sin \theta_1.$$

Folglich tritt das Licht unter einem Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ auf die Grenzflächen der beiden Dielektrika (Winkel gegenüber der Flächennormale). Damit das Licht im Wellenleiter geführt werden kann, muss eben dieser Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ größer als der kritische Winkel θ_c sein, andernfalls würde keine Totalreflexion auftreten. Es gilt somit

$$\pi/2 - \theta_1 \geq \theta_c,$$

weshalb wir für den den Einfallswinkel die folgende Beziehung erhalten

$$\begin{aligned} \theta_1 &\leq \frac{\pi}{2} - \theta_c \\ \sin \theta_1 &\leq \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_c \right) \\ \frac{k_e}{k_1} \sin \theta_e &\leq \cos \theta_c \\ \theta_e &\leq \arcsin \left(\frac{k_1}{k_e} \cos \theta_c \right), \end{aligned}$$

wobei wir die (abschnittsweise) Monotonie des Sinus und des Arkussinus im Intervall $[0, \pi]$ ausgenutzt haben. Die Bedingung der Totalreflexion allein genügt allerdings noch nicht um eine ausbreitungsfähige Mode anzuregen. Auch die Selbstkonsistenzbedingung, welche wir in der vorherigen Aufgabe hergeleitet haben, muss erfüllt sein. Diese Bedingung liefert alle Winkel θ_m , welche zu Totalreflexion an der Grenzschicht führen (es gilt $\theta_m \geq \theta_c$) und zudem die Selbstkonsistenzbedingung erfüllen. Einfügen der Bedingung ergibt schließlich

$$\theta_e \leq \arcsin \left(\frac{k_1}{k_e} \frac{m\pi - \psi_{s,p}}{k_1 d} \right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

- b) Wir betrachten nun Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 0.87 \mu\text{m}$ das in den Schichtwellenleiter der Dicke $d = 2 \mu\text{m}$ eingekoppelt wird. Die für den Schichtwellenleiter verwendeten Dielektrika weisen die Brechungsindizes $n_1 = 1.6$ bzw. $n_2 = 1.4$ auf. Ermitteln Sie den für die Ausbreitung im Wellenleiter kritischen Winkel θ_c , den maximalen Winkel θ_e unter dem Licht aus der Luft ($n_e = 1$) eingekoppelt werden kann und die numerische Apertur (NA) des Wellenleiters.

Hinweis: In Luft gilt $NA \approx \sin \theta_e$.

Zunächst bestimmen wir den kritischen Winkel θ_c an der Grenzfläche zwischen den beiden Dielektrika des Plattenleiters:

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \approx 61.04^\circ \text{ (bzw. } 1.065 \text{ rad)}$$

In Aufgabenteil a) haben wir bereits den Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel an der Grenzfläche und dem kritischen Winkel hergeleitet. Es ergibt sich somit für den Einfallswinkel mit $n_e = 1$ und dem Zusammenhang $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$\begin{aligned} \theta_e &\leq \arcsin \left(\frac{k_1}{k_e} \cos \theta_c \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{n_1}{n_e} \cos \left(\arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \right) \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{n_1}{n_e} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} \right) \\ &= \arcsin \left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right) \\ \theta_e &\lesssim 50.77^\circ \text{ (bzw. } 0.886 \text{ rad)} \end{aligned}$$

Die numerische Apertur des Wellenleiters beträgt dabei

$$NA = \sin \theta_e = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx 0.775$$

Eine weitere Möglichkeit zur Einkopplung in dielektrische Schichtwellenleiter ist in Abbildung 6 dargestellt und basiert auf der Verwendung eines Prismas. Hier wird die einfallende Welle zunächst an dem Prisma mit Brechungsindex n_p gebrochen, bevor sie anschließend unter einem Winkel $\theta_p < \theta_c$ auf die Grenzfläche zwischen Prisma und Material 2 trifft. Die einfallende und reflektierte Welle bilden eine sich im Prisma in z -Richtung ausbreitende Welle mit $\beta_p = n_p k_0 \cos \theta_p$.

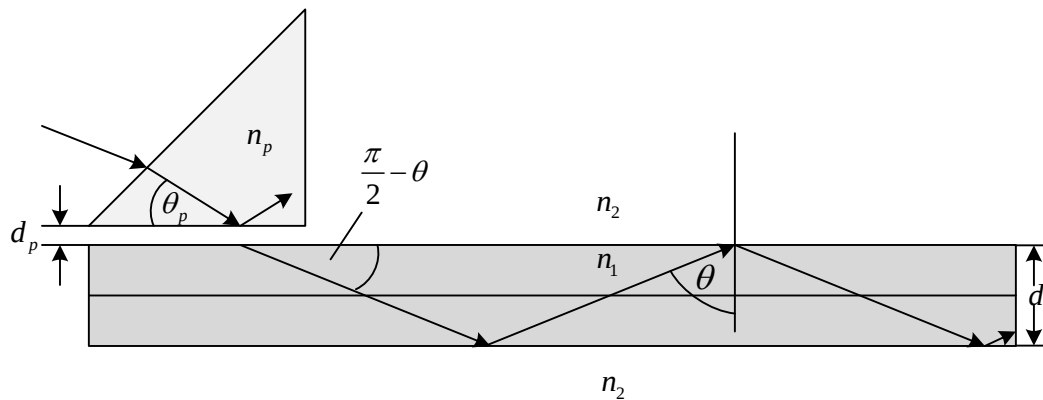


Abbildung 6

- c) Erklären Sie, wie Licht in den dielektrischen Plattenleiter einkoppeln kann, obwohl die einfallende Welle im Prisma Totalreflexion erfährt. Welche Bedingung muss der Abstand d_p erfüllen?

Im Falle von Totalreflexion weist die Welle aufgrund der Stetigkeitsbedingungen einen transmittierten Anteil mit exponentiell abfallender Amplitude auf. Teilen wir die auftretenden Wellenvektoren in ihren longitudinalen Anteil $k_z = \beta$ und transversalen Anteil $k_\perp$ auf, so erhalten im Spalt der Breite d_p

$$k_{\perp,2}^2 = k_2^2 - \beta_2^2$$

wobei aufgrund der Stetigkeitsbedingungen $\beta_2 = \beta_p$ gelten muss. Einsetzen liefert dann

$$k_{\perp,2}^2 = k_2^2 - \beta_p^2 = k_2^2 - k_p^2 \cos^2 \theta_p = k_2^2 \left(1 - \frac{k_p^2}{k_2^2} \cos^2 \theta_p \right).$$

Im Falle von Totalreflexion an der Grenzfläche ist der Winkel θ_p hinreichend klein, sodass mit $n_p > n_2$ die Beziehung $\cos \theta_2 \geq 1$ (in der Vorlesung finden Sie $\sin \theta_2 \geq 1$. Wir erhalten hier einen Kosinus statt einem Sinus, da wir hier den Winkel zur Grenzfläche und nicht zur Grenzflächennormalen betrachten. Es gilt daher $\sin(\pi/2 - \theta_2) = \cos(\theta_2)$.) erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned} k_p \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_p\right) &= k_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) \\ k_p \cos \theta_p &= k_2 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_2 &= \frac{k_p}{k_2} \cos \theta_p \geq 1. \end{aligned}$$

Folglich ist $k_{\perp,2}^2 \leq 0$ und somit

$$k_{\perp,2} = -j \sqrt{k_p^2 \cos^2 \theta_p - k_2^2} = -j \sqrt{\beta_p^2 - k_2^2}.$$

Wählen wir nun für das elektrische Feld im Spalt den Ansatz

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})),$$

erhalten wir mit $\mathbf{r} = y \mathbf{e}_\perp + z \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{k}_2 = k_\perp \mathbf{e}_\perp + \beta_p \mathbf{e}_z$ (wir wählen ein Koordinatensystem mit

der y -Achse in transversaler Richtung und der z -Achse in Ausbreitungsrichtung)

$$\begin{aligned}\underline{E}_2(\rho, z, t) &= \underline{E}_{2,0} \exp\left(j\left(\omega t - \left(\beta_p z - j\sqrt{\beta_p^2 - k_2^2} y\right)\right)\right) \\ &= \underline{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \beta_p z)) \exp\left(-\underbrace{\sqrt{\beta_p^2 - k_2^2} y}_{=: \alpha \geq 0}\right)\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass neben $n_p > n_2$ auch $n_1 > n_2$ erfüllt ist, wird das exponentiell abklingende Feld reflexionsfrei in die Schicht mit $n = n_1$ eingekoppelt. Der eindringende Feldanteil fällt dabei gemäß $\exp(-\alpha y)$ wobei y die Länge des Bereichs angibt, indem sich aufgrund der Totalreflexion keine Welle ausbreitet. Dementsprechend muss der Abstand d_p ausreichend klein gewählt werden, um einen signifikanten Anteil $\exp(-\alpha d_p)$ der Ausgangsamplitude im Prisma in das Dielektrikum mit $n = n_1$ einkoppeln zu können.

- d) Wie dick muss der Abstand d_p gewählt werden um noch 50 % der Ausgangsamplitude zu übertragen?

Um 50 % der Ausgangsamplitude in den Wellenleiter einkoppeln zu können muss gelten, dass

$$\begin{aligned}\underline{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \beta_p z)) \exp(-\alpha d_p) &= 0.5 \underline{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \beta_p z)) \\ \exp(-\alpha d_p) &= 0.5 \\ d_p &= \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{\ln 2}{\sqrt{k_p^2 \cos^2 \theta_p - k_2^2}} = \frac{\ln 2}{k_0 \sqrt{n_p^2 \cos^2 \theta_p - n_2^2}}\end{aligned}$$

- e) Welche Bedingung muss für die Ausbreitungskonstante β_p erfüllt sein, damit sich im Plattenleiter ein konstantes in z -Richtung laufendes Wellenbild ergibt?

Um tatsächlich eine effiziente Einkopplung zu erreichen, muss die Welle eine Mode im Plattenleiter anregen. Dazu müssen die Ausbreitungskonstanten im Prisma und Plattenleiter möglichst exakt übereinstimmen, d.h.

$$\begin{aligned}\beta_p &\approx \beta_m \\ k_p \cos \theta_p &\approx k_1 \sin \theta_m = k_1 \sin(\arccos(\cos \theta_m)) = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_m} = \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi - \psi_{s,p}}{d}\right)^2}\end{aligned}$$

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu