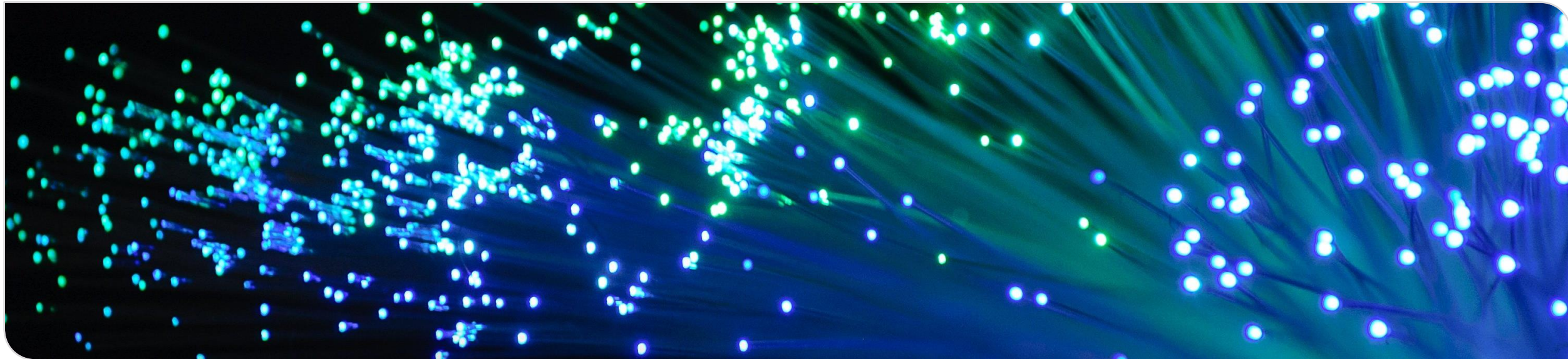


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 2

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Organisatorisches

- Das heutige Übungsblatt wird **nicht** eingesammelt!
- Die Benennung der Übungen ergibt sich aus der Nummer des besprochenen Übungsblatts
- An dem letzten Übungstermin wird eine Fragestunde angeboten
- Voraussichtlich: Lerncafé in der vorlesungsfreien Zeit
- → Besprechung der Inhalte von Vorlesung und Übung mit Prof. Randel und den Übungsleitern in entspannter Atmosphäre
- Die Klausur findet am **16. März von 14:30 – 16:30 Uhr** statt

2022			2023		
Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März
1 Sa	1 Di Allerheiligen	1 Do	1 So Neujahr	1 Mi VL13	1 Mi
2 So	2 Mi VL02	2 Fr	2 Mo 1	2 Do	2 Do
3 Mo Tag der Dt. Einheit	3 Do	3 Sa	3 Di	3 Fr	3 Fr
4 Di 40	4 Fr	4 So	4 Mi	4 Sa	4 Sa
5 Mi	5 Sa	5 Mo UE05 49	5 Do	5 So	5 So
6 Do	6 So	6 Di	6 Fr Heilige Drei Könige	6 Mo UE12 8	6 Mo 10
7 Fr	7 Mo UE01 45	7 Mi VL07	7 Sa	7 Di	7 Di
8 Sa	8 Di	8 Do	8 So	8 Mi VL14	8 Mi
9 So	9 Mi VL03	9 Fr	9 Mo UE08 2	9 Do	9 Do
10 Mo 41	10 Do	10 Sa	10 Di	10 Fr	10 Fr
11 Di	11 Fr	11 So	11 Mi VL10	11 Sa	11 Sa
12 Mi	12 Sa	12 Mo UE06 50	12 Do	12 So	12 So
13 Do	13 So	13 Di	13 Fr	13 Mo UE13 7	13 Mo 11
14 Fr	14 Mo UE02 46	14 Mi VL08	14 Sa	14 Di	14 Di
15 Sa	15 Di	15 Do	15 So	15 Mi VL15	15 Mi
16 So	16 Mi VL04	16 Fr	16 Mo UE09 3	16 Do	16 Do Klausur
17 Mo 42	17 Do	17 Sa	17 Di	17 Fr	17 Fr
18 Di	18 Fr	18 So	18 Mi VL11	18 Sa	18 Sa
19 Mi	19 Sa	19 Mo UE07 51	19 Do	19 So	19 So
20 Do	20 So	20 Di	20 Fr	20 Mo Rosenmontag 8	20 Mo 12
21 Fr	21 Mo UE03 47	21 Mi VL09	21 Sa	21 Di	21 Di
22 Sa	22 Di	22 Do	22 So	22 Mi	22 Mi
23 So	23 Mi VL05	23 Fr	23 Mo UE10 4	23 Do	23 Do
24 Mo 43	24 Do	24 Sa Heiligabend	24 Di	24 Fr	24 Fr
25 Di	25 Fr	25 So 1. Weihnachtstag	25 Mi VL12	25 Sa	25 Sa
26 Mi VL01	26 Sa	26 Mo 2. Weihnachtstag	26 Do	26 So	26 So Beginn der Sommerzeit
27 Do	27 So 1. Advent	27 Di 52	27 Fr	27 Mo 9	27 Mo 13
28 Fr	28 Mo UE04 48	28 Mi	28 Sa	28 Di	28 Di
29 Sa	29 Di	29 Do	29 So		29 Mi
30 So Ende der Sommerzeit	30 Mi VL06	30 Fr	30 Mo UE11 5		30 Do
31 Mo UE00		31 Sa Silvester	31 Di		31 Fr

Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichung, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Polarisation

Zeitharmonische Wellen

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ lässt sich der elektrische Feldstärkevektor mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ folgendermaßen darstellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

Hinweis:

- **Fettdruck** → Vektor
- Unterstrich → komplexe Größe

- Diesen Ausdruck können wir mittels des komplexen Zeigers darstellen als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j(\omega t + \varphi))$$

- Der reellwertige Feldvektor ergibt sich dann als Realteil des komplexen Zeigers

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \right) = \Re\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\}$$

Zeitharmonische Maxwell'sche Gleichungen (I)

■ Zeitharmonische Felder in komplexer Zeigerdarstellung

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) \cdot \exp(j\omega t) \text{ bzw. } \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) \cdot \exp(j\omega t)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) = j\omega \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, t) = j\omega \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, t)$$

■ **Resultat:** Vereinfachte Maxwell'sche Gleichungen für lineares, homogenes Medium

$$\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) = j\omega \left(1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon}\right) \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) = 0$$

Zeitharmonische Maxwell'sche Gleichungen (II)

- Vereinfachte Maxwell-Gleichungen für lineares, homogenes Medium

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = j\omega \left(1 - j \frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$$

- Im Allgemeinen ist auch die Permittivität ε frequenzabhängig, d.h. es gilt $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$
- Diese Abhängigkeit wird erst in Vorlesung 4 näher betrachtet.
- Hier gilt also zunächst $\varepsilon(\omega) = \varepsilon = \text{const}$

Zeitharmonische ebene Wellen (I)

- Zeitharmonische ebene Wellen (Wellenvektor $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_a$) mit komplexen Zeigern der Form

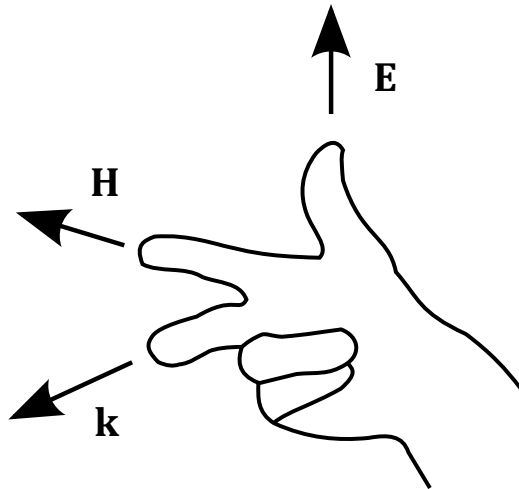
$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \overset{\text{hinlaufend}}{\underline{\mathbf{E}}_0^+} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + \overset{\text{rücklaufend}}{\underline{\mathbf{E}}_0^-} \exp(j(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

sind Lösungen der Maxwellschen Gleichungen (analoge Darstellung für das H-Feld)

- Betrachtung der Feldkomponenten: für die **hin-** und **rücklaufende** Welle existieren jeweils zwei unabhängige Lösungen
- Jede zeitharmonische ebene Welle lässt sich als Überlagerung dieser unabhängigen Lösungen darstellen!
- Beispiel für Ausbreitung entlang z -Achse, d.h. $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$:
 - Erste Lösung: E-Feld besitzt lediglich x -Komponente (H-Feld folglich nur y -Komponente)
 - Zweite Lösung: E-Feld besitzt lediglich y -Komponente (H-Feld folglich nur x -Komponente)
 - **E- und H-Feld bilden stets Rechtssystem mit Wellenvektor!**

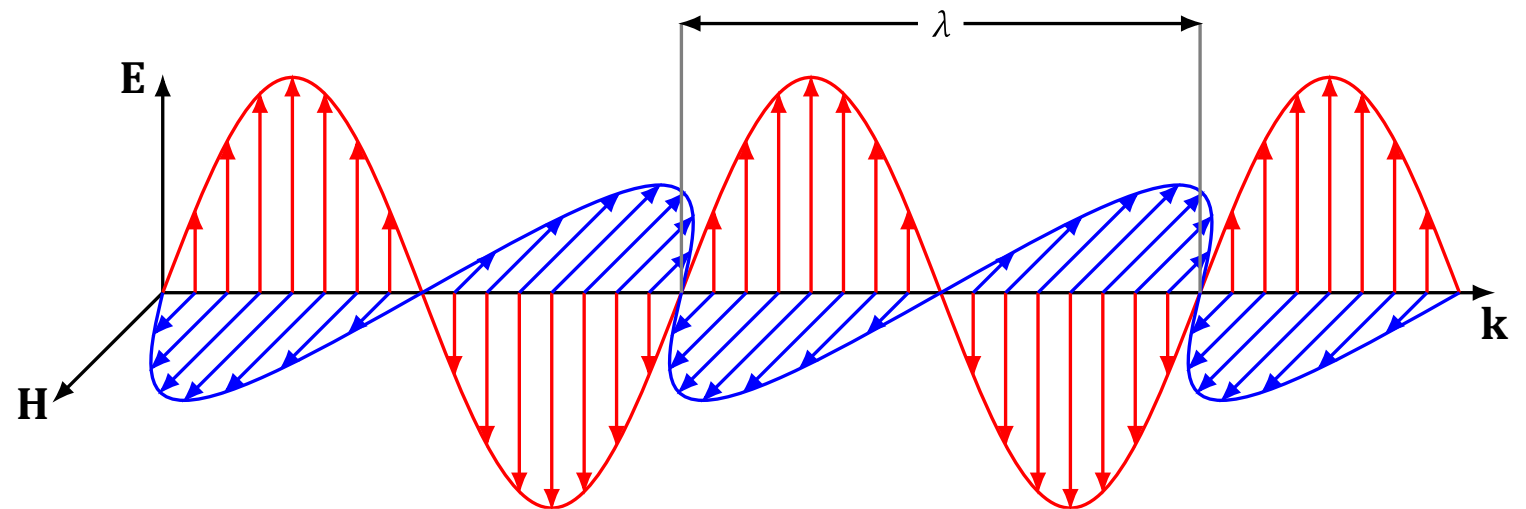
Zeitharmonische ebene Wellen (II)

Drei-Finger-Regel für das Rechtssystem



Quelle: [Ladyt at German Wikipedia](#), Public domain, via Wikimedia Commons

- Eine mögliche Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in Form zeitharmonischer ebener Wellen
- **Zum Nachdenken:** Wie sähe die andere Lösung aus?



Poynting-Vektor

- Elektrische und magnetische Felder speichern Energie, z.B. Kondensator als Energiespeicher
- Der Poynting-Vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

(Einheit W/m^2) beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten elektromagnetischen Feldenergie

- Das zeitliche Mittel des Poynting-Vektors liefert die pro Flächenelement abgestrahlte Wirkleistung

Poynting-Vektor für zeitharmonische Felder

- Für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit und Phasenverschiebung ϕ zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi)$$

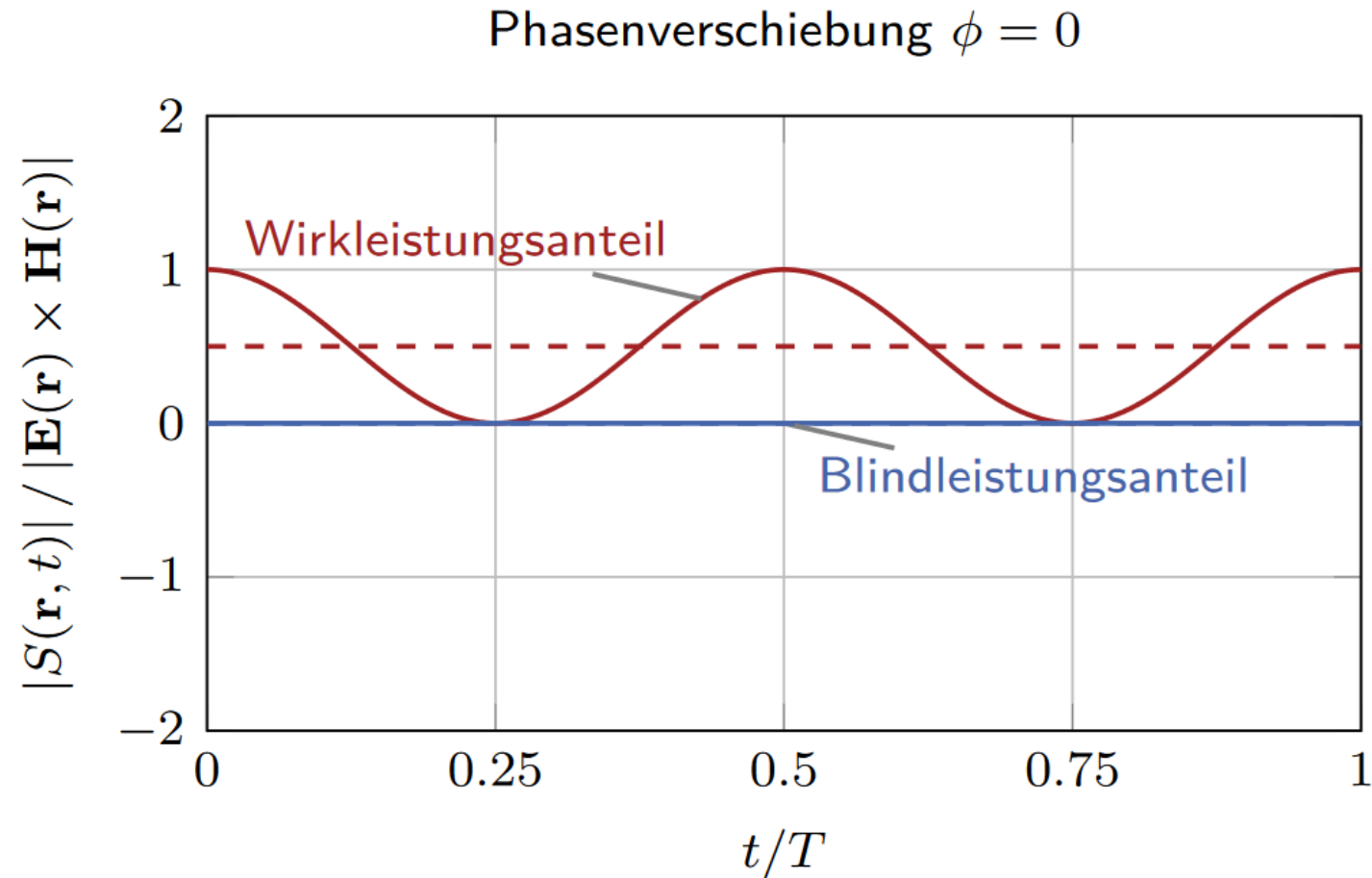
ergibt sich der Poynting-Vektor zu

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] [(1 + \cos(2\omega t)) \cos(\phi) - \sin(2\omega t) \sin(\phi)]$$

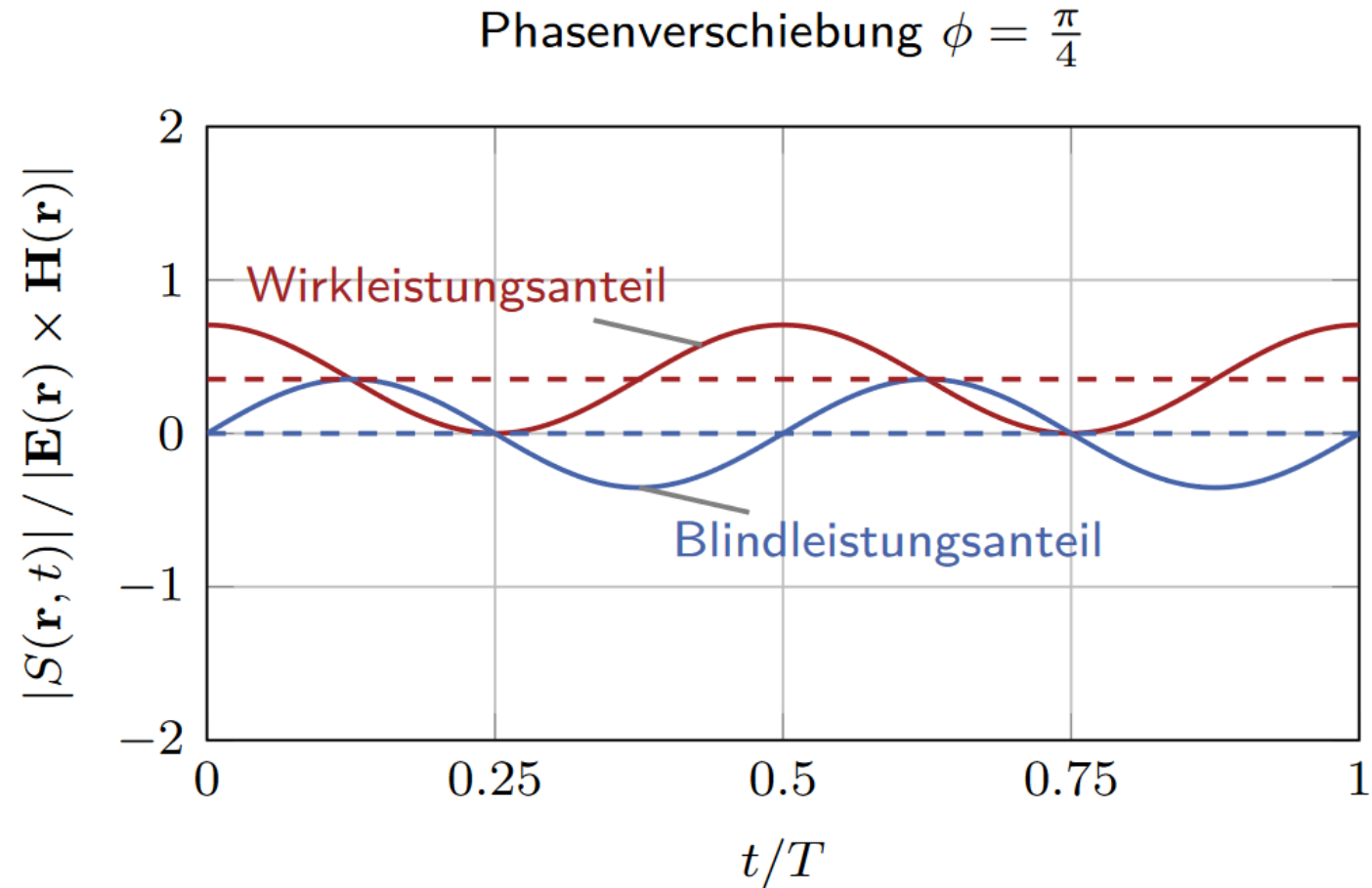
Wirkleistungsanteil Blindleistungsanteil

- Im zeitlichen Mittel verbleibt nur der Wirkleistungsanteil (ohne Cosinus)

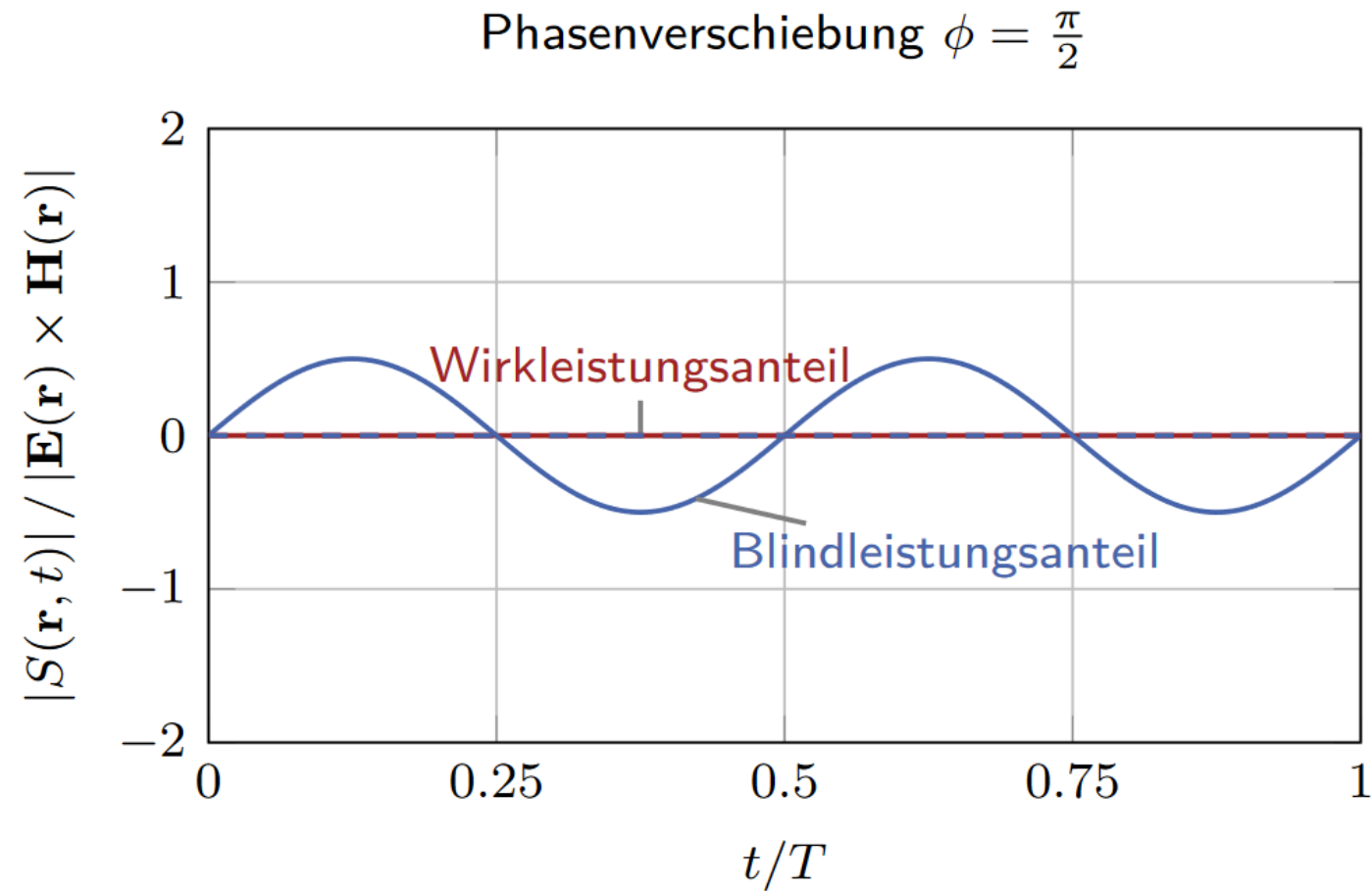
Instantaner Poynting-Vektor bei $\phi = 0$



Instantaner Poynting-Vektor bei $\phi = \pi/4$



Instantaner Poynting-Vektor bei $\phi = \pi/2$



Komplexer Poynting-Vektor

- Drücken wir die zeitharmonischen Felder durch komplexe Zeiger aus

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t + j\phi)$$

erhalten wir mit dem komplexen Poynting-Vektor

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t))$$

den **Wirk-** und **Blindleistungsanteil** direkt durch $\Re\{\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\mathbf{r})\}$ bzw. $\Im\{\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\mathbf{r})\}$

- **Wichtig:** Der reelle und komplexe Poynting-Vektor werden lediglich durch den Unterstrich unterschieden

Aufgabe 4

Gegeben sei, in komplexer Zeigerschreibweise, das elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}(z, t)$ einer harmonischen ebenen Welle im Vakuum, die sich in $+z$ -Richtung ausbreitet

$$\underline{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_y .$$

- a) Bestimmen Sie das zugehörige magnetische Feld aus dem Induktionsgesetz für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit $\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j \omega \mu \underline{\mathbf{H}}$.
- b) Ermitteln Sie das (reellwertige) elektrische und magnetische Feld aus den Darstellungen in komplexer Zeigerschreibweise.

Hinweis: Es gelte $\underline{E}_0 = E_0 \exp(j \varphi)$.

- c) Berechnen Sie den reellen Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ der sich ausbreitenden Welle. Bestimmen Sie anschließend den zeitlichen Mittelwert über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- d) Welche Informationen liefern die Ergebnisse aus c) über den Blind- und Wirkleistungstransport durch die ebene Welle?
- e) Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor $\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Teil d).
- f) Das elektrische Feld weise nun eine Phasenverschiebung ϕ von 90° bzw. 180° gegenüber dem magnetischen Feld auf. Wie wirken sich diese Phasenverschiebungen auf den komplexen Poynting-Vektor und den Leistungstransport durch die ebene Welle aus?

Hinweis: ϕ und φ sind bewusst gewählt und bezeichnen zwei unabhängige Parameter.

Definition der Polarisation

- Polarisation elektromagnetischer Welle: Schwingungsrichtung und deren zeitliche & räumliche Entwicklung in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- **Wichtig:** Unterscheide die Polarisation einer Welle von dem elektrischen Polarisationsfeld im Medium
- Elektrisches Polarisationsfeld beschreibt Wechselwirkung des Mediums mit einem externen elektrischen Feld
- Rückblende: Jede zeitharmonische ebene Welle ist Superposition zweier unabhängiger Wellen, deren E- und H-Feld-Komponenten jeweils senkrecht zueinander sind (drei-Finger-Regel)
- Beispiel (Ausbreitung entlang z):

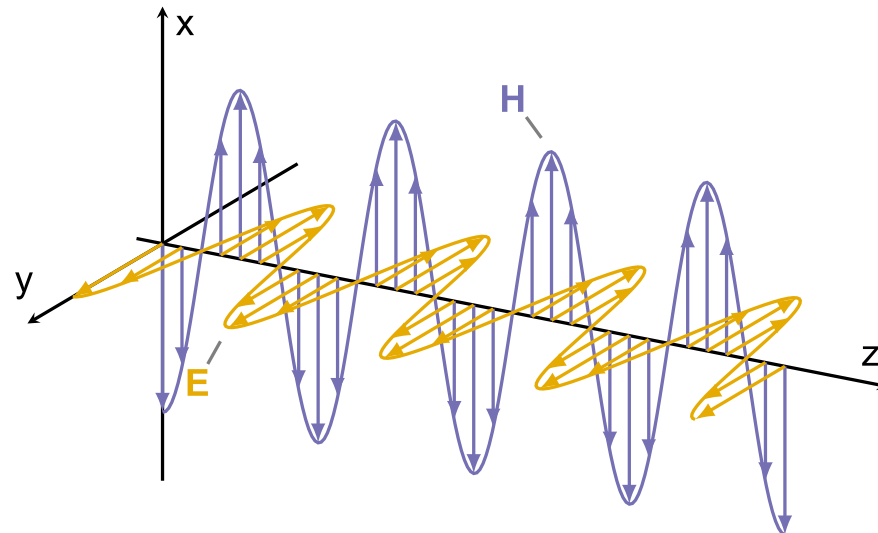
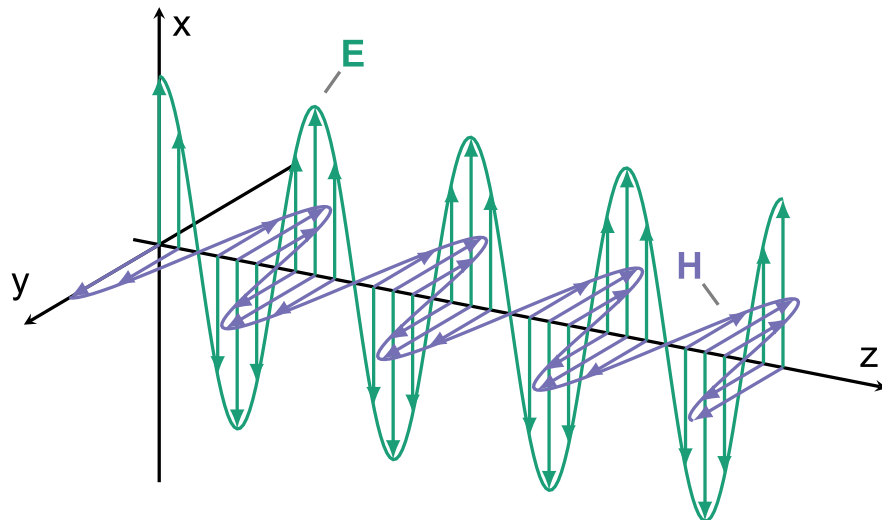
$$E_x(z, t) = E_{x,0} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$
$$E_y(z, t) = E_{y,0} \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$

Polarisation ebener Wellen

- Rückblende: Jede zeitharmonische ebene Welle ist Superposition zweier unabhängiger Wellen, deren E- und H-Feld-Komponenten jeweils senkrecht zueinander sind (drei-Finger-Regel)
- Beispiel (Ausbreitung entlang +z):

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t) \mathbf{e}_x = E_{x,0} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{E}(z, t) = E_y(z, t) \mathbf{e}_y = E_{y,0} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \mathbf{e}_y$$



Polarisationsellipsen (I)

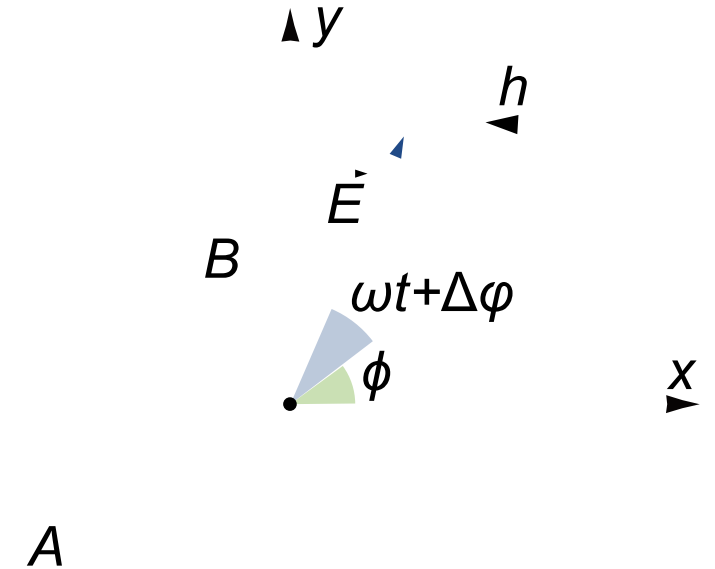
- Transversaler E-Feldvektor $\mathbf{E}^\perp$ in $z = 0$, mit $E_{0,x} = a_x E_0$, $E_{0,y} = a_y E_0$ und $a_x^2 + a_y^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^\perp(t) &= E_0 \begin{pmatrix} a_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ a_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{pmatrix} \\ &= E_0 \begin{pmatrix} a_x \cos(\varphi_x) \cos(\omega t) - a_x \sin(\varphi_x) \sin(\omega t) \\ a_y \cos(\varphi_y) \cos(\omega t) - a_y \sin(\varphi_y) \sin(\omega t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Form einer um den Koordinatenursprung gedrehten Ellipse (Winkel ϕ) mit Achsen A und B :

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos(\omega t) \\ B \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

- → die Spitze von $\mathbf{E}^\perp$ verläuft entlang einer Ellipse



Z-Achse zeigt aus Zeichenebene heraus! Bei der gegebenen Drehrichtung linksdrehende Pol.

Polarisationsellipsen (II)

- Für bestimmte a_x, a_y, φ_x und φ_y entartet die Ellipse zu einem Kreis oder einer Linie:
- Beträgt die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi \rightarrow$ Ellipse entartet zu Linie $\rightarrow$ lineare Polarisation
- Beträgt die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ **und** es gilt $a_x = a_y \rightarrow$ Ellipse entartet zu Kreis $\rightarrow$ zirkuläre Polarisation



Visualisierung mit MATLAB-Skript

Jones-Vektor

- Rückgriff auf komplexe Zeigerschreibweise für transversale Feldkomponenten

$$\underline{E}_x(z, t) = E_0 \underline{a}_x \exp(j(\omega t - kz))$$

$$\underline{E}_y(z, t) = E_0 \underline{a}_y \exp(j(\omega t - kz))$$

- mit den normierten komplexen Amplituden

$$\underline{a}_x = a_x \exp(j\varphi_x)$$

$$\underline{a}_y = a_y \exp(j\varphi_y)$$

Auch hier gilt: $a_x^2 + a_y^2 = 1$

- ermöglicht die Darstellung des Polarisationszustands mithilfe des Jones-Vektors

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 a) & b)

Für sich in z -Richtung ausbreitende ebene Wellen in homogenen, linearen Medien liefert die Wellengleichung zwei unabhängige Differentialgleichungen für die x - und y -Komponenten des elektrischen (bzw. magnetischen) Feldes. Diese beiden Komponenten sind folglich unabhängig voneinander und beeinflussen sich (im linearen Medium) nicht gegenseitig. Die Polarisation des resultierenden elektrischen Feldes beschreibt die Schwingungsrichtung, welche durch das Amplituden- und Phasenverhältnis der transversalen Komponenten bestimmt wird. Als Ansatz für diese Transversalkomponenten in $z = 0$ wählen wir mit $\omega = 2\pi f$

$$\begin{aligned} E_x(z = 0, t) &= E_{x,0} \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ E_y(z = 0, t) &= E_{y,0} \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y), \end{aligned}$$

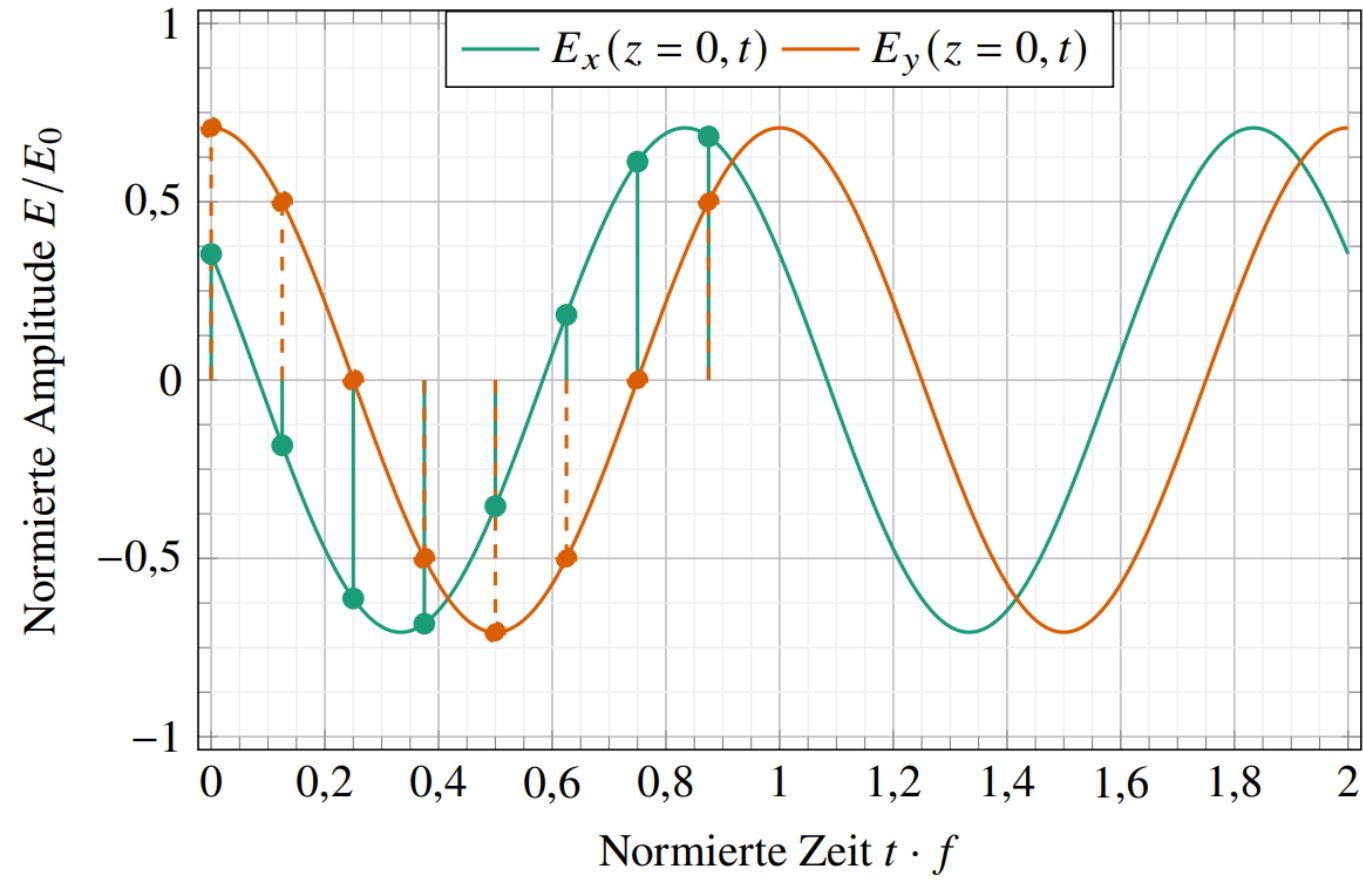
wobei zunächst folgende Parameter bekannt seien: $E_0, a_x = 1/\sqrt{2}, \varphi_x = \pi/3, \varphi_y = 0$.

- Ermitteln Sie die normierte Amplitude a_y .
- Skizzieren Sie den Verlauf von $E_x(z = 0, t)$ und $E_y(z = 0, t)$ im Intervall von $0 \leq t \leq \frac{2}{f}$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

Aufgabe 5 c)-e)

- c) Stellen Sie nun die elektrischen Feldkomponenten mithilfe der komplexen Zeigerschreibweise dar. Wie lautet der Jones-Vektor $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{a}_x, \underline{a}_y)^T$ der gesamten Welle?
- d) Skizzieren Sie die Projektion des resultierenden E-Feldvektors $\mathbf{E}(t) = E_x(t) \mathbf{e}_x + E_y(t) \mathbf{e}_y$ zu den Zeitpunkten $t = 0, \frac{1}{8f}, \frac{2}{8f}, \dots, \frac{7}{8f}$ in einen E_x - E_y Graphen. Um welchen Polarisationszustand handelt es sich unter Annahme der gegebenen Parameter? Berücksichtigen Sie ggf. auch die Umlaufrichtung des Feldvektors.
- e) Wie muss die Phase φ_x angepasst werden, um eine linear polarisierte Welle zu erhalten? Wie müssen wir die Parameter des Jones-Vektor wählen, um eine zirkular polarisierte Welle zu beobachten?

Zu A5 b)



Zu A5 d)

