

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 12

Abgabe bis zum 07.02.2022 um 12:00 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 20:

Wir möchten im Folgenden die Stufenindexfaser aus Abbildung 1a unter der Annahme schwacher Führung näher betrachten. Zu diesem Zweck werden Sie zunächst alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten in Abhängigkeit von $\underline{E}_x$ und $\underline{E}_y$ sowie deren Ableitungen nach x und y ausdrücken. Sie können stets annehmen, dass $\frac{\partial}{\partial z} = -j \underline{k}_z$ gilt.

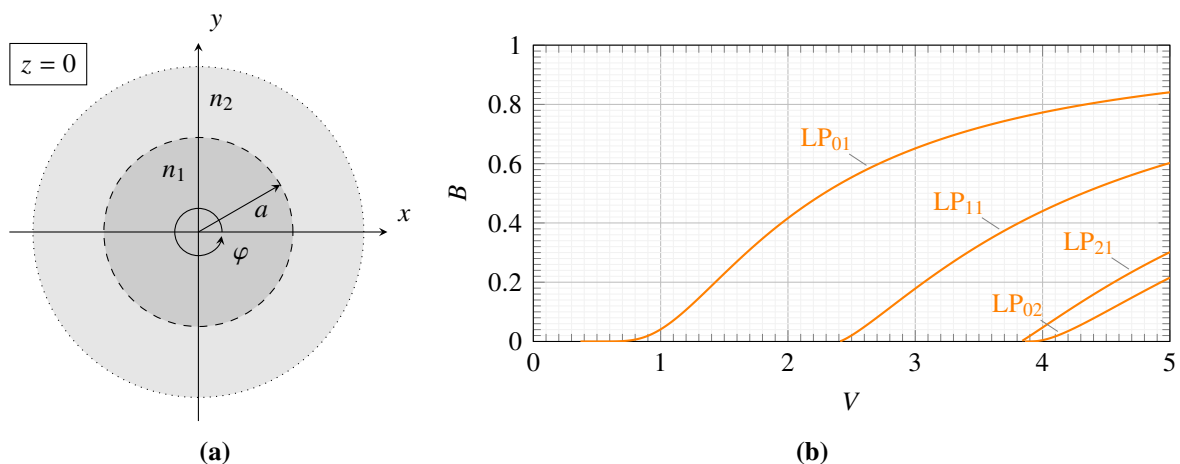


Abbildung 1: (a) Querschnitt der betrachteten Stufenindexfaser. (b) Normierte Ausbreitungskonstanten B der LP-Moden über der normierten Frequenz V .

a) Verwenden Sie das Gaußsche Gesetz

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = 0,$$

um die longitudinale Komponente des elektrischen Felds $\underline{E}_z$ zu ermitteln.

Hinweis: Es gilt $\frac{n_1}{n_2} \approx 1$.

Ges: Longitudinale Komponente des elektrischen Felds $\underline{E}_z$

Geg: Gaußsches Gesetz, $\frac{\partial}{\partial z} = -j \underline{k}_z$, $\frac{n_1}{n_2} \approx 1$

Im ladungsfreien Dielektrikum liefert das Gaußsche Gesetz folgenden Ausdruck

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \nabla \cdot (n^2 \underline{\mathbf{E}}) = 2n \nabla n \cdot \underline{\mathbf{E}} + n \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = n (2 \nabla n \cdot \underline{\mathbf{E}} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}) = 0.$$

Auch wenn die Brechzahlen im Kern und Mantel nicht exakt gleich sind, können wir den Unterschied vernachlässigen, d.h. wir setzen $\nabla n \approx 0$, und erhalten dann in sehr guter Näherung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} &= \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = 0 \\ \Leftrightarrow \underline{E}_z &= -\frac{j}{\underline{k}_z} \left(\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

- b) Verwenden Sie das Induktionsgesetz und das Ergebnis aus a), um die verbleibenden Komponenten zu erhalten.

Ges: Verbleibende Komponenten: $\underline{H}_x, \underline{H}_y, \underline{H}_z$

Geg: Induktionsgesetz, $\underline{E}_z$

Aus dem Induktionsgesetz

$$\nabla \times \underline{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -j \omega \mu_0 \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ \underline{H}_z \end{pmatrix} = -j \omega \mu_0 \underline{H},$$

folgt mit dem Ausdruck für $\underline{E}_z$ aus a), dass

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &= \frac{j}{\omega \mu_0} \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \right) = -\frac{k_z}{\omega \mu_0} \left(\frac{1}{k_z^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x \partial y} + \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial y^2} + \underline{E}_y \right) \\ \underline{H}_y &= \frac{j}{\omega \mu_0} \left(\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right) = \frac{k_z}{\omega \mu_0} \left(\underline{E}_x + \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x \partial y} \right) \\ \underline{H}_z &= \frac{j}{\omega \mu_0} \left(\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

- c) Aufgrund der schwachen Führung gilt $k_1 \approx k_z \gg k_t$. Welche Näherungen können Sie infolgedessen treffen?

Hinweis: Für die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ gilt, dass $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \sim k_t$.

Ges: Näherungen für $\underline{H}_x, \underline{H}_y, \underline{H}_z, \underline{E}_z$ unter Annahme schwacher Führung

Geg: Ausdrücke für Feldkomponenten aus b), $k_1 \approx k_z \gg k_t$

Da $k_z \gg k_t$ gilt und die Ableitungen nach x bzw. y eine Skalierung in der Größenordnung von k_t zur Folge haben, können wir in den Ausdrücken für $\underline{H}_x$ bzw. $\underline{H}_y$ die Ableitungen gegenüber $\underline{E}_y$ bzw. $\underline{E}_x$ vernachlässigen (es gilt schließlich $\frac{k_t^2}{k_z^2} \ll 1$). Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &\approx -\frac{k_z}{\omega \mu_0} \underline{E}_y \\ \underline{H}_y &\approx \frac{k_z}{\omega \mu_0} \underline{E}_x. \end{aligned}$$

Für die longitudinalen E- und H-Feldanteile können wir keine derartigen Näherungen treffen. Diese enthalten ausschließlich partielle Ableitungen von $\underline{E}_x$ und $\underline{E}_y$ und ermöglichen daher nicht das Vernachlässigen einzelner Summanden.

In der Stufenindexfaser breite sich eine in x -Richtung polarisierte Welle aus. Für das elektrische Feld gelte daher

$$\begin{aligned} E_x(\rho, \varphi) &= E_{x,0} \underline{\psi}^{(\ell)}(\rho, \varphi) \exp(-j k_z z) \\ E_y(\rho, \varphi) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\underline{\psi}$ durch den Ansatz

$$\underline{\psi}^{(\ell)}(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{J_\ell(\beta_t \rho)}{J_\ell(\beta_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho \leq a \\ \frac{K_\ell(\alpha_t \rho)}{K_\ell(\alpha_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho > a \end{cases}, \quad (1)$$

gegeben sei.

d) Bestimmen Sie mithilfe Ihres Ergebnisses aus Aufgabenteil a) einen Ausdruck für E_z .

Hinweis: Sie können dabei die folgenden Beziehungen verwenden:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Ges: Ausdruck für E_z

Geg: $E_x, E_y = 0$, Darstellung der Ableitungen nach x bzw. y in Zylinderkoordinaten

Mit $E_y = 0$ und den Darstellungen für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{j}{k_z} \frac{\partial E_x}{\partial x} \\ &= -\frac{j}{k_z} \left(\cos \varphi \frac{\partial E_x}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial \varphi} \right) \\ &= -\frac{j}{k_z} E_{x,0} \exp(-j k_z z) \left(\cos \varphi \frac{\partial \underline{\psi}^{(\ell)}}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \underline{\psi}^{(\ell)}}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\partial \underline{\psi}^{(\ell)}}{\partial \rho} = \begin{cases} \beta_t \frac{J'_\ell(\beta_t \rho)}{J_\ell(\beta_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho \leq a \\ \alpha_t \frac{K'_\ell(\alpha_t \rho)}{K_\ell(\alpha_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) & \rho > a \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial \underline{\psi}^{(\ell)}}{\partial \varphi} = \begin{cases} \ell \frac{J_\ell(\beta_t \rho)}{J_\ell(\beta_t a)} \cos(\ell \varphi + \psi) & \rho \leq a \\ \ell \frac{K_\ell(\alpha_t \rho)}{K_\ell(\alpha_t a)} \cos(\ell \varphi + \psi) & \rho > a \end{cases}$$

erhalten wir den folgenden Ausdruck für E_z

$$E_z = -\frac{j}{k_z} E_{x,0} \exp(-j k_z z) \begin{cases} \beta_t \frac{J'_\ell(\beta_t \rho)}{J_\ell(\beta_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) \cos \varphi - \ell \frac{J_\ell(\beta_t \rho)}{J_\ell(\beta_t a)} \cos(\ell \varphi + \psi) \frac{\sin \varphi}{\rho} & \rho \leq a \\ \alpha_t \frac{K'_\ell(\alpha_t \rho)}{K_\ell(\alpha_t a)} \sin(\ell \varphi + \psi) \cos \varphi - \ell \frac{K_\ell(\alpha_t \rho)}{K_\ell(\alpha_t a)} \cos(\ell \varphi + \psi) \frac{\sin \varphi}{\rho} & \rho > a \end{cases}.$$

- e) Während bei der Herleitung von (1) bereits die transversalen Feldkomponenten als stetig approximiert wurden, muss auch die longitudinale Komponenten $\underline{E}_z$ an der Grenzfläche bei $\rho = a$ stetig sein. Zeigen Sie, dass mit $U = \beta_t a$ und $W = \alpha_t a$ die folgende Bedingung erfüllt sein muss

$$\frac{U J'_\ell(U)}{J_\ell(U)} = \frac{W K'_\ell(W)}{K_\ell(W)}. \quad (2)$$

Ges: Nachweis von (2)

Geg: Stetigkeit von $\underline{E}_z$ bei $\rho = a$, $U = \beta_t a$, $W = \alpha_t a$

Fordern wir die Stetigkeit von $\underline{E}_z$ in $\rho = a$, erhalten wir folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \beta_t \frac{J'_\ell(\beta_t a)}{J_\ell(\beta_t a)} \sin(\ell\varphi + \psi) \cos\varphi - \ell \frac{J_\ell(\beta_t a)}{J_\ell(\beta_t a)} \cos(\ell\varphi + \psi) \frac{\sin\varphi}{a} \\ = \alpha_t \frac{K'_\ell(\alpha_t a)}{K_\ell(\alpha_t a)} \sin(\ell\varphi + \psi) \cos\varphi - \ell \frac{K_\ell(\alpha_t a)}{K_\ell(\alpha_t a)} \cos(\ell\varphi + \psi) \frac{\sin\varphi}{a}, \end{aligned}$$

welche wir direkt vereinfachen zu

$$\beta_t \frac{J'_\ell(\beta_t a)}{J_\ell(\beta_t a)} \sin(\ell\varphi + \psi) \cos\varphi = \alpha_t \frac{K'_\ell(\alpha_t a)}{K_\ell(\alpha_t a)} \sin(\ell\varphi + \psi) \cos\varphi.$$

Die Stetigkeit muss für alle Werte von φ erfüllt sein, weshalb

$$\beta_t \frac{J'_\ell(\beta_t a)}{J_\ell(\beta_t a)} = \alpha_t \frac{K'_\ell(\alpha_t a)}{K_\ell(\alpha_t a)},$$

gelten muss. Multiplizieren wir nun beide Seiten mit a können wir die Variablen U und W einführen, um den gesuchten Ausdruck zu erhalten

$$\frac{U J'_\ell(U)}{J_\ell(U)} = \frac{W K'_\ell(W)}{K_\ell(W)}.$$

- f) Weisen Sie mithilfe der Rekursionsbeziehungen für die Ableitungen der Besselfunktionen aus der Vorlesung nach, dass (2) äquivalent ist zu der Eigenwertgleichung der LP-Moden

$$\frac{J_\ell(U)}{U J_{\ell-1}(U)} = -\frac{K_\ell(W)}{W K_{\ell-1}(W)}. \quad (3)$$

Ges: Nachweis der Äquivalenz von (2) und (3)

Geg: Rekursionsbeziehungen für die Ableitungen der Besselfunktionen

Aus den folgenden Beziehungen aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} \frac{J'_\ell(U)}{U J_\ell(U)} &= \frac{J_{\ell-1}(U)}{U J_\ell(U)} - \frac{\ell}{U^2} \\ \frac{K'_\ell(W)}{W K_\ell(W)} &= -\frac{K_{\ell-1}(W)}{W K_\ell(W)} - \frac{\ell}{W^2} \end{aligned}$$

erhalten wir durch Multiplikation mit U^2 bzw. W^2 die Form aus 2

$$\frac{UJ'_\ell(U)}{J_\ell(U)} = \frac{UJ_{\ell-1}(U)}{J_\ell(U)} - \ell$$

$$\frac{WK'_\ell(W)}{K_\ell(W)} = -\frac{WK_{\ell-1}(W)}{K_\ell(W)} - \ell.$$

Wir zeigen schließlich was zu zeigen war, indem wir diese Beziehungen in (2) einsetzen, vereinfachen und invertieren:

$$\begin{aligned} \frac{UJ'_\ell(U)}{J_\ell(U)} &= \frac{WK'_\ell(W)}{K_\ell(W)} \\ \Leftrightarrow \frac{UJ_{\ell-1}(U)}{J_\ell(U)} - \ell &= -\frac{WK_{\ell-1}(W)}{K_\ell(W)} - \ell \\ \Leftrightarrow \frac{UJ_{\ell-1}(U)}{J_\ell(U)} &= -\frac{WK_{\ell-1}(W)}{K_\ell(W)} \\ \Leftrightarrow \frac{J_\ell(U)}{UJ_{\ell-1}(U)} &= -\frac{K_\ell(W)}{WK_{\ell-1}(W)}. \end{aligned}$$

Mit der normierten Frequenz $V = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{U^2 + W^2}$ können wir die Eigenwertgleichung (3) für gegebenes V numerisch lösen. Aus den zugehörigen Lösungen U können wir schließlich die Ausbreitungskonstanten aller ausbreitungsfähigen Moden erhalten. Gegeben sei nun eine Stufenindexfaser mit $n_1 = 1.4485$, $a = 7 \mu\text{m}$ und $\Delta = 3 \times 10^{-3}$, in der sich eine elektromagnetische Welle mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ausbreitet.

- g) Berechnen Sie V und verwenden Sie Abbildung 1b, um die ausbreitungsfähigen Moden zu ermitteln. Welche Ausbreitungskonstanten $\underline{k}_z$ besitzen die Moden? Lesen Sie hierfür die Werte von B aus der Abbildung 1b ab.

Hinweis: Die LP-Moden mit $\ell \neq 0$ sind zweifach entartet. Es gilt

$$B = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{\underline{k}_z^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}.$$

Ges: V , Anzahl ausbreitungsfähiger Moden sowie deren Ausbreitungskonstanten

Geg: Abbildung 1b

Die normierte Frequenz V können wir direkt berechnen zu

$$V = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = ak_0\sqrt{2n_1^2\Delta} = ak_0n_1\sqrt{2\Delta} \approx 3.184.$$

Aus der Abbildung 1b können wir ablesen, dass sich die LP_{01} -Mode und die *beiden* LP_{11} -Moden in der Stufenindexfaser ausbreiten können. Insgesamt sind also drei Moden ausbreitungsfähig. Ablesen aus 1b liefert für die LP_{01} -Mode $B \approx 0.68$ (numerische Lösung $B = 0.6798$) und für die LP_{11} -Moden $B \approx 0.24$ (numerische Lösung $B = 0.2353$).

Um für gegebenes B das entsprechende $\underline{k}_z$ zu ermitteln, müssen wir den Ausdruck allerdings zunächst umformen

$$\begin{aligned} B &= \frac{\underline{k}_z^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{\underline{k}_z^2 + k_1^2 - k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{\underline{k}_z^2}{k_1^2 - k_2^2} + 1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{\underline{k}_z^2 - k_1^2}{2k_1^2\Delta} + 1 \\ \Leftrightarrow \underline{k}_z^2 &= k_1^2 (2\Delta(B - 1) + 1) \\ \Leftrightarrow \underline{k}_z &= k_1\sqrt{2\Delta(B - 1) + 1}. \end{aligned}$$

Alternativ können wir auch mithilfe von $n_2 = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta}$ ohne die Erweiterung im Zähler des Bruchs nach k_z umstellen.

Dann erhalten wir für die Ausbreitungskonstante der LP_{01} -Mode $k_z \approx 5.866 \times 10^6/\text{m}$ und für die der LP_{11} -Moden $k_z \approx 5.858 \times 10^6/\text{m}$. Berücksichtigen wir nur die angegebenen drei Nachkommastellen, hat das Ablesen aus dem Diagramm 1b keine Auswirkung auf die Ergebnisse. Interessant ist an dieser Stelle jedoch, dass sich die Ausbreitungskonstanten der Moden unterscheiden.

Die Fasermode zeichnen sich dadurch aus, dass sich ihre transversale Verteilung während der Ausbreitung im idealen Kanal nicht verändert. Zudem sind sie orthogonal zueinander, was sogenanntes Modenmultiplexing für die Kommunikationstechnik attraktiv macht. Bei diesem Verfahren werden die einzelnen Fasermode als eigenständige Kommunikationskanäle betrachtet, auf denen unabhängig voneinander Daten übertragen werden.

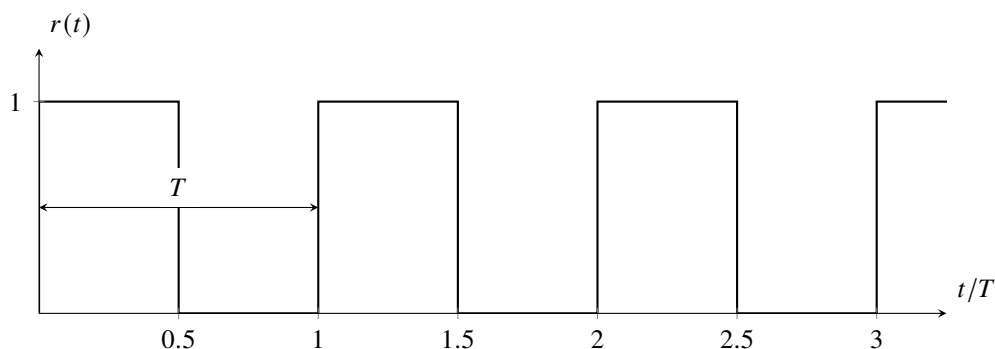


Abbildung 2

- h) Nehmen Sie an, dass auf jeder der ausbreitungsfähigen Fasermode das periodische Rechtecksignal $r(t)$ übertragen wird, vgl. Abbildung 2. Welche Aussagen ermöglicht das Ergebnis aus g) über die Signalübertragung und damit das Modenmultiplexing in der betrachteten Stufenindexfaser?

Ges: Aussagen über Modenmultiplexing in der Stufenindexfaser

Geg: Jede Fasermode weist eine andere Ausbreitungskonstante auf

In Aufgabenteil g) haben wir gesehen, dass sich die Ausbreitungskonstanten der Moden nicht identisch sind. Infolgedessen unterscheidet sich auch die Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z}$ der beiden LP-Moden. Allerdings können wir anhand der Phasengeschwindigkeit *keine Aussagen* über die Energie- bzw. Informationsgeschwindigkeit in der Stufenindexfaser treffen. Zu diesem Zweck müssten wir die Gruppengeschwindigkeiten der beiden Moden miteinander vergleichen. Im Allgemeinen unterscheidet sich jedoch auch die Gruppengeschwindigkeit der LP_{01} -Mode von der der zwei LP_{11} -Moden. Infolgedessen breiten sich die Rechtecksignale mit verschiedener Geschwindigkeit über die Faser aus, weshalb sich die Ankunftszeit der Signale je nach tragender Mode unterscheidet. Je länger dann die verwendete Faser ist, desto ausgeprägter der Effekt. Folglich benötigt das erfolgreiche Modenmultiplexing eine Signalverarbeitung, die u.a. die unterschiedlichen Signallaufzeiten kompensieren kann.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum, wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu