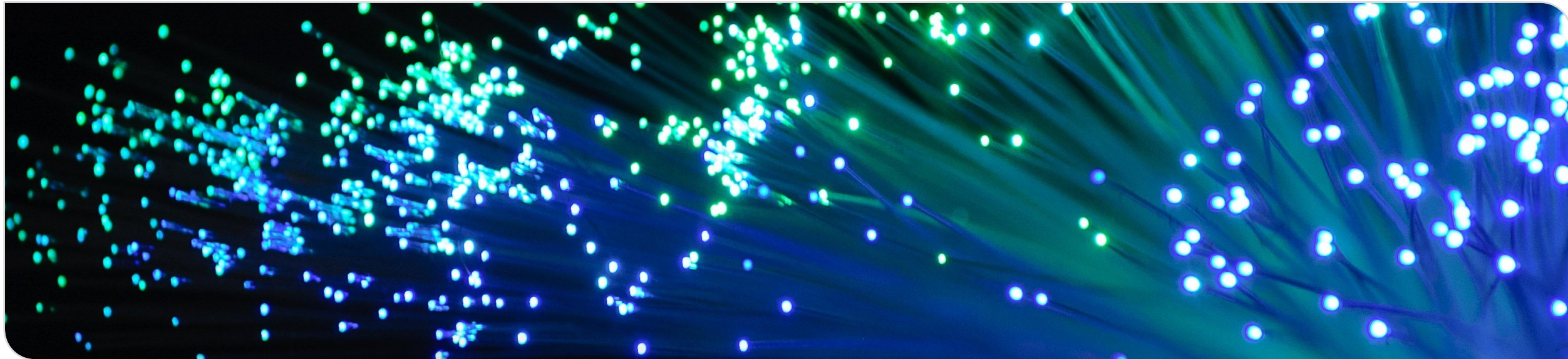


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 0

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Die Übung im Überblick

Allgemeine Informationen

- Unterlagen zu Vorlesung und Übung findet ihr im [ILIAS-Kurs](#)
- Kontaktdaten Übungsleiter:
jonas.krimmer@kit.edu
patrick.matalla@kit.edu

Ziele der Übung

- Veranschaulichung der Vorlesungsinhalte
→ [Verständnis](#)
- Zusammenfassung der Vorlesungsinhalte
→ [Handwerkszeug](#)
- Besprechung der Übungsaufgaben
→ [Üben, üben, üben](#)

Kalender

- Die Benennung der Übungen ergibt sich aus der Nummer des besprochenen Übungsblatts
- An dem letzten Übungstermin wird eine Fragestunde angeboten
- Voraussichtlich: Lerncafé in der vorlesungsfreien Zeit
- → Besprechung der Inhalte von Vorlesung und Übung mit Prof. Randel und den Übungsleitern in entspannter Atmosphäre
- Die Klausur findet am **16. März von 14:30 – 16:30 Uhr** statt

2022			2023		
Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März
1 Sa	1 Di Allerheiligen	1 Do	1 So Neujahr	1 Mi VL13	1 Mi
2 So	2 Mi VL02	2 Fr	2 Mo 1	2 Do	2 Do
3 Mo Tag der Dt. Einheit	3 Do	3 Sa	3 Di	3 Fr	3 Fr
4 Di 40	4 Fr	4 So	4 Mi	4 Sa	4 Sa
5 Mi	5 Sa	5 Mo UE05 49	5 Do	5 So	5 So
6 Do	6 So	6 Di	6 Fr Heilige Drei Könige	6 Mo UE12 8	6 Mo 10
7 Fr	7 Mo UE01 45	7 Mi VL07	7 Sa	7 Di	7 Di
8 Sa	8 Di	8 Do	8 So	8 Mi VL14	8 Mi
9 So	9 Mi VL03	9 Fr	9 Mo UE08 2	9 Do	9 Do
10 Mo 41	10 Do	10 Sa	10 Di	10 Fr	10 Fr
11 Di	11 Fr	11 So	11 Mi VL10	11 Sa	11 Sa
12 Mi	12 Sa	12 Mo UE06 50	12 Do	12 So	12 So
13 Do	13 So	13 Di	13 Fr	13 Mo UE13 7	13 Mo 11
14 Fr	14 Mo UE02 46	14 Mi VL08	14 Sa	14 Di	14 Di
15 Sa	15 Di	15 Do	15 So	15 Mi VL15	15 Mi
16 So	16 Mi VL04	16 Fr	16 Mo UE09 3	16 Do	16 Do Klausur
17 Mo 42	17 Do	17 Sa	17 Di	17 Fr	17 Fr
18 Di	18 Fr	18 So	18 Mi VL11	18 Sa	18 Sa
19 Mi	19 Sa	19 Mo UE07 51	19 Do	19 So	19 So
20 Do	20 So	20 Di	20 Fr	20 Mo Rosenmontag 8	20 Mo 12
21 Fr	21 Mo UE03 47	21 Mi VL09	21 Sa	21 Di	21 Di
22 Sa	22 Di	22 Do	22 So	22 Mi	22 Mi
23 So	23 Mi VL05	23 Fr	23 Mo UE10 4	23 Do	23 Do
24 Mo 43	24 Do	24 Sa Heiligabend	24 Di	24 Fr	24 Fr
25 Di	25 Fr	25 So 1. Weihnachtstag	25 Mi VL12	25 Sa	25 Sa
26 Mi VL01	26 Sa	26 Mo 2. Weihnachtstag	26 Do	26 So	26 So Beginn der Sommerzeit
27 Do	27 So 1. Advent	27 Di 52	27 Fr	27 Mo 9	27 Mo 13
28 Fr	28 Mo UE04 48	28 Mi	28 Sa	28 Di	28 Di
29 Sa	29 Di	29 Do	29 So		29 Mi
30 So Ende der Sommerzeit	30 Mi VL06	30 Fr	30 Mo UE11 5		30 Do
31 Mo UE00		31 Sa Silvester	31 Di		31 Fr

Bonussystem – Allgemeine Informationen (I)

- Lösungen zu den Übungsblättern werden **dreimal** pro Semester **unangekündigt** zu Beginn der Übung **um 11:30 Uhr** eingesammelt
- **Mehr als zwei Drittel** eines Übungsblattes korrekt bearbeitet → **Gutschrift von 2 Punkten** in der schriftlichen Prüfung → Insgesamt können bis zu 6 Punkte gesammelt werden
- Erworbene Punkte werden auch angerechnet, wenn Punktzahl unterhalb der Bestehensgrenze
- Punkte müssen innerhalb eines Semesters erworben
- Pro Person eine handschriftlich angefertigte, individuelle Lösung

Bonussystem – Allgemeine Informationen (II)

- Die gesammelten Punkte verfallen nicht
- Anrechnung aus vergangenen Semester muss durch eine Beitrittsanfrage in den ILIAS-Kurs “[Anrechnung Übungsbonus aus den Vorjahren](#)” beantragt werden
- **Wichtig:** Beginnst du im aktuellen ILIAS-Kurs die Übung “[Abgabe der Übungsblätter](#)”, so verfallen alle bereits gesammelten Bonuspunkte

Bonussystem – Anforderungen

- Einreichung Lösungen via ILIAS als pdf-Datei
- Einzelne Bilddateien o.ä. werden nicht akzeptiert
- Leserliche Aufschriebe!
- Eindeutige Beschriftung Aufgabenblatt mit Namen, Matrikelnummer und Aufgaben-Nr.
- Für jeden Aufgabenteil: klare Auflistung dessen, was gegeben ist (geg.: ...), und einer (mathematischen) Umsetzung dessen, was gesucht ist (ges.: ...)

Bei Missachtung der Richtlinien behalten wir uns vor, deine Einreichung nicht zu akzeptieren!

Literaturhinweis

- Innerhalb des KIT-Netzwerks könnt ihr das Buch im PDF-Format kostenlos herunterladen
- [Springer-Link](#)
- Die für EMW relevanten Inhalte findet ihr in der Regel ab Kapitel 13



Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	TBD	TBD

Skalare und Vektoren

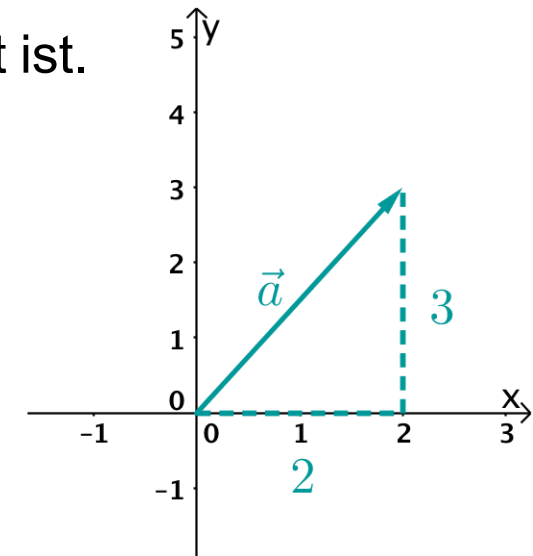
- **Skalar:** Größe, die ausschließlich durch einen Zahlenwert charakterisiert ist.
Beispiel: elektrische Spannung, Temperatur, ...
- **Vektor:** Größe, die durch einen Zahlenwert und eine Richtung charakterisiert ist.
Unterscheidung von Skalar durch Pfeil (handschriftlich) oder Fettdruck
Beispiel: elektrisches Feld, Kraft, ...

Die Position im Spaltenvektor gibt die Richtung der Komponente an

Der Einheitsvektor gibt die Richtung der Komponente an, z.B.
gilt $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

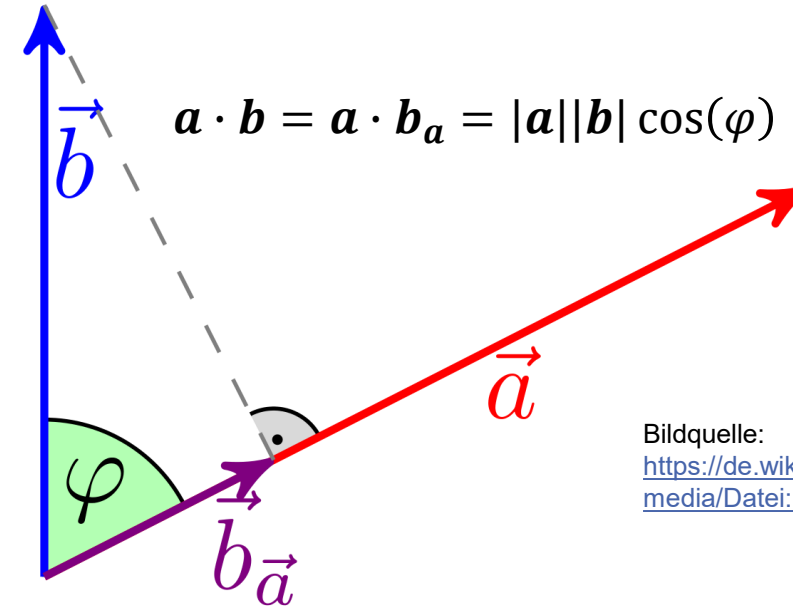
$$\vec{v} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} = v_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + v_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + v_z(x, y, z) \mathbf{e}_z$$

Skalare Komponentenfunktion;
kann i.A. an jedem Punkt im Raum mit den Koordinaten x, y, z einen anderen Wert annehmen



Skalarprodukt

- Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren **einen Skalar** zu
- **Bedeutung:** Es ist ein Maß dafür, wie sehr zwei Vektoren in ihrer Richtung übereinstimmen
- **Anschaung in 2D:** Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit der orthogonalen Projektion $\vec{b}_a$ eines zweiten Vektors $\vec{b}$
- Das Skalarprodukt zueinander orthogonaler bzw. paralleler Vektoren ist 0 bzw. maximal



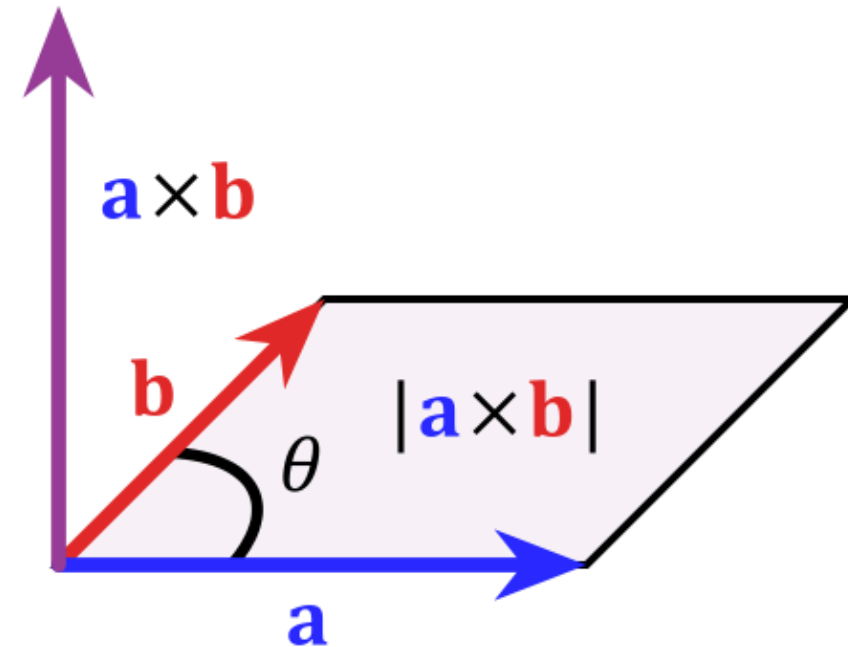
Bildquelle:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Skalarprodukt#/media/Datei:Dot-product-2.svg>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Kreuzprodukt

- Das Kreuzprodukt ordnet zwei Vektoren aus dem dreidimensionalen Raum **einen Vektor** zu
- **Bedeutung:** Ordnet zwei Eingangsvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ einen Vektor zu, der senkrecht zu diesen beiden Eingangsvektoren steht
- Es ergibt sich ein mathematisches Rechtssystem (Rechtsschraube) → „Dreifinger-Regel der rechten Hand“

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

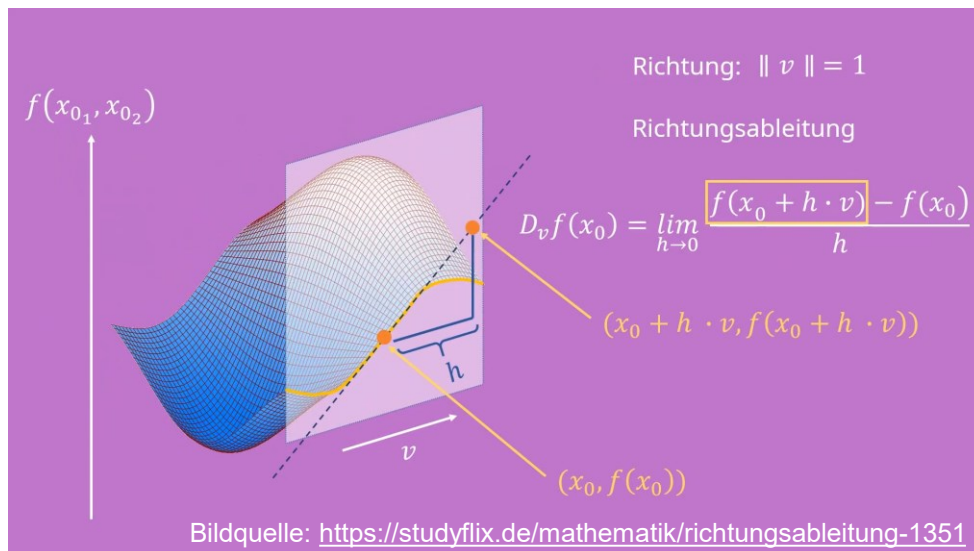


Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Cross_product_parallelogram.svg

Differentialrechnung

- **Richtungsableitung:** Ableitung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion entlang einer beliebigen Richtung, vorgegeben durch einen Vektor $\mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h\mathbf{v}}$$



- **Partielle Ableitung:** Spezialfall der Richtungsableitung, bei dem entlang eines kanonischen Basisvektors des $\mathbb{R}^n$ differenziert wird

- Beispiel: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \text{const}, \text{const})}{\partial x} = 2x + 2yz$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\text{const}, y, \text{const})}{\partial y} = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(\text{const}, \text{const}, z)}{\partial z} = 2z + 2xy$$

Der Nabla-Operator

- Operator, der eine kompakte Notation für die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace erlaubt:

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi$$

Anwendung des
Laplace-Operators auf
Vektorfelder → später

- Die Darstellung des Operators ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

- Der Nabla-Operator kann als Vektor interpretiert werden → wird in der Literatur häufig mit einem Pfeil gekennzeichnet $\nabla = \vec{\nabla}$

Der Nabla-Operator: Rechenregeln

- Es gelten die folgenden Beziehungen für das Rechnen mit dem Nabla-Operator:

Beziehung	Bedeutung oder Anmerkung
$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$	Gradientenfelder sind stets wirbelfrei
$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$	Wirbelfelder sind stets quellenfrei
$\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \phi) + \phi (\nabla \cdot \mathbf{v})$	Vgl. Produktregel
$\nabla \times (\phi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \phi) + \phi (\nabla \times \mathbf{v})$	Vgl. Produktregel
$\Delta \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$	Laplace-Operator für Vektorfelder

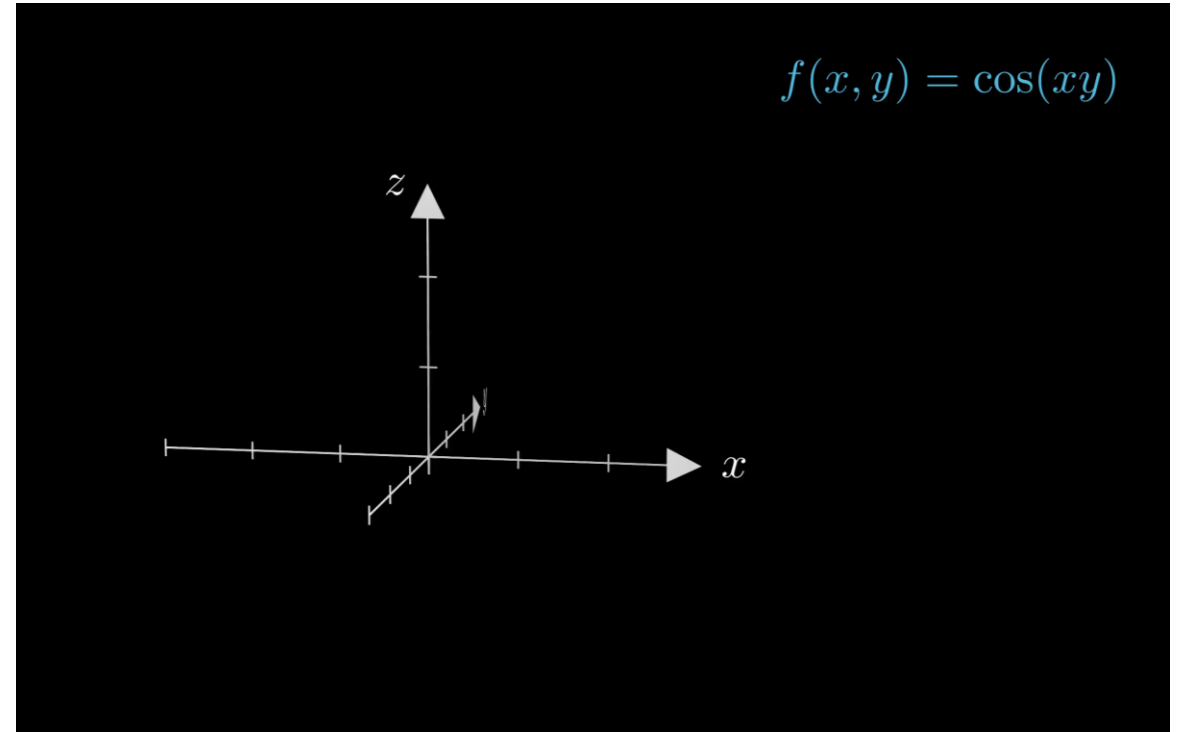
Hinweis: Der Nachweis dieser Rechenregeln ist eine gute Übung...

Skalarfelder und Gradient

- Ein **Skalarfeld** $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Punkt im Raum einen skalaren Wert zu, z.B. ein elektrisches Potential oder eine Temperatur
- **Gradient**: Vektorfeld, das die partiellen Ableitungen als Komponenten enthält
- **Anschaung**: zeigt an jedem Punkt in die Richtung der maximalen Steigung des Skalarfelds

- Beispiel: $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y - 3z$

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z \\ &= 2x\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z\end{aligned}$$



Vektorfelder

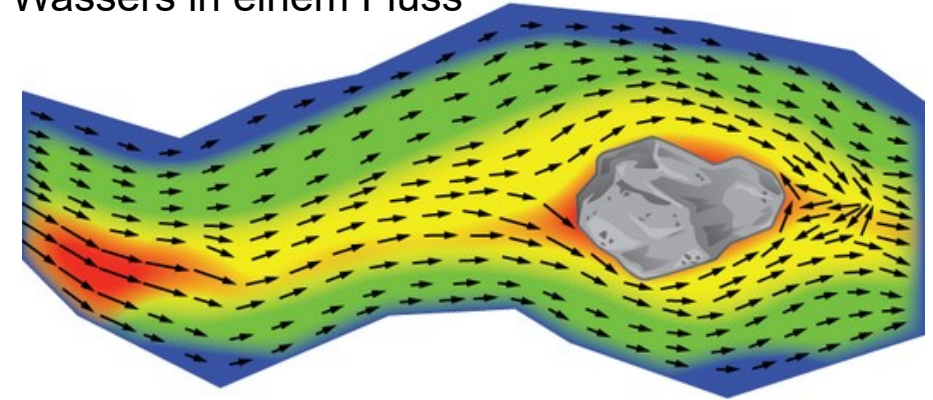
- Ein Vektorfeld $\mathbf{v}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ordnet jedem Punkt im Raum einen Vektor zu, z.B. die elektrische Feldstärke

- Beispiel:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x - 4y + z \\ -2y + 3z \end{pmatrix}$$

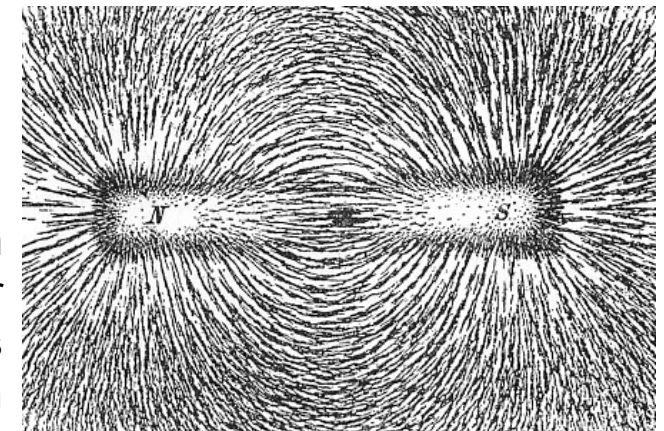
- Feldlinien repräsentieren keine krummen Vektoren, sondern ein Vektorfeld. Die Krümmung der Feldlinien entsteht aus der Hintereinanderzeichnung der Einheitsvektoren.

Fließgeschwindigkeit des Wassers in einem Fluss



Bildquelle: [LibreTexts Mathematics](#)

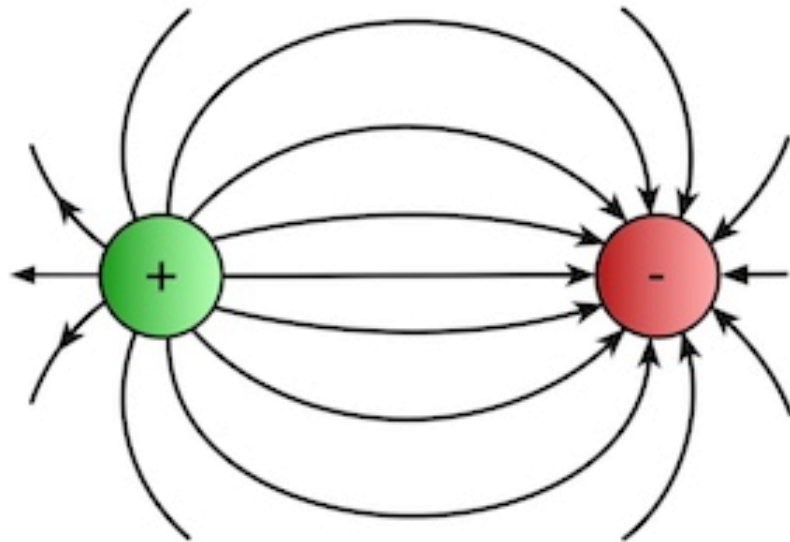
Ausrichtung von Eisenspähen entlang der Magnetfeldlinien eines Permanentmagneten



Bildquelle: [Wikipedia](#)

Quellenfelder und Wirbelfelder

- **Quellenfelder** sind Vektorfelder mit einer Quelle (Anfang) und einer Senke (Ende)
- Bsp.: elektrostatische Felder zweier Punktladungen
- Die **Divergenz** ist Ursache für Quellenfelder



- **Wirbelfelder** sind Vektorfelder mit geschlossenen Feldlinien
- Frei von Quellen & Senken $\rightarrow$ Divergenz = 0
- Bsp.: Magnetfelder / elektrische Wirbelfelder
- Die **Rotation** ist die Ursache für Wirbelfelder



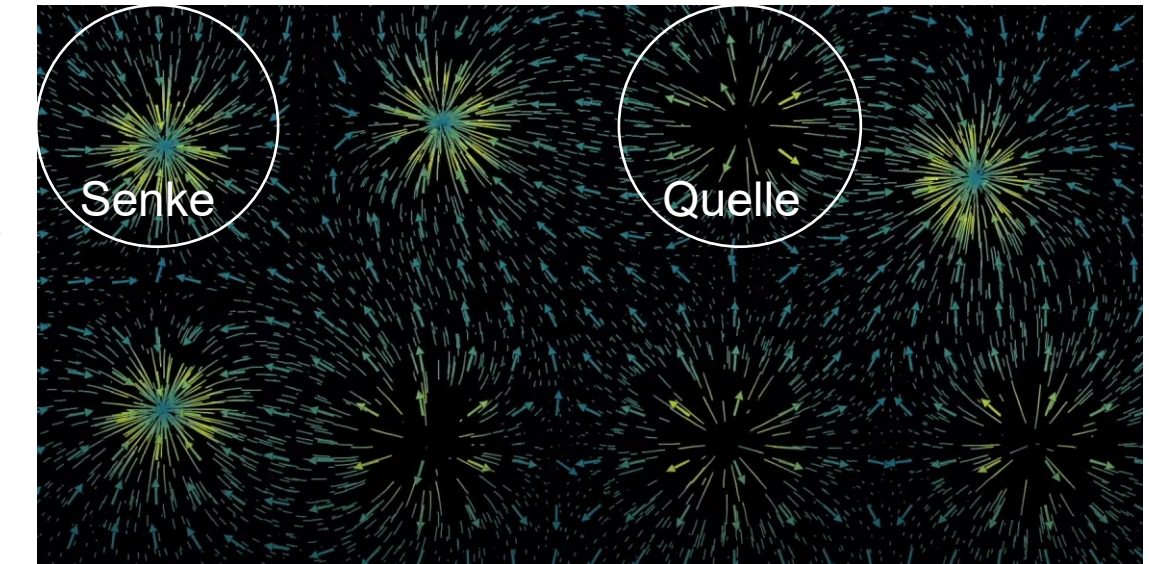
Divergenz eines Vektorfeldes

- Skalarfeld, das sich als Skalarprodukt des Vektorfeldes mit dem Nabla-Operator ergibt
- **Anschauung:** Quellendichte oder Ergiebigkeit des Vektorfeldes, d.h. $\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$ für Quellen und $\nabla \cdot \mathbf{E} < 0$ für Senken

$$\nabla \cdot \mathbf{E} < 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} > 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$



- Jeder Einzelterm misst die Quelldichte der Feldanteile, die durch die zur jeweiligen Richtung senkrecht liegenden Randflächen hindurchtreten.

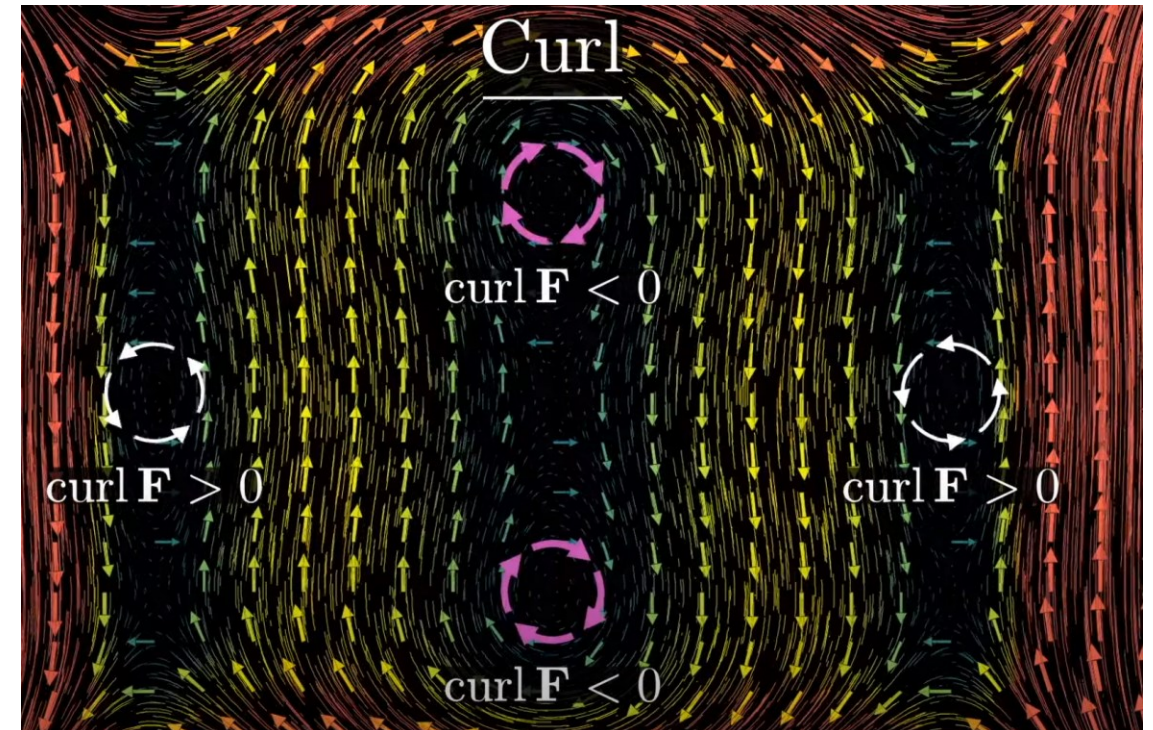


Bildquelle: 3Blue1Brown <https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Rotation eines Vektorfeldes

- Vektorfeld, das sich als Kreuzprodukt des Vektorfeldes mit dem Nabla-Operator ergibt
- Maß für die Wirbelstärke bzw. die Dichte von Wirbelursachen
- **Anschaung** (Wasserströmung):
 - „Würde eine an einem Punkt im Vektorfeld fixierte Münze in Rotation versetzt werden?“ (2D)
 - „Würde ein an einem Punkt im Vektorfeld fixierter Ball in Rotation versetzt werden?“ (3D)



Bildquelle: 3Blue1Brown <https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

Der Laplace-Operator

Skalarfelder:

- Skalarfeld, das die Divergenz des Gradienten enthält
- Anschauung: gibt die „Krümmung“ des Skalarfeldes an

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi \\ &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Vektorfelder:

- Wird der Laplace-Operator auf ein Vektorfeld angewandt, so sind die Ableitungen der Einheitsvektoren zu beachten
- Für ein kartesisches Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ erfolgt die Anwendung komponentenweise unabhängig

$$\Delta\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \Delta v_x \mathbf{e}_x + \Delta v_y \mathbf{e}_y + \Delta v_z \mathbf{e}_z$$

Der Laplace-Operator

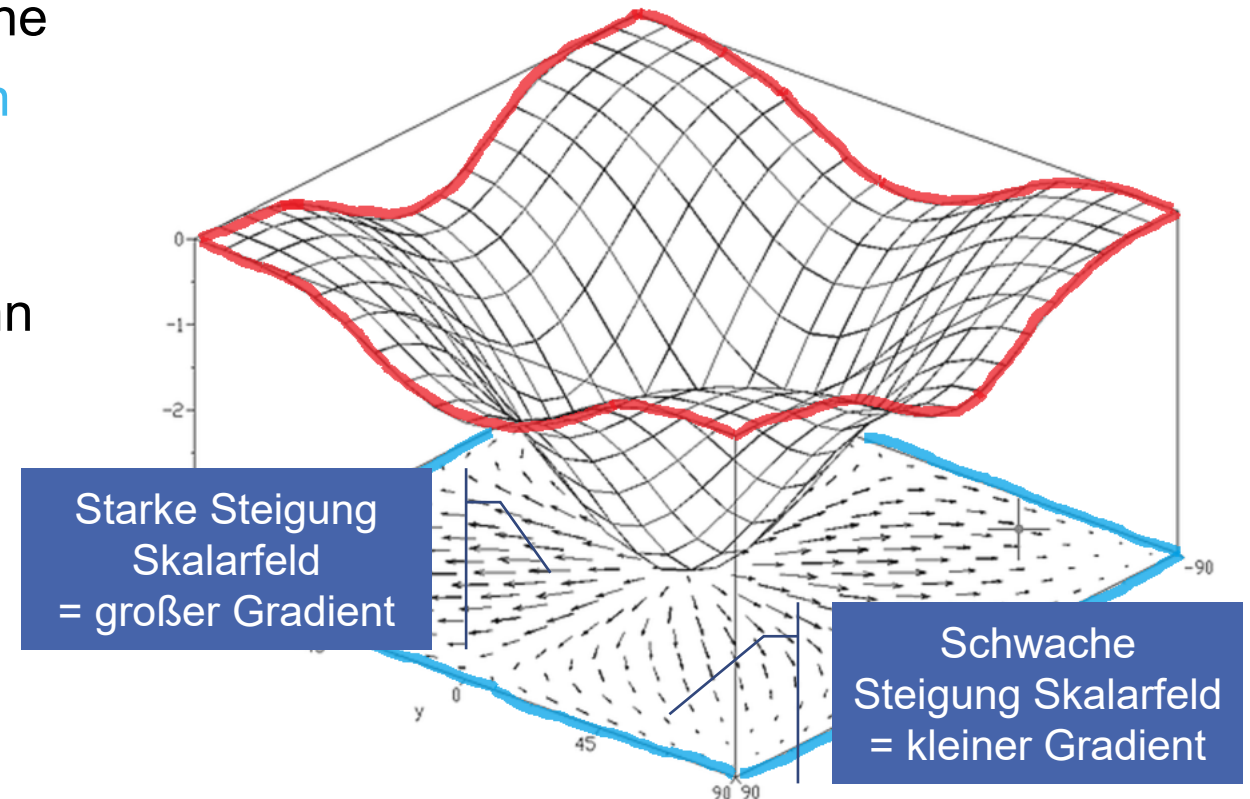


Es gilt nicht zwangsläufig, dass wegen $\Delta\phi < 0$ bzw. $\Delta\phi > 0$ ein Maximum bzw. Minimum vorliegt.

- Gegeben sei ein **Skalarfeld** ϕ (Potentialfeld), z.B. die Temperaturverteilung über einer Fläche
- Über der xy -Ebene tragen wir den **Gradienten** (selbst ein Vektorfeld) dieses Skalarfelds auf
- Der Laplace-Operator gibt die Divergenz des Gradienten an, ist also dann groß (klein), wenn ein Minimum (Maximum) des Skalarfelds vorliegt

Potentialfeld / Skalarfeld	Maximum	Minimum
Gradient	$\nabla\phi = 0$	$\nabla\phi = 0$
Laplace-Operator	$\Delta\phi < 0$	$\Delta\phi > 0$

Hinweis: $\Delta\phi = \text{div}(\text{grad}(\phi)) = \nabla \cdot (\nabla\phi)$



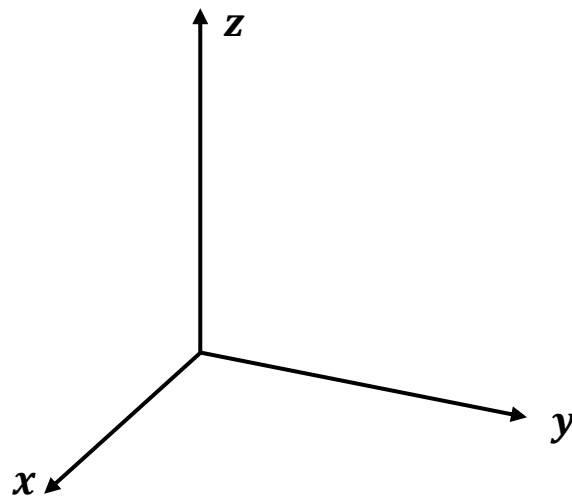
Bildquelle: <https://www.quora.com/What-is-the-physical-meaning-of-the-laplacian-operator/>

Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten

x, y, z

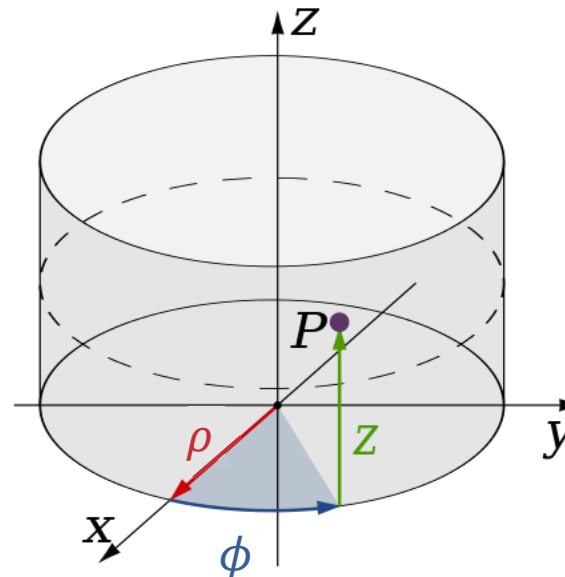
Ausbreitung ebener
Wellen



Zylinderkoordinaten

ρ, ϕ, z

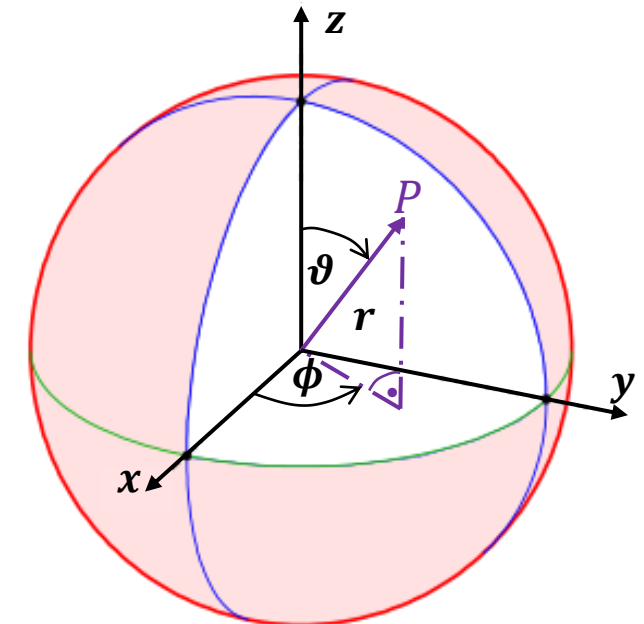
Metalldraht (Antenne)



Kugelkoordinaten

r, ϑ, ϕ

Ausbreitung von
Kugelwellen



Koordinatensystemwechsel

- EMW-Formelsammlung
- Tabelle 1 enthält Vorschriften für den Wechsel zwischen kartesischen Koordinaten sowie Zylinder- und Kugelkoordinaten
- Formelsammlung liegt der Klausur bei
- Verwendet Formelsammlung bereits für die Arbeit an den Übungsblättern → Umgang trainieren

Tabelle 1: Koordinatensysteme

Kartesisch (x, y, z)	Zylinder (ρ, φ, z)	Kugel (r, ϑ, ϕ)
x	$\rho \cos(\varphi)$	$r \sin(\vartheta) \cos(\phi)$
y	$\rho \sin(\varphi)$	$r \sin(\vartheta) \sin(\phi)$
z	z	$r \cos(\vartheta)$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	ρ	$r \sin(\vartheta)$
$\arctan(\frac{y}{x})$	φ	ϕ
z	z	$r \cos(\vartheta)$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\rho^2 + z^2}$	r
$\arctan(\frac{1}{z} \sqrt{x^2 + y^2})$	$\arctan(\frac{\rho}{z})$	ϑ
$\arctan(\frac{y}{x})$	φ	ϕ

Basisvektorwechsel

Tabelle 2: Komponenten eines Vektorfelds

Kartesische Koordinaten $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$	Zylinderkoordinaten $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$	Kugelkoordinaten $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$
A_x	$A_\rho \cos(\varphi) - A_\varphi \sin(\varphi)$	$A_r \sin(\vartheta) \cos(\phi) + A_\vartheta \cos(\vartheta) \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi)$
A_y	$A_\rho \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)$	$A_r \sin(\vartheta) \sin(\phi) + A_\vartheta \cos(\vartheta) \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)$
A_z	A_z	$A_r \cos(\vartheta) - A_\vartheta \sin(\vartheta)$
$A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi)$	A_ρ	$A_r \sin(\vartheta) + A_\vartheta \cos(\vartheta)$
$-A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi)$	A_φ	A_ϕ
A_z	A_z	$A_r \cos(\vartheta) - A_\vartheta \sin(\vartheta)$
$A_x \sin(\vartheta) \cos(\phi) + A_y \sin(\vartheta) \sin(\phi) + A_z \cos(\vartheta)$ $A_x \cos(\vartheta) \cos(\phi) + A_y \cos(\vartheta) \sin(\phi) - A_z \sin(\vartheta)$ $-A_x \sin(\phi) + A_y \cos(\phi)$	$A_\rho \sin(\vartheta) + A_z \cos(\vartheta)$ $A_\rho \cos(\vartheta) - A_z \sin(\vartheta)$ A_φ	A_r A_ϑ A_ϕ

Spalte mit bekannten Feldgrößen

Spalte mit Zielgrößen

Der Nabla-Operator

- Die Darstellung des Operators ∇ ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig
- Auch die folgende Tabelle findet ihr in der Formelsammlung (Tabelle 4: Differentialoperatoren)
- Dort sind auch Divergenz, Rotation und der (skalare) Laplace-Operator in den drei Koordinatensystemen gegeben

Kartesische Koordinaten

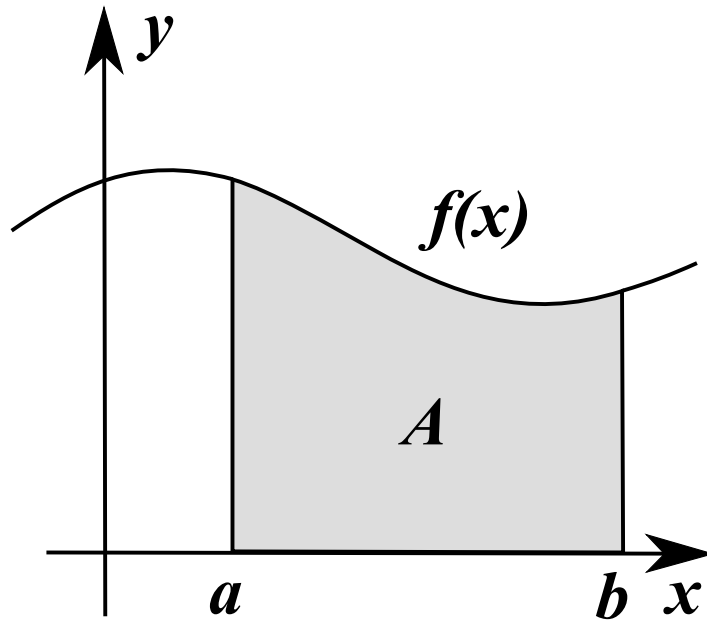
Zylinderkoordinaten

Kugelkoordinaten

∇	$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$
----------	--	---	---

Mehrdimensionale Integralrechnung (I)

- **Integral:** Berechnung der Fläche unter einer Kurve (Approximation als Summe von „Rechtecken“): $\int f(x) dx$

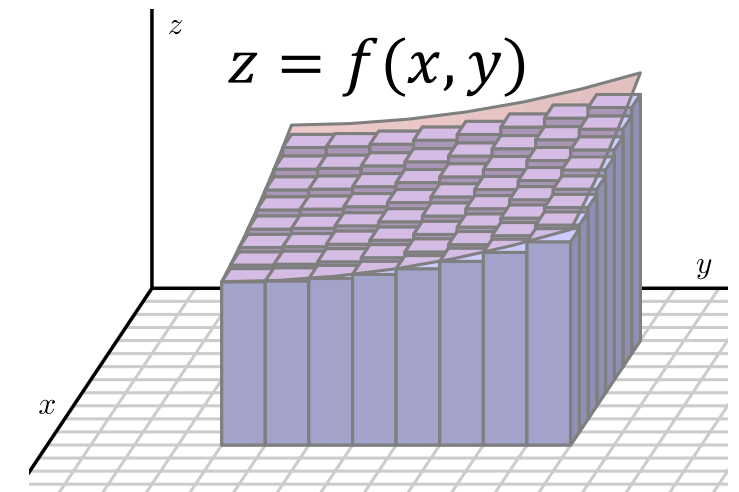


Bildquelle: [4C](#), [CC BY-SA 3.0](#), via Wikimedia Commons

- **Flächenintegral:** Berechnung des Volumens unterhalb einer Oberfläche A (Approximation als Summe von „Säulen“)

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dx dy$$

- Spezialfall $f(x, y) = 1$: Berechnung der auf die Grundebene projizierten Fläche



Bildquelle:
[LibreTexts Mathematics](#)

Mehrdimensionale Integralrechnung (II)

- **Volumenintegral:** Erweiterung auf dreidimensionale Funktionen $f(x, y, z)$, z.B. Integration über die elektrische Ladungsdichte in einem Volumen, um die gesamte Ladung zu erhalten:

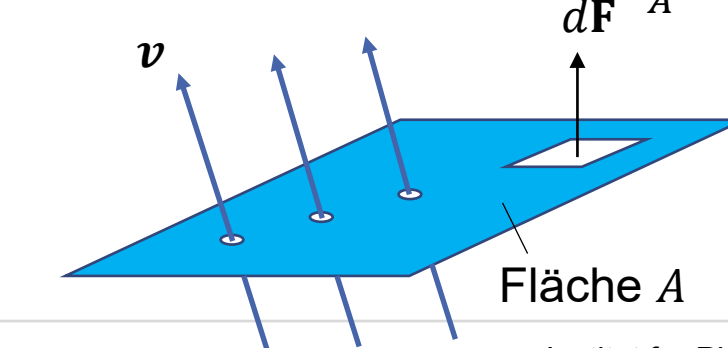
$$\iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_V f(x, y, z) \, dV$$

Integration über eine geschlossene Fläche, z.B. die Oberfläche einer Kugel

- **Oberflächenintegral:** Berechnung der senkrecht durch ein Flächenstück A (Normalenvektor $\mathbf{F}$) hindurchtretenden Komponente eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$

$$\iint \mathbf{v}(x, y) \cdot \mathbf{e}_z \, dx \, dy = \int_A \mathbf{v}(x, y) \cdot d\mathbf{F}$$

$$\oiint \mathbf{v}(x, y) \cdot \mathbf{e}_z \, dx \, dy = \oint_A \mathbf{v}(x, y) \cdot d\mathbf{F}$$

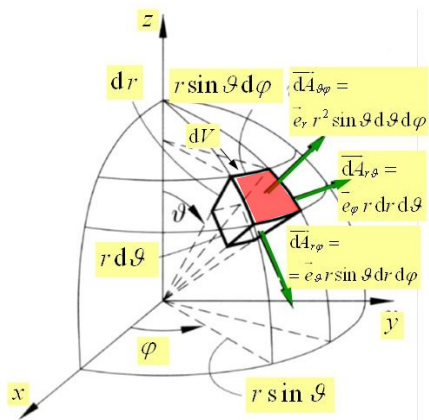


Bildquelle: Vorlesung
"Elektromagnetische Felder",
Prof. Doppelbauer, KIT

Flächenelemente

- Die Formelsammlung gibt die allgemeinste Form des Flächenelements an, z.B. in Kugelkoordinaten $d\mathbf{F} = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi \mathbf{e}_r + r \sin(\vartheta) dr d\phi \mathbf{e}_\phi + r dr d\vartheta \mathbf{e}_\vartheta$
- Skalarprodukt $\rightarrow$ nicht-relevante Terme entfallen, da z.B. $\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r = 1$, aber $\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi = 0$ gilt
- Aus der Anschauung wird jedoch auch schnell klar, warum in den Beispielen nur ein Term des Flächenelements relevant ist

$$d\mathbf{F} = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi \mathbf{e}_r$$

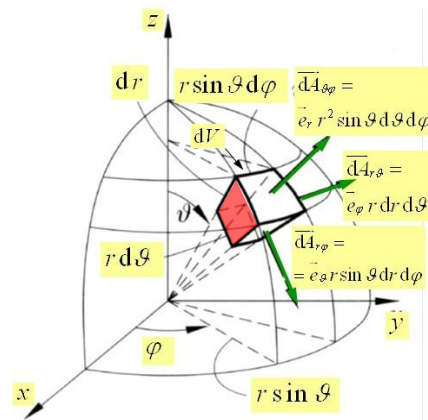


Normalenvektor des Flächenelements zeigt in radiale Richtung

Integration über ϑ, ϕ

Abhängig vom gewählten Radius ergibt sich eine Kugeloberfläche

$$d\mathbf{F} = r dr d\vartheta \mathbf{e}_\phi$$

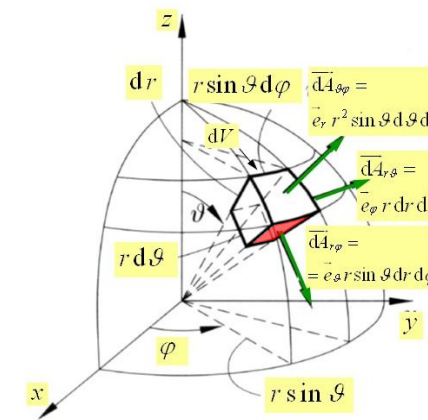


Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung von ϕ

Integration über r, ϑ

Abhängig vom gewählten Winkel ϕ ergibt sich ein halber Kugelquerschnitt (für begrenztes r)

$$d\mathbf{F} = r \sin(\vartheta) dr d\phi \mathbf{e}_\vartheta$$



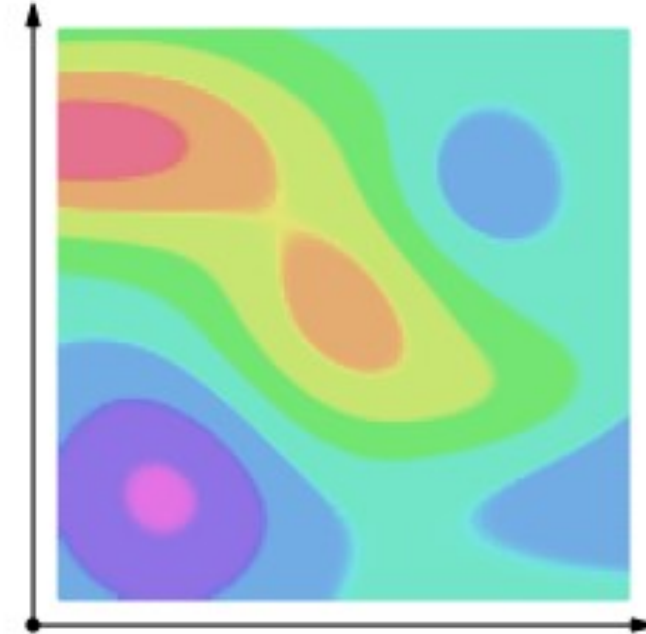
Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung von ϑ

Integration über r, ϕ

Abhängig vom gewählten Winkel ϑ ergibt sich die Kugelgrundfläche oder der Mantel eines Kegels

Mehrdimensionale Integralrechnung (III)

- **Skalares Kurvenintegral:** Berechnung der Fläche unter einer Raumkurve, d.h. der Fläche zwischen der Raumkurve und deren Projektion auf die Grundebene:
$$\int_S f(x, y) \, ds$$
- Für geschlossene Kurven um eine Fläche F
$$\oint_{S=\partial F} f(x, y) \, ds$$
- Spezialfall: $f = 1$: Berechnung der Länge der Raumkurve



Bildquelle: [Lucas Vieira](#), Public domain, via Wikimedia Commons

In EMW meist Integration entlang geschlossener Linien, z.B. entlang eines Kreises oder einer Feldlinie um einen stromdurchflossenen Leiter

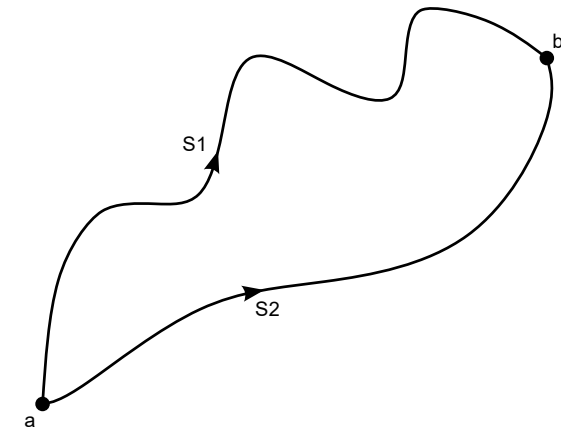
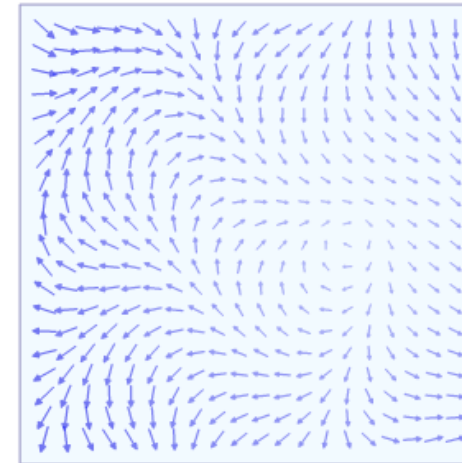
Mehrdimensionale Integralrechnung (IV)

- **Vektoriell**es **Kurvenintegral**: Integration des Beitrags des Vektorfelds $\mathbf{v}$ entlang der Raumkurve:

$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ bzw. für geschlossene Kurven um eine Fläche F $\oint_{S=\partial F} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$

- Zeigt das Vektorfeld stets senkrecht zu der Kurve, ist das Kurvenintegral 0

- **Wegunabhängigkeit**: Ist $\mathbf{v}$ ein Gradientenfeld, ist das Kurvenintegral von einem Punkt a zu einem Punkt b unabhängig von dem Verlauf des Integrationswegs zwischen den Punkten



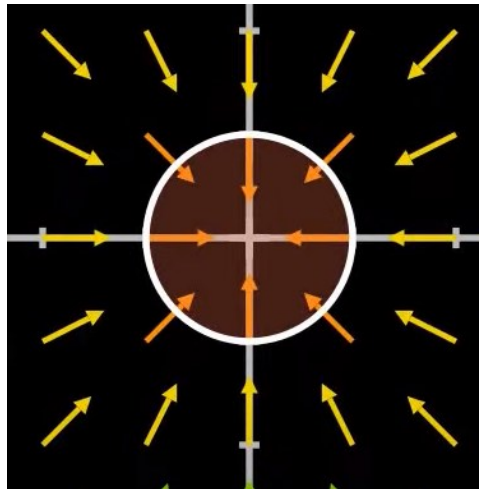
Bildquellen: [Lucas Vieira](#), Public domain, via Wikimedia Commons, [Original: Allen McC.](#) [Vector: Mrmw](#), CC0, via Wikimedia Commons

Integralsätze

Integralsatz von Gauß

- Die Integration über den Fluss durch eine geschlossene Hüllfläche (z.B. eine Kugeloberfläche) und über alle von der Hülle eingeschlossenen Quellen und Senken liefern das gleiche Ergebnis

$$\oint_{\partial V} \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV$$

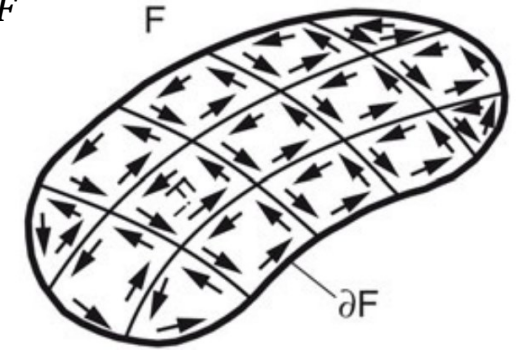


Bildquelle: [The Divergence Theorem, a visual explanation](#)

Integralsatz von Stokes

- Die Zirkulation entlang einer Kurve, die ein Flächenstück umschließt, ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken in dem Flächenstück

$$\oint_{\partial F} \mathbf{v} \, d\mathbf{s} = \int_F \nabla \times \mathbf{v} \, d\mathbf{F}$$



Bildquelle: Burg et al. (2012): Vektoranalysis. Vieweg+Teubner

Größen und Einheiten (I)

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Einheit
Elektrisches Potential	Volt	Φ	V
Elektrische Spannung	Volt	U	V
Elektrischer Strom	Ampere	I	A
Elektrische Stromdichte		J	A/m ²
Elektrischer Widerstand	Ohm	R	$\Omega = \text{V/A}$
Elektrische Ladung	Coulomb	Q	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$
Raumladungsdichte		ρ	$\text{A} \cdot \text{s/m}^3$
Flächenladungsdichte		σ	$\text{A} \cdot \text{s/m}^2$
Elektrische Feldstärke		E	$\text{V/m} = \text{N/C}$
Dielektrische Verschiebungsdichte		D	$\text{A} \cdot \text{s/m}^2$

Größen und Einheiten (II)

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Einheit
Magnetische Flussdichte	Tesla	B	$T = V \cdot s/m^2$
Magnetische Feldstärke		H	A/m
Leistung	Watt	P	W
Arbeit, Energie	Joule	W	$J = W \cdot s$
Energiedichte		w	J/m^3
Frequenz	Hertz	f	1/s
Kreisfrequenz	Hertz	ω	1/s
Wellenlänge		λ	m
Wellenzahl		k	1/m
Leistung	Watt	P	W

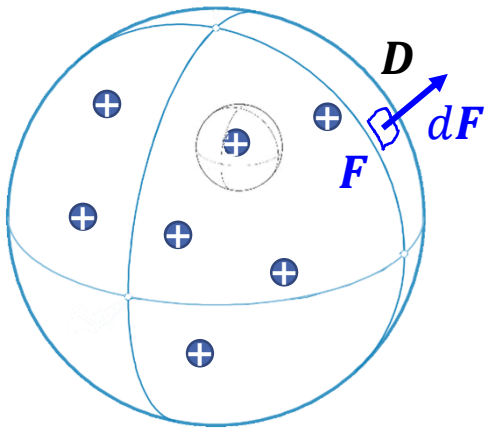
Die Maxwell'schen Gleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \rho \, dV = Q$	- Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder - Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{\partial F} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = -\int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{\partial F} \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = \int_F \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \, d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche elektrische Felder (Verschiebungsstrom) und elektrische Ströme erzeugen magnetische Wirbelfelder
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \, d\mathbf{F} = 0$	Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder

Das Gaußsche Gesetz für elektrische Felder

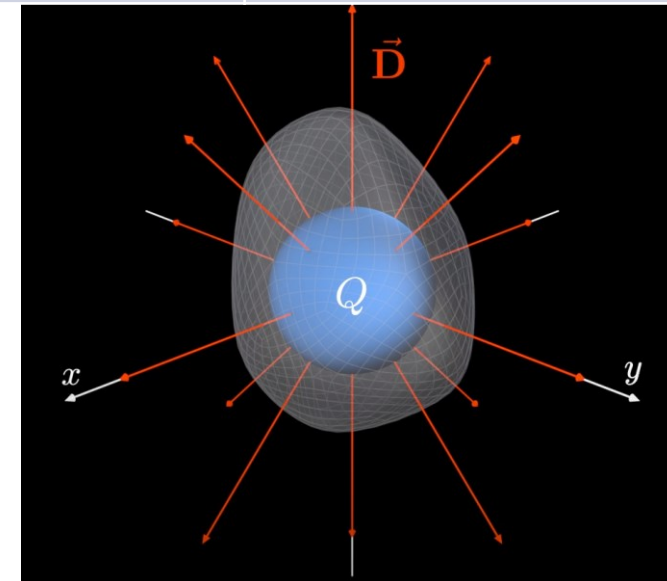
Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \rho \, dV = Q$	- Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder - Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung

„Satz vom Hüllenfluss“



Das Skalarprodukt berechnet das senkrecht durch die Teiloberfläche hindurchtretende Feld. Integration über die gesamte Oberfläche ergibt die Summe des Zu- und Abflusses.

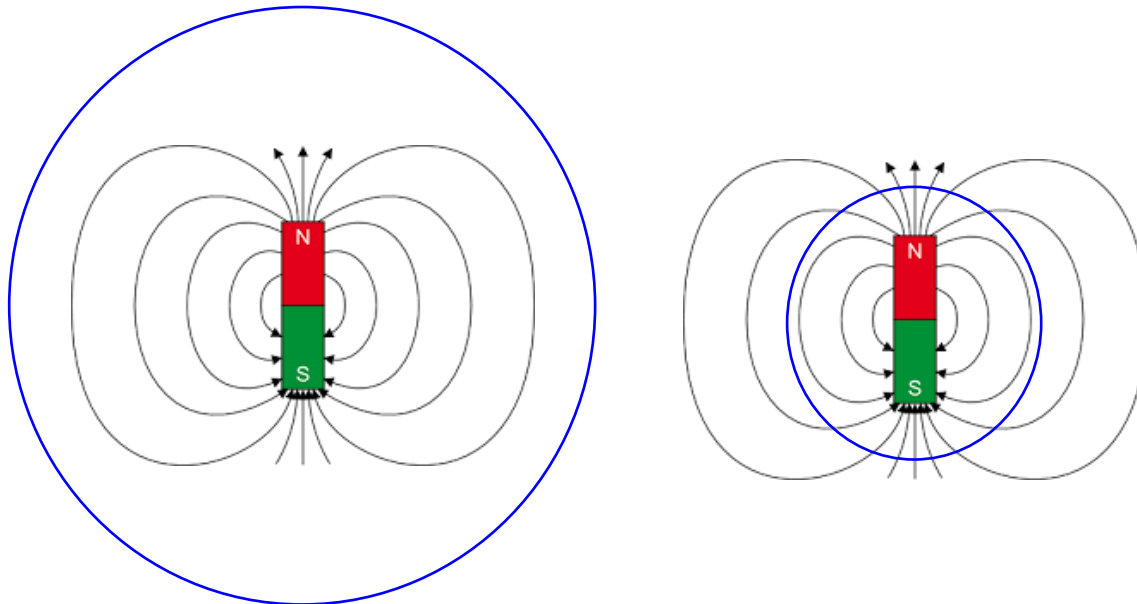
Das Volumenintegral der Kugel entspricht der Summe aller in der Kugel enthaltenen Ladungsanteile.



Bildquelle: [Das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik](#)

Das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0$	Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder

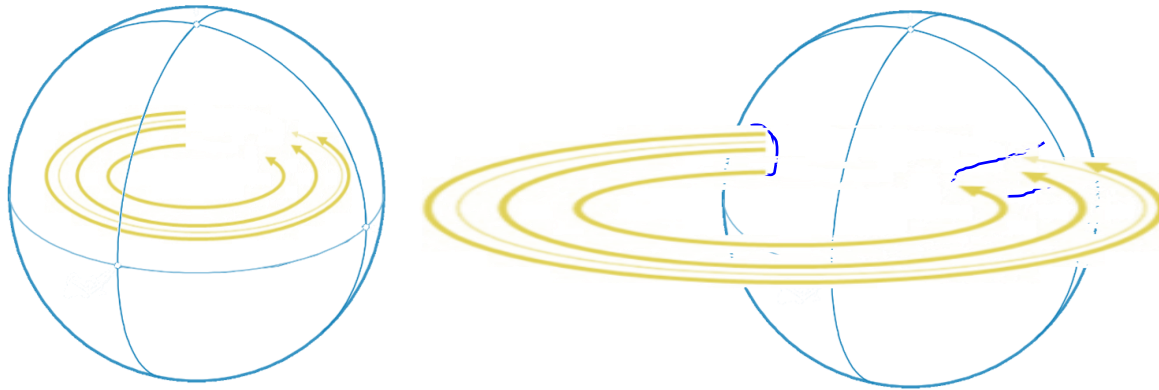


Es sind entweder alle geschlossenen Feldlinien im betrachteten Volumen (z.B. einer Kugel) enthalten oder sämtliche in das Volumen eintretenden Feldlinien verlassen dieses auch wieder an einer anderen Stelle

2D-Beispiel zum Permanentmagneten

Das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \, d\mathbf{F} = 0$	Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder

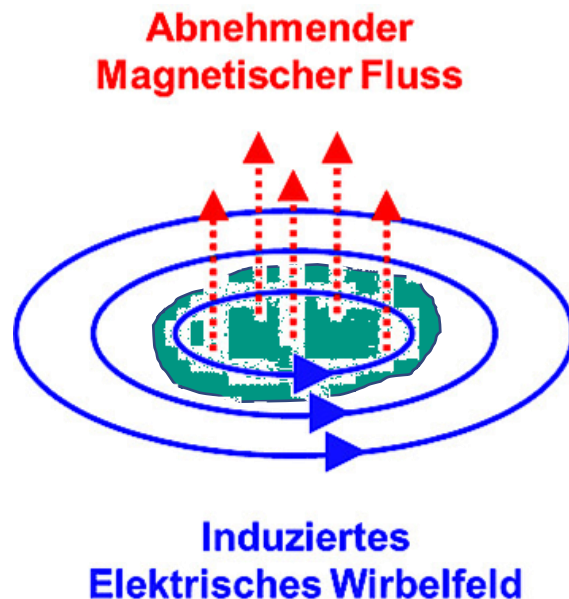


Es sind entweder alle geschlossenen Feldlinien im betrachteten Volumen (z.B. einer Kugel) enthalten oder sämtliche in das Volumen eintretenden Feldlinien verlassen dieses auch wieder an einer anderen Stelle

3D-Beispiel

Das Induktionsgesetz

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{\partial F} \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder

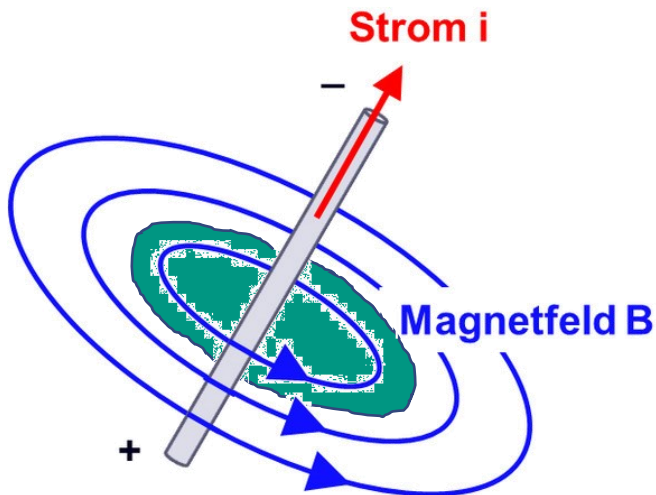


Das Flächenintegral berechnet die zeitliche Änderung des Magnetfeldes, welche auf der grünen Fläche wirksam wird, d.h. senkrecht durch die Fläche hindurchtritt.

Das Wegintegral (oder Linienintegral) der elektrischen Feldstärke entlang des Randes der Fläche ist identisch, da sich bei der Integration die Wirbel im Inneren aufheben (Stokesscher Integralsatz)

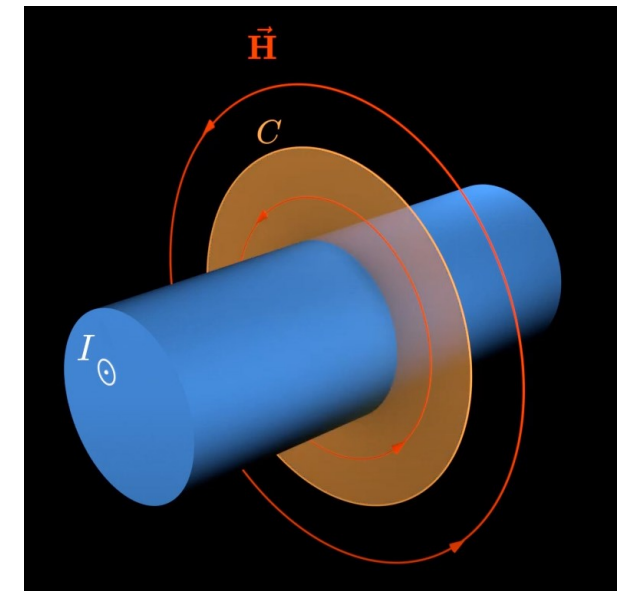
Das Durchflutungsgesetz

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{\partial F} \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = \int_F \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche elektrische Felder (Verschiebungsstrom) und elektrische Ströme erzeugen magnetische Wirbelfelder



Das Flächenintegral berechnet den senkrecht durch die Fläche (z.B. die grüne Fläche) tretenden elektrischen Strom.

Das Wegintegral (oder Linienintegral) der magnetischen Feldstärke entlang des Randes der Fläche ist identisch.



Materialgleichungen

- Für lineare Materialien gilt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

- Für isotrope Materialien sind ε , μ und κ richtungsunabhängig
- Für homogene Materialien sind ε , μ und κ konstant
- In EMW behandeln wir nur lineare, isotrope Medien

- Vakuumpermittivität / elektrische

$$\text{Feldkonstante: } \varepsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

- Relative Permittivität / Permittivität: ε_r

- Vakuumpermeabilität / magnetische

$$\text{Feldkonstante: } \mu_0 \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

- Relative Permeabilität / Permeabilität: μ_r



ACHTUNG!

Im Allgemeinen ist die Permittivität ε_r eine komplexe Größe mit Real- und Imaginärteil

Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgl.	Zentrale Gleichung	Anmerkungen
Elektrostatik	Stationäre Größen $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ Keine Ströme $\mathbf{J} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$	Poisson-Gleichung $\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon} \nabla\varepsilon \nabla\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ für homogene Materialien ($\nabla\varepsilon = 0$)	- Die DGL hat unendlich viele Lösungen. Die Lösung wird daher erst durch Randbedingungen ($\phi(\infty) = 0$) eindeutig. - Gesucht: elektr. Potential ϕ im gesamten Raum - Variante 1: Raumladung ρ ist bekannt → Coulomb-Integral (Poisson-Integral) als Lösung der Poisson-Gleichung - Spezialfall (teil-)symmetrische Anordnung → „Satz vom Hüllenfluss“ liefert $\mathbf{E}$, Linienintegral dann ϕ - Variante 2: Raumladung ρ ist unbekannt, elektr. Potential ϕ ist an Randstellen bekannt → Separationsansatz, Spiegelungsmethode, Integration, numerische Methoden

Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen

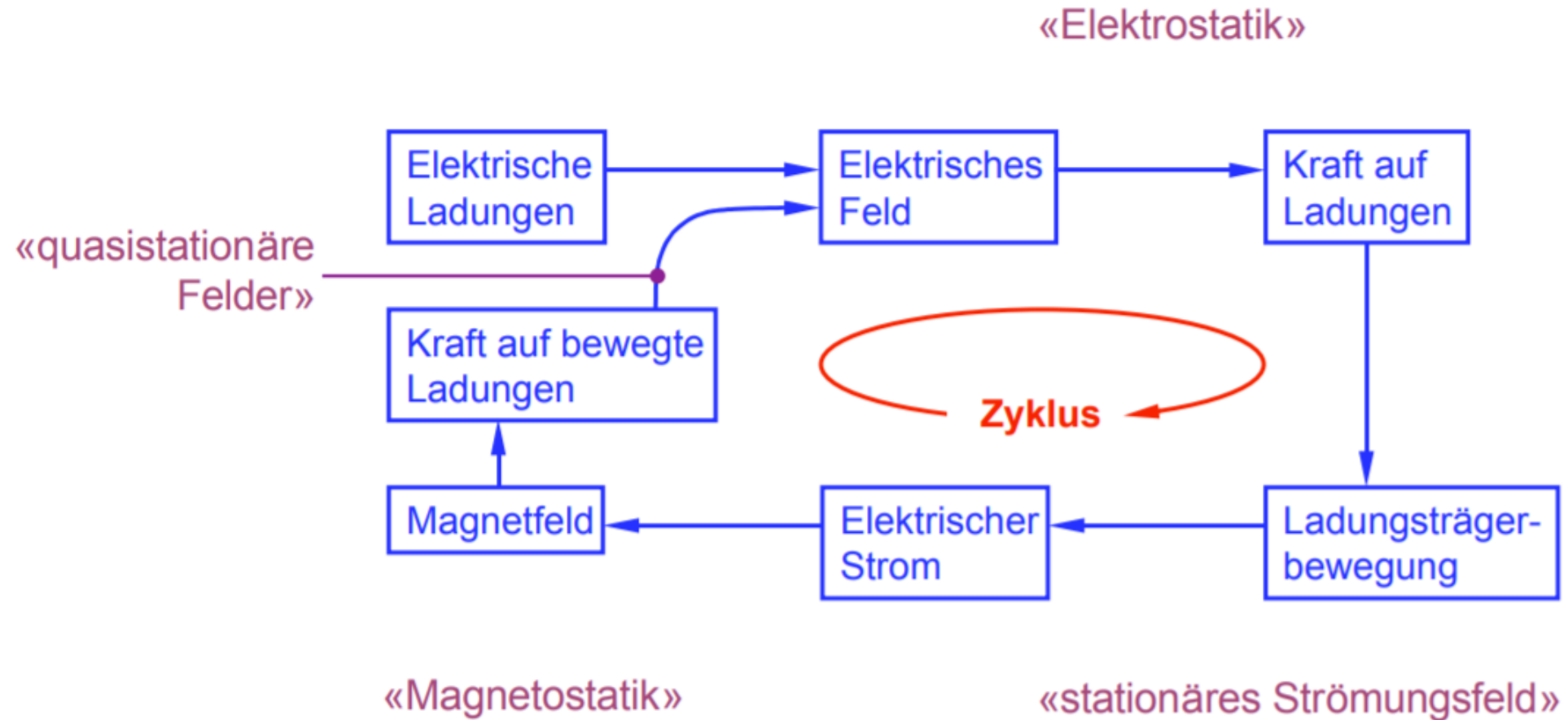
Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgl.	Zentrale Gleichung	Anmerkung
Stationäre Strömungen und Magneto- statik	Stationäre Größen $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ Ohmsches Gesetz $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	Laplace-Gleichung $\Delta \phi + \frac{1}{\kappa} \nabla \kappa \nabla \phi = 0$ Vektorpotential $\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ $\Delta \phi = 0$ für homogene Materialien ($\nabla \varepsilon = 0$)	- Die Raumladungen, Ströme und damit auch Magnetfelder sind zeitlich konstant. - Im ladungsfreien Raum verschwindet ρ im Vergleich zur Poisson-Gleichung, was die Lösung der DGL vereinfacht. - Bei der Berechnung von statischen Magnetfeldern ergibt sich das Gesetz von Biot-Savart als Pendant zum Coulomb-Integral

Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgl.	Zentrale Gleichung	Anmerkung
Langsam veränderliche Felder (quasi-stationär)	Vernachlässigbare zeitl. Ableitung der Verschiebungsdichte $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	Diffusionsgleichung $\Delta \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ $\Delta \phi - \mu\kappa \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (für $\rho = 0$)	- Nichtstationäre Ladungsträgerbewegungen und zeitlich veränderliche Magnetfelder liegen vor. - Es sind erstmals E-Feld und B-Feld verknüpft. - Dieser Spezialfall ist stets gültig für Metalle (Leitfähigkeit κ groß)

Anmerkung: Das Skalarfeld ϕ und das Vektorfeld $\mathbf{A}$ in den zentralen Gleichungen auf dieser Folie stehen stellvertretend für verschiedene Größen, $\mathbf{A}$ z.B. für das elektrische Feld $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ oder das magnetische Feld $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$.

Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen



Quelle: Vorlesungsskript Theoretische Elektrotechnik 2, Uni Duisburg

Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgl.	Zentrale Gleichung	Anmerkung
Beliebig veränderliche Felder	Zeitl. Ableitung der Verschiebungsdichte ist nicht vernachlässigbar $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Telegraphengleichung $\Delta \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$ $\Delta \phi - \mu\kappa \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$ (für $\rho = 0$) $\Delta \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$ Wellengleichung für Materialien mit vernachlässigbarer Leitfähigkeit ($\kappa \rightarrow 0$)	- Dieser allgemeinste Fall ist eine wesentliche Grundlage der elektromagnetischen Wellen, da sich auch ohne Leiter bzw. Strom eine Kopplung zwischen elektrischem und magnetischem Feld ergibt. - Elektromagnetische Wellen existieren auch im Vakuum.

Anmerkung: Das Skalarfeld ϕ und das Vektorfeld $\mathbf{A}$ in den zentralen Gleichungen auf dieser Folie stehen stellvertretend für verschiedene Größen, $\mathbf{A}$ z.B. für das elektrische Feld $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ oder das magnetische Feld $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$.

Ausblick auf die EMW-Übung

- Was ist eine elektromagnetische Welle?
- Was passiert, wenn eine elektromagnetische Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei Materialien trifft?
- Wie können elektromagnetische Wellen erzeugt bzw. abgestrahlt werden (Antenne)?
- Wie breitet sich Licht im freien Raum aus?
- Was sind Hohlleiter?
- Wie breitet sich Licht in einer Glasfaser aus?
- ...