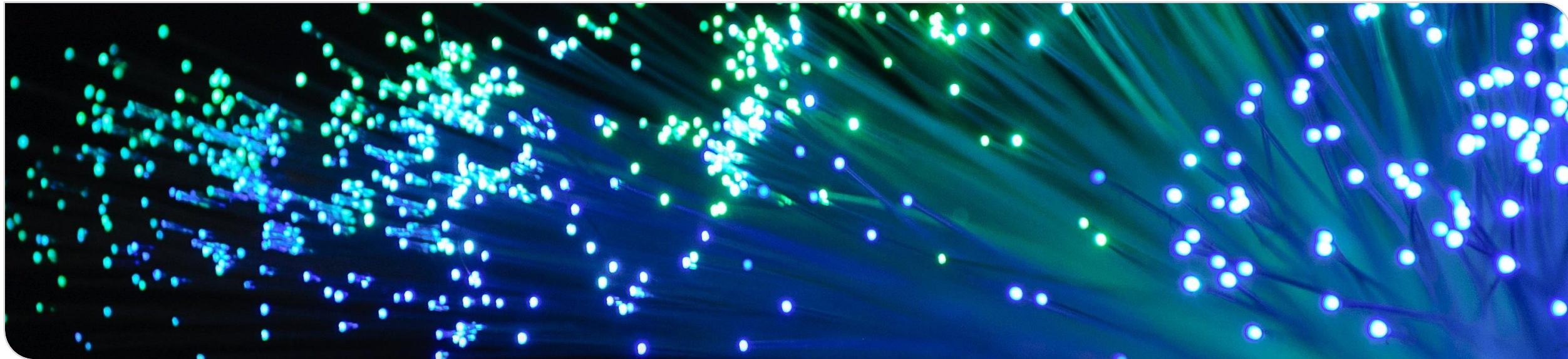


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 1

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Die Übung im Überblick

Allgemeine Informationen

- Unterlagen zu Vorlesung und Übung findet ihr im [ILIAS-Kurs](#)
- Kontaktdaten Übungsleiter:
jonas.krimmer@kit.edu
patrick.matala@kit.edu
- Übung bietet Bonussystem für die Klausur
- Nehmen Sie Gebrauch von den Umfragen der Vorlesungen

Themenübersicht

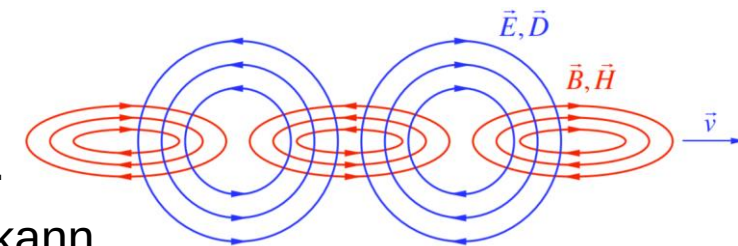
Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichung, ebene Wellen, Fourierreihen

Die Maxwellschen Gleichungen

- Die Maxwellschen Gleichungen sind ein Grundgerüst zur Beschreibung der Wechselwirkung elektrischer und magnetischer Felder.

Differentielle Form	Name	Interpretation
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Durchflutungsgesetz	Zeitlich veränderliche elektrische Felder (Verschiebungsstrom) und elektrische Ströme erzeugen magnetische Wirbelfelder
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Induktionsgesetz	Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gaußsches Gesetz	Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder.
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$		Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.

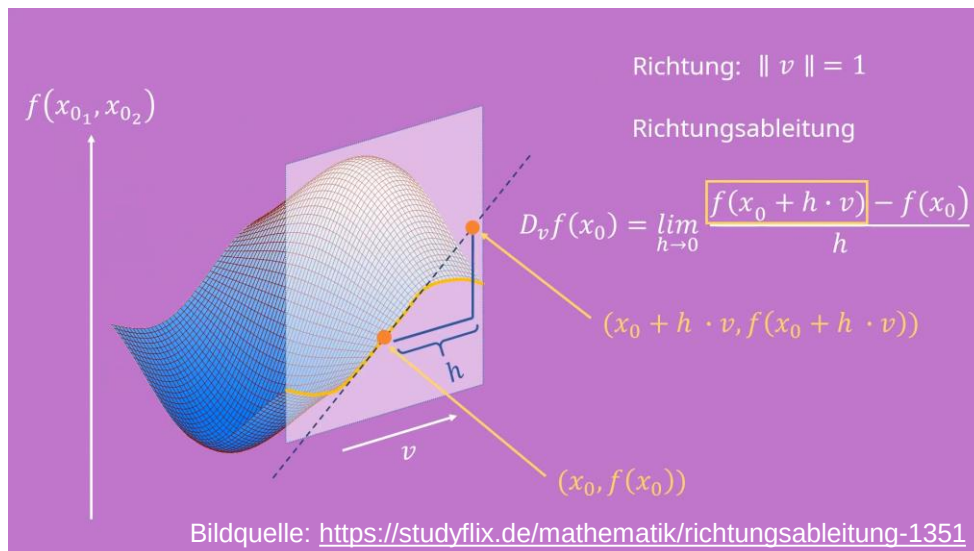
- Aus diesen Formeln wird uns allerdings noch nicht direkt ersichtlich
 - Wie sich elektromagnetische Wellen ausbreiten und in Medien verhalten.
 - Wie eine elektromagnetische Welle abgestrahlt und empfangen werden kann.
- Ziel ist es aus den Maxw. Gl. eine Differentialgleichung für das E- und H-Feld herzuleiten.



Differentialrechnung (Wdh.)

- **Richtungsableitung:** Ableitung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion entlang einer beliebigen Richtung, vorgegeben durch einen Vektor $\mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h\mathbf{v}}$$



- **Partielle Ableitung:** Spezialfall der Richtungsableitung, bei dem entlang eines kanonischen Basisvektors des $\mathbb{R}^n$ differenziert wird

- Beispiel: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \text{const}, \text{const})}{\partial x} = 2x + 2yz$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\text{const}, y, \text{const})}{\partial y} = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(\text{const}, \text{const}, z)}{\partial z} = 2z + 2xy$$

Differentialgleichungen

- Definition: Mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion von einer oder mehreren Variablen, in der auch die Ableitungen eben dieser Funktion vorkommen.
- **Gewöhnliche DGLs:**
 - Ableitung von $y(x)$ nach einer Variablen x
 - Kann die DGL nach der höchsten Ableitung n aufgelöst werden, spricht man von einer **expliziten** DGL. Andernfalls von einer **impliziten**.
- **Partielle DGLs:**
 - Funktion hängt von mind. 2 Variablen ab
 - Es gibt partielle Ableitungen nach mind. 2 Variablen
 - Beispiel: Funktion $u(x, y)$ (zwei Variablen)

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$$
$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

$$f\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0$$

Beispiel für eine gewöhnliche DGL

- **Harmonischer** Oszillator: Schwingungsfähiges System mit linearer Rückstellgröße
- Linearer Zusammenhang zwischen Auslenkung und Rückstellkraft beschrieben durch gewöhnliche DGL

- Idealer Oszillator (ohne Dämpfung)

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

- Gedämpfter Oszillator (lineare Dämpfung)

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

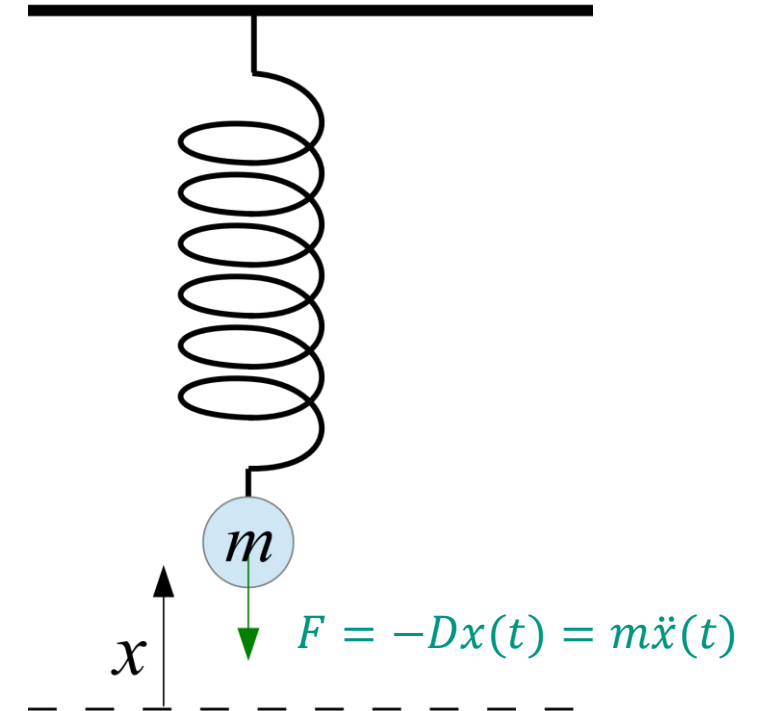
- Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

- Lösung der Funktion

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

Der Begriff „harmonisch“ wird uns auch bei den elektromagnetischen Wellen wieder begegnen. Beachte ebenso die Gemeinsamkeiten des Federpendels und EMW beim Lösen der DGL.



Winkelgeschwindigkeit: $\omega_0 = \sqrt{D/m}$
Dämpfungsfaktor: γ

Bildquelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Federpendel2.svg>

Aufgabe 1

Gegeben seien die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form in einem zeitinvarianten und isotropen linearen Medium $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ bzw. $\mu = \mu(\mathbf{r})$ (in anisotropen Materialien werden diese Größen durch Matrizen beschrieben):

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{D}}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\rho} \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} &= 0\end{aligned}$$

- a) Leiten Sie je eine partielle Differentialgleichung für das elektrische und das magnetische Feld her. Nehmen Sie dazu an, dass der Satz von Schwarz gilt, also die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar ist.

Hinweis: Leiten Sie dazu zunächst das Durchflutungsgesetz bzw. das Induktionsgesetz nach der Zeit ab. Formen Sie die Beziehungen anschließend so um, dass Sie die beiden Differentialgleichungen bis auf die Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}$ entkoppeln können.

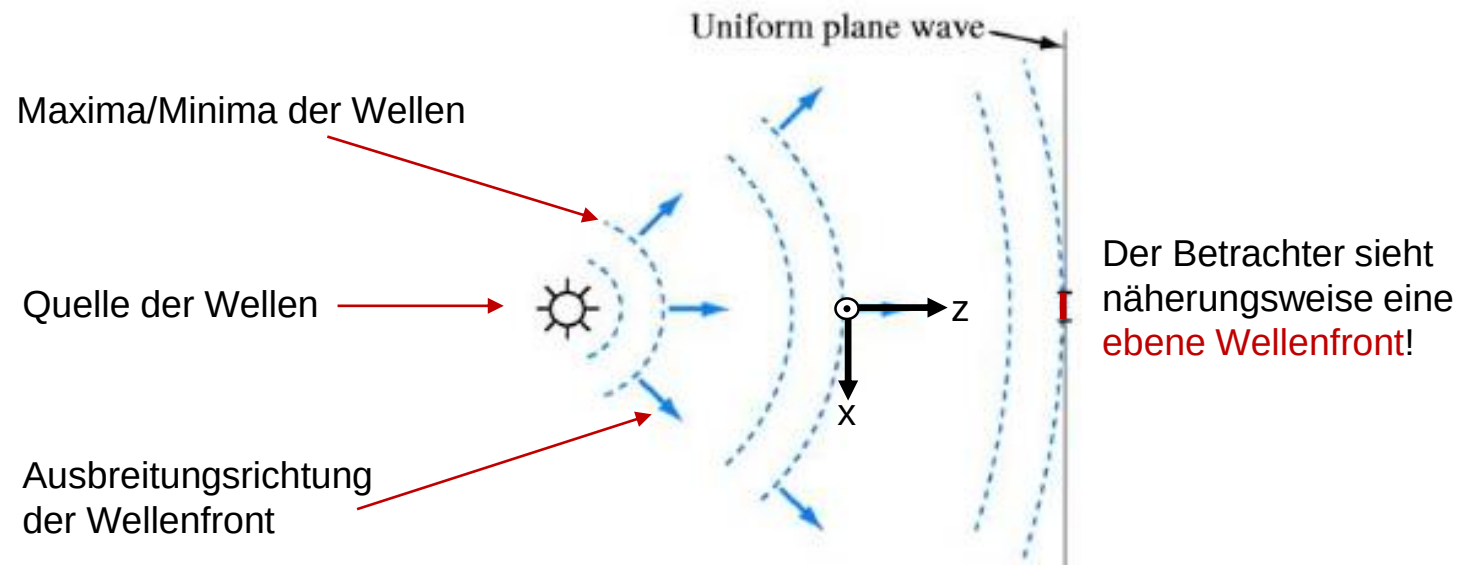
- b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass das Medium nichtleitend und raumladungsfrei ($\underline{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$ und $\rho = 0$) sowie homogen ($\varepsilon = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$) ist. Vereinfachen Sie die in a) hergeleiteten Differentialgleichungen entsprechend, um die Wellengleichungen für das elektrische bzw. magnetische Feld zu erhalten.
- c) Gehen Sie nun außerdem davon aus, dass $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ vollständig durch die komplexen Zeiger

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) \\ \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t)\end{aligned}$$

beschrieben werden. Setzen Sie diesen Ansatz in die Wellengleichungen aus b) ein und vereinfachen Sie soweit möglich.

Ebene Wellen

- Mathematisch einfachste Lösung der Wellengleichung
- Kompliziertere Wellenfronten können lokal als ebene Welle approximiert werden, was die Mathematik vereinfacht.
- Verständnis von Wellenphänomenen wie Brechung, Reflexion, etc., anhand ebener Wellen



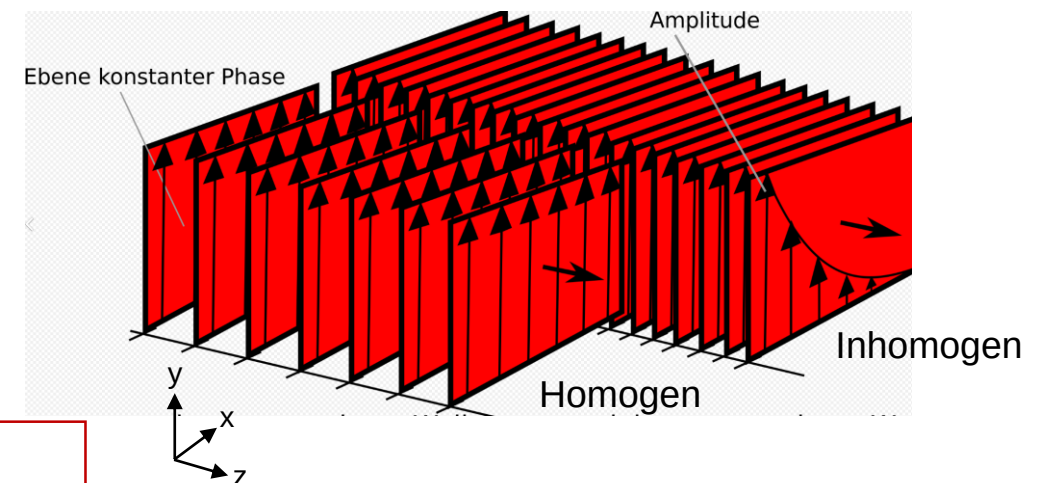
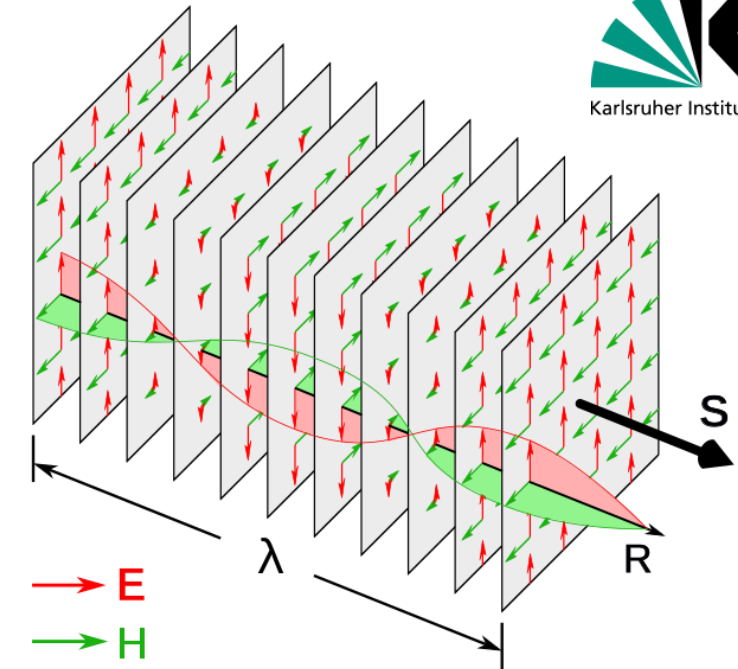
Ebene Wellen

- Wellenfronten (Phasenfronten) sind unendlich ausgedehnte Ebenen
- Ebene Wellen existieren für jeden Zeitpunkt und jeden Ort
- Nur geeignet zur Beschreibung stationärer Zustände (keine Quelle)
- Für homogene ebene Welle gilt bei Ausdehnung in z-Richtung in 3D:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \neq 0$$

- Mit ebenen Wellen sind in der Regel homogene, ebene Wellen gemeint.

Ebene Wellen & Maxwellsche Gleichungen animiert: <https://www.youtube.com/watch?v=W1cTpgM9DaU>



Harmonische Wellen

- **Harmonische Wellen** sind Wellen, bei denen **E**- und **H**-Feld sinusförmig/kosinusförmig schwingen.
- Da Sinus- und Kosinusschwingungen periodisch mit einer einzelnen, festen Frequenz sind, ist jede harmonische Welle **monochromatisch**.
- In der Vorlesung werden meist **harmonische, ebene Wellen** behandelt. Ausnahmen sind Kugelwellen harmonischer Anregung.
- Harmonische Wellen lassen sich (näherungsweise) leicht anregen, z.B. durch Wechselstrom/-spannung.
- Erfüllt die harmonische Welle die Wellengleichung?
Beispiel für $E_y(z, t)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\mathbf{E}(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Amplitude
Kreisfrequenz
Wellenzahl
Anfangsphase

$$f = \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad g = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -A \frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

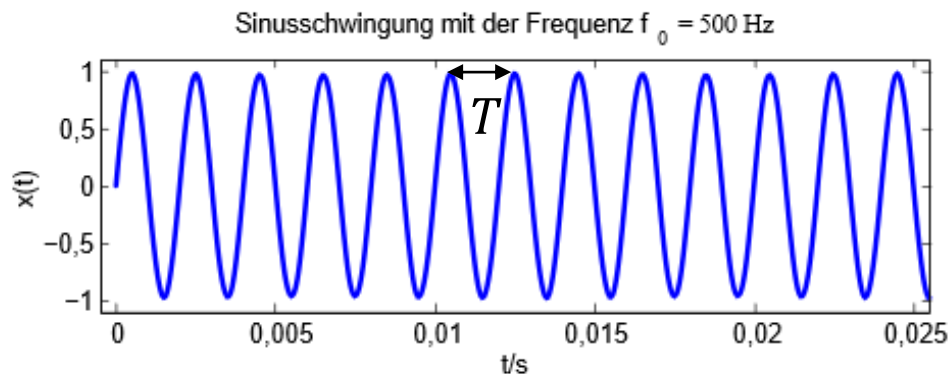
$$\text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Harmonische Wellen

- Wichtige Wellengrößen lassen sich am einfachsten für harmonische Wellen veranschaulichen

Periodendauer $T = \frac{1}{f}$

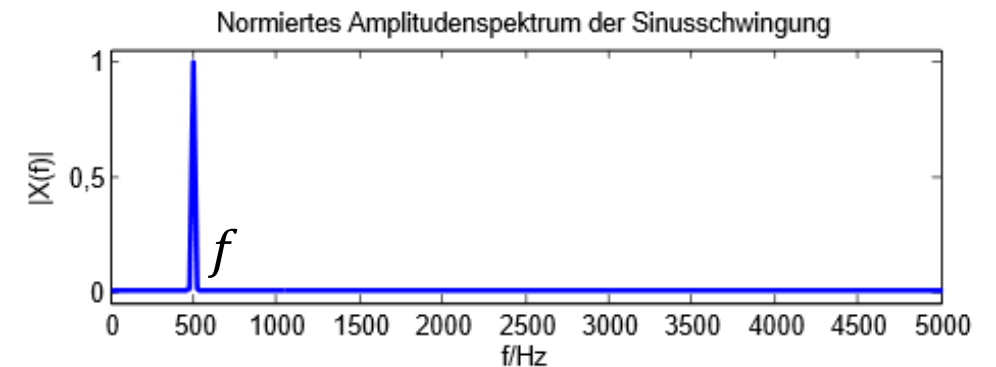
Zeitlicher Abstand zweier Wellenfronten gleicher Phase (Einheit s)



Fourier-
Transformation



- (zeitliche) **Frequenz** f
Schwingungen pro Einheitszeitintervall, meist pro Sekunde (Einheit Hz)
- (zeitliche) **Kreisfrequenz** $\omega = 2\pi f$

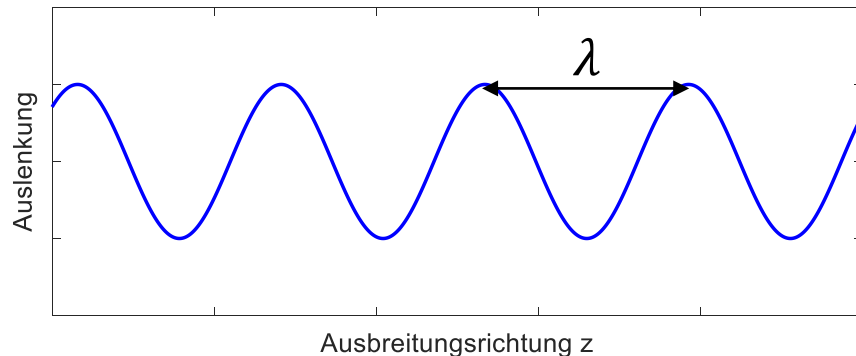


Harmonische Wellen

- Wichtige Wellengrößen lassen sich am einfachsten für harmonische Wellen veranschaulichen

Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f}$

Räumlicher Abstand zweier Wellenfronten gleicher Phase (Einheit nm)



Fourier-
Transformation

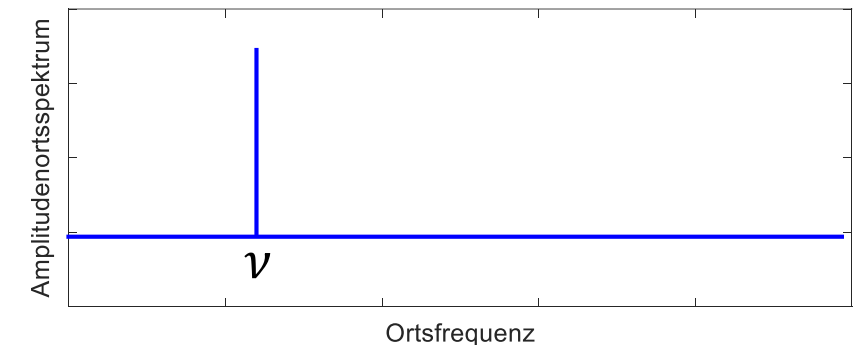


■ **Ortsfrequenz** $\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c}$

Schwingungen pro Einheitsraumintervall, meist pro m (Einheit 1/m)

■ **Wellenzahl** $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$

Kopplung von
räumlichem und
zeitlichem Verhalten



Komplexe Zeigerschreibweise

- Harmonische Wellen erlauben eine leichte mathematische Handhabung linearer* Systeme, da Amplitude und Phase mit der komplexen Zeigerschreibweise simultan erfasst werden können.
- (Implizite) Zeitabhängigkeiten können weggelassen werden.

Reelles Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - kz + \phi)$$

Komplexes Feld

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = A \exp(j(\omega t - kz + \phi))$$

$$= A \exp(-jkz) \exp(j\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)$$

Komplexe Felddarstellung
(komplexer Zeiger / Phasor)

Komplexe
Amplitude

Ermittlung reelles Feld aus komplexem Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\}$$

*Lineare Systeme sind solche Systeme, bei denen die Frequenz der Welle unbeeinflusst von Operationen bleibt. Frequenzanteile können gedämpft werden (linearer Filter), aber es entstehen keine neuen Frequenzkomponenten.

Komplexe Zeigerschreibweise

- Die tatsächlich physikalisch existierende Welle wird mittels Realteil der komplexen Feldstärke gebildet

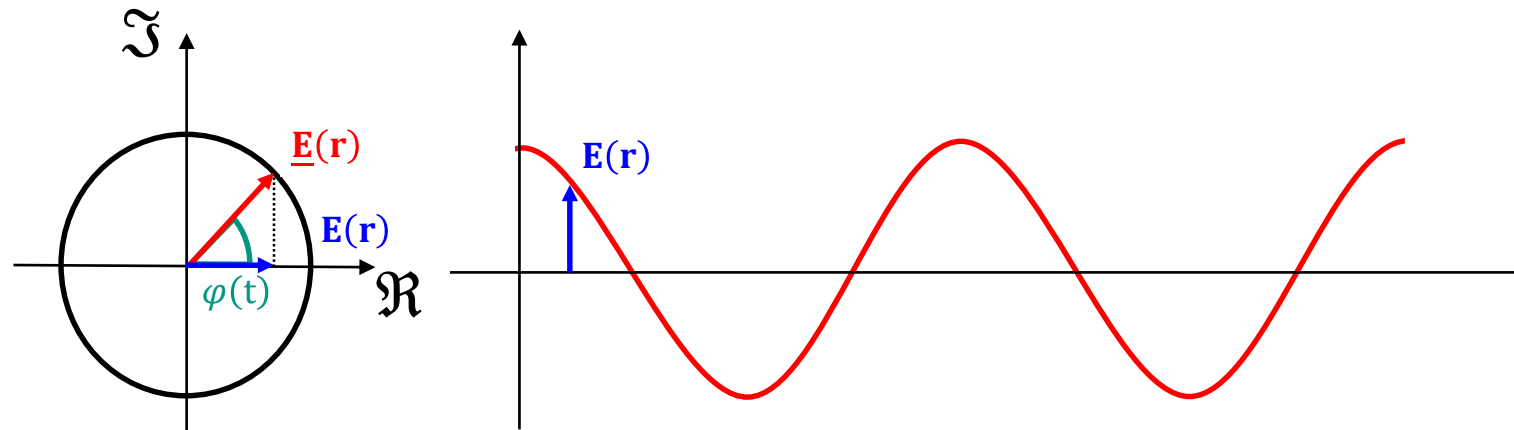
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\}$$

- Dies entspricht der Projektion des komplexen Zeigers auf den Realteil

Komplexes Feld

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = A \exp(j(\omega t - kz))$$

$$= A \exp(-jkz) \exp(j\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)$$



Aufgabe 2

Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in z -Richtung aus ($\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0$). In der Vorlesung wurden die Wellengleichungen im Vakuum aus den Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (4)$$

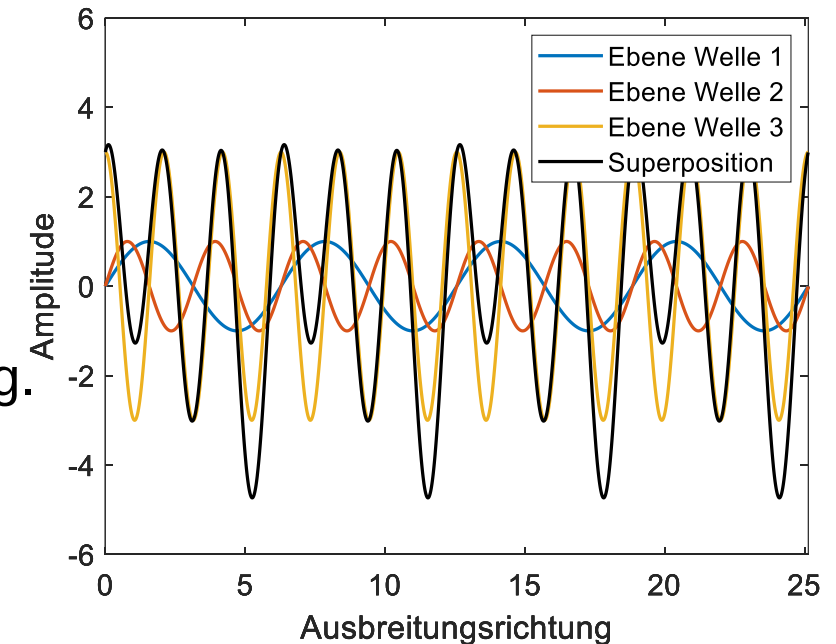
$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \quad (6)$$

- a) Zeigen Sie dass jede Funktion $f(z \pm ct)$ die Wellengleichungen für diesen Fall erfüllt.
- b) Können sich longitudinale Wellen ausbreiten? (Gehen Sie von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$ aus.)

Harmonische Wellen – Fourierreihe

- Ebene Wellen bilden eine **Basis von Lösungen der Wellengleichung**, d.h. jede beliebige Lösung kann als Superposition (Überlagerung/Linearkombination) aus ebenen Wellen dargestellt werden.
- Folge: Jede Welle beliebiger, räumlicher Gestalt kann stets als **Superposition** ebener Wellen mit verschiedenen Ausbreitungsrichtungen, Polarisationen und Wellenzahlen (Ortsfrequenzen) beschrieben werden.
- Ggf. ist Superposition unendlich vieler ebener Wellen notwendig.
- Nur Wellen **ganzzahlig vielfacher Schwingungen**, da nur so periodisch im Beobachtungszeitraum und somit orthogonal zu den anderen Wellen.
- In linearen Medien lassen sich so physikalische Effekte für die einzelnen ebenen Wellen separat betrachten
- Grundprinzip der Fourieroptik (Mastervorlesung)



Aufgabe 3

Mit der Fourierreihe lässt sich jede periodische reellwertige Funktion $f(t)$ als eine Überlagerung unendlich vieler orthogonaler Sinus- und Cosinus-Basisfunktionen beschreiben. Wählt man eine endliche Anzahl N an Basisfunktionen, lässt sich die Funktion $f(t)$ nur noch approximieren.

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi n t / T) + \sum_{n=0}^N b_n \sin(2\pi n t / T). \quad (7)$$

Die jeweiligen Sinus- oder Cosinus-Schwingungen werden mit den Fourier-Koeffizienten gewichtet, welche sich wie folgt bestimmen lassen:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n t / T) dt \quad (8)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n t / T) dt. \quad (9)$$

a) Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten a_n für $f(t) = \cos(2\pi m t / T)$ in den folgenden Fällen:

- $n \neq m, \quad \forall m, n \neq 0.$
- $n = m, \quad \forall m, n \neq 0.$
- $n = m = 0.$

Um welchen Faktor muss a_0 verglichen mit a_n für $n \in \mathbb{N}^+$ gewichtet werden? Wie spiegelt sich das in Gleichung 7 wider?

- b) Betrachten Sie nun die Formeln zur Berechnung von a_0 und b_0 . Wie lassen sich diese für $n = 0$ vereinfachen? Welche Bedeutung haben a_0 und b_0 für eine Funktion $f(t)$?
- c) Leiten Sie ausgehend von der Gleichung (7) den Ausdruck der Fourierreihe in Amplituden-Phasen-Form aus der Vorlesung her. Berücksichtigen Sie dabei die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgaben.

Aufgabe 3

Die Funktion $f(t)$ sei nun $f(t) = \sin^4(t)$ mit einer Periode von $T = 2\pi$ s. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, b_0, a_2, b_2, a_4 sowie b_4 .

Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln für Potenzen einer Winkelfunktion um $f(t)$ umzuschreiben. Des Weiteren lässt sich eine Multiplikation zweier trigonometrischer Funktionen wie folgt umschreiben:

$$\cos(x) \sin(y) = \frac{1}{2} ((\sin(x - y) + \sin(x + y))) \quad (10)$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} ((\cos(x - y) + \cos(x + y))) \quad (11)$$

