EMW Übungsblatt 01

Abgabe bis zum 07.11.2022 um 11:30 via ILIAS

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Maxwellschen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form in einem zeitinvarianten und isotropen linearen Medium $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ bzw. $\mu = \mu(\mathbf{r})$ (in anisotropen Materialien werden diese Größen durch Matrizen beschrieben):

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
\end{aligned}
$$

a) Leiten Sie je eine partielle Differentialgleichung für das elektrische und das magnetische Feld her. Nehmen Sie dazu an, dass der Satz von Schwarz gilt, also die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar ist.

   Hinweis: Leiten Sie dazu zunächst das Durchflutungsgesetz bzw. das Induktionsgesetz nach der Zeit ab. Formen Sie die Beziehungen anschließend so um, dass Sie die beiden Differentialgleichungen bis auf die Stromdichte $\mathbf{J}$ entkoppeln können.

b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass das Medium nichtleitend und raumladungsfrei ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$ und $\rho = 0$) sowie homogen ($\varepsilon = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$) ist. Vereinfachen Sie die in a) hergeleiteten Differentialgleichungen entsprechend, um die Wellengleichungen für das elektrische bzw. magnetische Feld zu erhalten.

c) Gehen Sie nun außerdem davon aus, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ vollständig durch die komplexen Zeiger

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\ \exp\left(\mathrm{j}\,\omega t\right) \\
\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\ \exp\left(\mathrm{j}\,\omega t\right)
\end{aligned}
$$

   beschrieben werden. Setzen Sie diesen Ansatz in die Wellengleichungen aus b) ein und vereinfachen Sie soweit möglich.

Aufgabe 2:

Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in z-Richtung aus $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$. In der Vorlesung wurden die Wellengleichungen im Vakuum aus den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{4}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{5}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \tag{6}$$

a) Zeigen Sie dass jede Funktion $f(z \pm ct)$ die Wellengleichungen für diesen Fall erfüllt.

b) Können sich longitudinale Wellen ausbreiten? (Gehen Sie von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$ aus.)

Aufgabe 3:

Mit der Fourierreihe lässt sich jede periodische reellwertige Funktion $f(t)$ als eine Überlagerung unendlich vieler orthogonaler Sinus- und Cosinus-Basisfunktionen beschreiben. Wählt man eine endliche Anzahl N an Basisfunktionen, lässt sich die Funktion $f(t)$ nur noch approximieren.

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi nt/T) + \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(2\pi nt/T)\,. \tag{7}$$

Die jeweiligen Sinus- oder Cosinus-Schwingungen werden mit den Fourier-Koeffizienten gewichtet, welche sich wie folgt bestimmen lassen:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi nt/T)\,\mathrm{d}\,t \tag{8}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi nt/T)\,\mathrm{d}\,t\,. \tag{9}$$

a) Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten a_n für $f(t) = \cos(2\pi mt/T)$ in den folgenden Fällen:
   - $n \neq m\,, \quad \forall m, n \neq 0\,.$
   - $n = m\,, \quad \forall m, n \neq 0\,.$
   - $n = m = 0\,.$

   Um welchen Faktor muss a_0 verglichen mit a_n für $n \in \mathbb{N}^+$ gewichtet werden? Wie spiegelt sich das in Gleichung 7 wider?

b) Betrachten Sie nun die Formeln zur Berechnung von a_0 und b_0. Wie lassen sich diese für $n = 0$ vereinfachen? Welche Bedeutung haben a_0 und b_0 für eine Funktion $f(t)$?

c) Leiten Sie ausgehend von der Gleichung (7) den Ausdruck der Fourierreihe in Amplituden-Phasen-Form aus der Vorlesung her. Berücksichtigen Sie dabei die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgaben.

d) Die Funktion $f(t)$ sei nun $f(t) = \sin^4(t)$ mit einer Periode von $T = 2\pi$ s. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, b_0, a_2, b_2, a_4 sowie b_4.

   Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln für Potenzen einer Winkelfunktion um $f(t)$ umzuschreiben. Des Weiteren lässt sich eine Multiplikation zweier trigonometrischer Funktionen wie folgt umschreiben:

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right) \tag{10}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right) \tag{11}$$

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu