

EMW Übungsblatt 12

Abgabe bis zum 07.02.2022 um 12:00 via ILIAS

Linear polarisierte Moden in der Stufenindexfaser

Wir betrachten im Folgenden eine Stufenindexfaser, deren Kern einen Radius a und eine Brechzahl n_1 aufweise. Die Brechzahl im Mantel sei n_2 wobei $n_2 < n_1$ gelte. Zudem nehmen wir an, dass $\mu = \mu_0$ gelte und alle Medien raumladungsfrei sowie nichtleitend seien. Die Faserachse sei entlang der z -Achse ausgerichtet. Der Querschnitt der Faser ist in Abbildung 1a schematisch dargestellt.

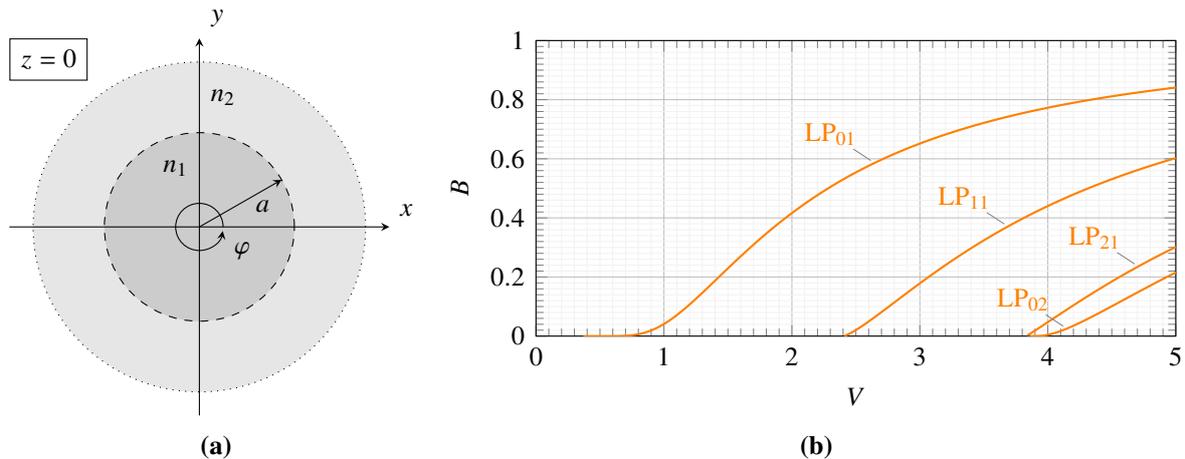


Abbildung 1: (a) Querschnitt der betrachteten Stufenindexfaser. (b) Normierte Ausbreitungskonstanten B der LP-Moden über der normierten Frequenz V .

Bei Stufenindexfasern, wie sie etwa in Unterseekabeln für die Datenübertragung Anwendung finden, sind die Brechzahlen im Kern und Mantel nur minimal verschieden. Dabei liegt die normierte Brechzahldifferenz

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$$

in der Größenordnung von 5×10^{-3} und wir können näherungsweise mit $\frac{n_1}{n_2} \approx 1$ rechnen. Dieses Szenario, in dem $\Delta \ll 1$ gilt, bezeichnen wir als *schwache Führung*. Da die Führung von Wellen in der Stufenindexfaser auf dem Prinzip der Totalreflexion basiert, müssen die Einfallswinkel gegenüber den Grenzflächennormalen dann sehr groß sein und die Wellen breiten sich als quasi-TEM Wellen aus. Dementsprechend muss auch der longitudinale Anteil der Wellenzahl viel größer als der transversale Anteil sein und es gilt $k_z \approx k_1$. Die Lösungen, die wir unter Annahme der schwachen Führung erhalten, bezeichnen wir als *linear polarisierte Moden*.

Möchten wir nun ausgehend von den dominanten transversalen Komponenten eine Lösung der Wellengleichung ermitteln, bietet es sich an, anstelle von Zylinderkoordinaten kartesische Koordinaten zu verwenden. Die Ursache ist, dass die transversalen Komponenten der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten von allen Komponenten der Feldvektoren \underline{E} bzw. \underline{H} abhängen:

$$\Delta \underline{E} + k^2 \underline{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_\rho}{\rho^2} \\ \Delta E_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho^2} \\ \Delta E_z \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Stellen wir nun die Feldvektoren durch die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems dar, so erhalten wir für die Helmholtzgleichung

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \Delta \underline{E}_x \\ \Delta \underline{E}_y \\ \Delta \underline{E}_z \end{pmatrix} + \underline{k}^2 \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

und können ansetzen, dass

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= \underline{E}_x(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) = \underline{E}_{x,0} \underline{\psi}(\rho, \varphi) \exp(-j \underline{k}_z z) \\ \underline{E}_y &= \underline{E}_y(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) = \underline{E}_{y,0} \underline{\psi}(\rho, \varphi) \exp(-j \underline{k}_z z), \end{aligned}$$

wobei \underline{E}_x und \underline{E}_y die skalare Wellengleichung (z.B. in Zylinderkoordinaten) erfüllen müssen. Die verbleibenden Feldkomponenten können wir dann wie gewohnt aus den Maxwell'schen Gleichungen ableiten. Dementsprechend erhalten wir analog zu der Vorlesung folgenden Lösungsansatz

$$\underline{\psi}^{(\ell)}(\rho, \varphi) = \begin{cases} A J_\ell(\beta_t \rho) \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho \leq a \\ B K_\ell(\alpha_t \rho) \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho > a \end{cases}.$$

Analog zu den exakten Lösungen ist auch hier $\underline{\psi}$ für $\ell \neq 0$ zweifach entartet, da wir für $\psi = 90^\circ$ und $\psi = 0^\circ$ zueinander orthogonale Lösungen mit identischer Ausbreitungskonstante erhalten. Aufgrund der Approximation $\frac{n_1}{n_2} \approx 1$ können wir die Stetigkeitsbedingungen des elektrischen Felds an der Kern-Mantel-Grenzfläche in guter Näherung durch die Stetigkeit von $\underline{\psi}$ erfüllen. Wir erhalten also die Bedingung

$$A J_\ell(\beta_t a) \sin(m\varphi + \psi) = B K_\ell(\alpha_t a) \sin(m\varphi + \psi),$$

welche etwa für $\frac{1}{A} = J_\ell(\beta_t a)$ und $\frac{1}{B} = K_\ell(\alpha_t a)$ erfüllt ist. Einsetzen führt schließlich auf

$$\underline{\psi}^{(\ell)}(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{J_\ell(\beta_t \rho)}{J_\ell(\beta_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho \leq a \\ \frac{K_\ell(\alpha_t \rho)}{K_\ell(\alpha_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho > a \end{cases}. \quad (1)$$

Dieser Ausdruck enthält jedoch noch immer die unbestimmte transversale Phasen- bzw. Dämpfungskonstante β_t bzw. α_t (vgl. Vorlesung).

Aufgabe 20:

Wir möchten im Folgenden die Stufenindexfaser aus Abbildung 1a unter der Annahme schwacher Führung näher betrachten. Zu diesem Zweck werden Sie zunächst alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten in Abhängigkeit von \underline{E}_x und \underline{E}_y sowie deren Ableitungen nach x und y ausdrücken. Sie können stets annehmen, dass $\frac{\partial}{\partial z} = -j \underline{k}_z$ gilt.

- a) Verwenden Sie das Gaußsche Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

um die longitudinale Komponente des elektrischen Felds \underline{E}_z zu ermitteln.

Hinweis: Es gilt $\frac{n_1}{n_2} \approx 1$.

- b) Verwenden Sie das Induktionsgesetz und das Ergebnis aus a), um die verbleibenden Komponenten zu erhalten.
- c) Aufgrund der schwachen Führung gilt $\underline{k}_1 \approx \underline{k}_z \gg \underline{k}_t$. Welche Näherungen können Sie infolgedessen treffen?

Hinweis: Für die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ gilt, dass $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \sim \underline{k}_t$.

In der Stufenindexfaser breite sich eine in x -Richtung polarisierte Welle aus. Für das elektrische Feld gelte daher

$$\begin{aligned} \underline{E}_x(\rho, \varphi) &= \underline{E}_{x,0} \underline{\psi}^{(l)}(\rho, \varphi) \exp(-j \underline{k}_z z) \\ \underline{E}_y(\rho, \varphi) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\underline{\psi}$ durch den Ansatz (1) gegeben sei.

- d) Bestimmen Sie mithilfe Ihres Ergebnisses aus Aufgabenteil a) einen Ausdruck für \underline{E}_z .

Hinweis: Sie können dabei die folgenden Beziehungen verwenden:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

- e) Während bei der Herleitung von (1) bereits die transversalen Feldkomponenten als stetig approximiert wurden, muss auch die longitudinale Komponente \underline{E}_z an der Grenzfläche bei $\rho = a$ stetig sein. Zeigen Sie, dass mit $U = \beta_1 a$ und $W = \alpha_1 a$ die folgende Bedingung erfüllt sein muss

$$\frac{U J'_\ell(U)}{J_\ell(U)} = \frac{W K'_\ell(W)}{K_\ell(W)}. \quad (2)$$

- f) Weisen Sie mithilfe der Rekursionsbeziehungen für die Ableitungen der Besselfunktionen aus der Vorlesung nach, dass (2) äquivalent ist zu der Eigenwertgleichung der LP-Moden

$$\frac{J_\ell(U)}{U J_{\ell-1}(U)} = -\frac{K_\ell(W)}{W K_{\ell-1}(W)}. \quad (3)$$

Mit der normierten Frequenz $V = a k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{U^2 + W^2}$ können wir die Eigenwertgleichung (3) für gegebenes V numerisch lösen. Aus den zugehörigen Lösungen U können wir schließlich die Ausbreitungskonstanten aller ausbreitungsfähigen Moden erhalten.

Gegeben sei nun eine Stufenindexfaser mit $n_1 = 1.4485$, $a = 7 \mu\text{m}$ und $\Delta = 3 \times 10^{-3}$, in der sich eine elektromagnetische Welle mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ausbreitet.

- g) Berechnen Sie V und verwenden Sie Abbildung 1b, um die ausbreitungsfähigen Moden zu ermitteln. Welche Ausbreitungskonstanten k_z besitzen die Moden? Lesen Sie hierfür die Werte von B aus der Abbildung 1b ab.

Hinweis: Die LP-Moden mit $\ell \neq 0$ sind zweifach entartet. Es gilt

$$B = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{k_z^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}.$$

Die Fasermodeen zeichnen sich dadurch aus, dass sich ihre transversale Verteilung während der Ausbreitung im idealen Kanal nicht verändert. Zudem sind sie orthogonal zueinander, was sogenanntes Modenmultiplexing für die Kommunikationstechnik attraktiv macht. Bei diesem Verfahren werden die einzelnen Fasermodeen als eigenständige Kommunikationskanäle betrachtet, auf denen unabhängig voneinander Daten übertragen werden.

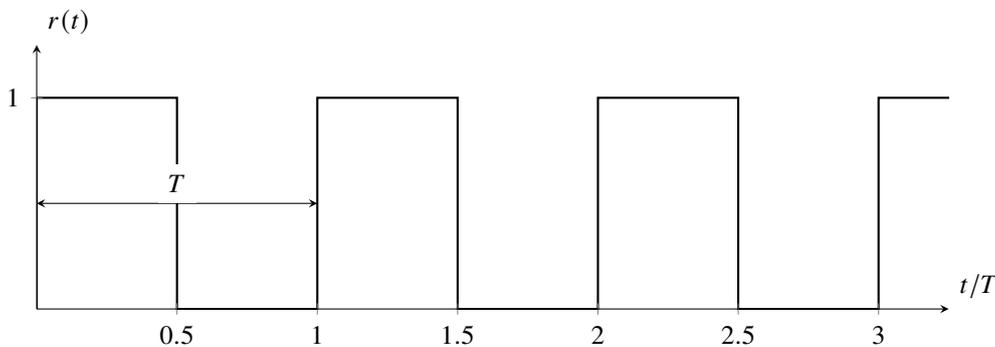


Abbildung 2

- h) Nehmen Sie an, dass auf jeder der ausbreitungsfähigen Fasermodeen das periodische Rechtecksignal $r(t)$ übertragen wird, vgl. Abbildung 2. Welche Aussagen ermöglicht das Ergebnis aus g) über die Signalübertragung und damit das Modenmultiplexing in der betrachteten Stufenindexfaser?

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum, wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu