

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 02

Abgabe bis zum 14.11.2022 um 11:30 via ILIAS

Aufgabe 4:

Gegeben sei, in komplexer Zeigerschreibweise, das elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}(z, t)$ einer harmonischen ebenen Welle im Vakuum, die sich in $+z$ -Richtung ausbreitet

$$\underline{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_y.$$

- a) Bestimmen Sie das zugehörige magnetische Feld aus dem Induktionsgesetz für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit $\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j \omega \mu \underline{\mathbf{H}}$.

Ges: Magnetisches Feld $\underline{\mathbf{H}}$

Geg: Induktionsgesetz $\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j \omega \mu \underline{\mathbf{H}}$

Umformen des Induktionsgesetzes führt auf

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}} &= \frac{j}{\omega \mu} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} \\ &= \frac{j}{\omega \mu} E_0 (\nabla \times (\exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_y)) \\ &= \frac{j}{\omega \mu} E_0 \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{j}{\omega \mu} E_0 \begin{pmatrix} j k_z \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{k_z}{\omega \mu} E_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_x \\ &= -\frac{E_0}{Z_0} \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Da $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$ gilt, können wir an dieser Stelle den Wellenwiderstand im Vakuum Z_0 verwenden.

- b) Ermitteln Sie das (reellwertige) elektrische und magnetische Feld aus den Darstellungen in komplexer Zeigerschreibweise.

Hinweis: Es gelte $\underline{E}_0 = E_0 \exp(j \varphi)$.

Ges: Elektrische und magnetische Feldvektoren $\mathbf{E}, \mathbf{H}$

Geg: Zugehörige komplexe Amplituden $\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{E}_0 = E_0 \exp(j \varphi)$.

Mit $\underline{E}_0 = E_0 \exp(j\varphi)$ und der Eulerschen Formel $\exp(jx) = \cos(x) + j \sin(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \Re \{ \underline{E} \} \\ &= \Re \{ E_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \} \mathbf{e}_y \\ &= E_0 \Re \{ \exp(j(\omega t - k_z z + \varphi)) \} \mathbf{e}_y \\ &= E_0 \Re \{ \cos(\omega t - k_z z + \varphi) + j \sin(\omega t - k_z z + \varphi) \} \mathbf{e}_y \\ &= E_0 \cos(\omega t - k_z z + \varphi) \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Analog dazu erhalten wir für das magnetische Feld

$$\mathbf{H} = -\frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega t - k_z z + \varphi) \mathbf{e}_x.$$

- c) Berechnen Sie den reellen Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ der sich ausbreitenden Welle. Bestimmen Sie anschließend den zeitlichen Mittelwert über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ges: Reeller Poynting-Vektor $\mathbf{S}$, sowie der zeitliche Mittelwert $\bar{\mathbf{S}}$

Geg: Elektrisches Feld $\mathbf{E}$, magnetisches Feld $\mathbf{H}$

Wegen $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$ erhalten wir für den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(z, t) &= (E_0 \cos(\omega t - k_z z + \varphi) \mathbf{e}_y) \times (-E_0/Z_0 \cos(\omega t - k_z z + \varphi) \mathbf{e}_x) \\ &= \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - k_z z + \varphi) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} (1 + \cos(2\omega t - 2k_z z + 2\varphi)) \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

wobei wir $\cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$ ausgenutzt haben. Diese Umformung wird uns im Folgenden bei der Berechnung des zeitlichen Mittelwerts $\bar{\mathbf{S}}$ über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ von Nutzen sein. Diesen Mittelwert ermitteln wir gemäß

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} \frac{1}{T} \left(\int_0^T 1 + \cos(2\omega t - 2k_z z + 2\varphi) dt \right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Da der Poynting-Vektor gegenüber den Feldern die doppelte Schwingungsfrequenz aufweist, integrieren wir hier über zwei Perioden von $\cos(2\omega t - 2k_z z + 2\varphi)$. Entsprechend verschwindet das Integral über den Cosinus (rechnerischer Nachweis siehe unten) und wir erhalten

$$\bar{\mathbf{S}}(z) = \frac{E_0^2}{2Z_0} \frac{1}{T} \left(\int_0^T 1 dt \right) \mathbf{e}_z = \frac{E_0^2}{2Z_0} \mathbf{e}_z.$$

Nachweis:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(2\omega t - 2k_z z + 2\varphi) dt &= \left[\frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2k_z z + 2\varphi) \right]_{t=0}^T \\ &= \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega T - 2k_z z + 2\varphi) - \sin(-2k_z z + 2\varphi)] \\ &= \frac{1}{2\omega} [\underbrace{\sin(4\pi - 2k_z z + 2\varphi) - \sin(-2k_z z + 2\varphi)}_{=\sin(-2k_z z + 2\varphi)}] = 0\end{aligned}$$

- d) Welche Informationen liefern die Ergebnisse aus c) über den Blind- und Wirkleistungstransport durch die ebene Welle?

Ges: Blind- & Wirkleistungstransport

Geg: Reeller Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ und dessen Mittelwert $\bar{\mathbf{S}}$

Vergleichen wir den Ausdruck für $\mathbf{S}$ aus Aufgabenteil c)

$$\mathbf{S}(z, t) = \frac{E_0^2}{2Z_0} (1 + \cos(2\omega t - 2k_z z + 2\varphi)) \mathbf{e}_z$$

mit der folgenden Beziehung aus der Vorlesung, wobei ϕ die Phasenverschiebung (hier $\phi = 0$) zwischen E- und H-Feld darstellt

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \propto \underbrace{(1 + \cos(2\omega t)) \cos(\phi)}_{\text{Wirkleistungsanteil}} - \underbrace{\sin(2\omega t) \sin(\phi)}_{\text{Blindleistungsanteil}} = (1 + \cos(2\omega t)) ,$$

erkennen wir, dass im gegebenen Fall ein reiner Wirkleistungstransport in +z-Richtung stattfindet.

- e) Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor $\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Teil d).

Ges: Komplexer Poynting-Vektor $\underline{\mathbf{S}}$

Geg: Komplexe Amplituden des elektrischen Feldes $\underline{\mathbf{E}}$ und magnetischen Feldes $\underline{\mathbf{H}}$

Den komplexen Poynting-Vektor erhalten wir gemäß

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{E_0^2}{2Z_0} (\exp(j(\omega t - k_z z + \varphi)) \mathbf{e}_y \times (-\exp(-j(\omega t - k_z z + \varphi)) \mathbf{e}_x)) .$$

Wegen $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{E_0^2}{2Z_0} \exp(j(\omega t - k_z z + \varphi)) \exp(-j(\omega t - k_z z + \varphi)) \mathbf{e}_z = \frac{E_0^2}{2Z_0} \mathbf{e}_z .$$

Das Ergebnis ist identisch zu dem zeitlichen Mittelwert des reellen Poynting-Vektor $\bar{\mathbf{S}}$. Dieses Resultat ist zu erwarten, da der Realteil des komplexen Poynting-Vektors gerade den Wirkleistungsanteil widerspiegelt.

- f) Das elektrische Feld weise nun eine Phasenverschiebung ϕ von 90° bzw. 180° gegenüber dem magnetischen Feld auf. Wie wirken sich diese Phasenverschiebungen auf den komplexen Poynting-Vektor und den Leistungstransport durch die ebene Welle aus?

Hinweis: ϕ und φ sind bewusst gewählt und bezeichnen zwei unabhängige Parameter.

Ges: Einfluss einer Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld auf den komplexen Poynting-Vektor bzw. den Leistungstransport

Geg: Phasenverschiebung von $90^\circ \hat{=} \frac{\pi}{2}$ bzw. $180^\circ \hat{=} \pi$

1. Fall, $\Phi = 90^\circ$:

Zunächst berechnen wir erneut den komplexen Poynting-Vektor, wobei das elektrische Feld gemäß der zusätzlichen Phasenverschiebung mit $\exp(j \frac{\pi}{2})$ multipliziert wird

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}} &= \frac{E_0^2}{2Z_0} \exp(j(\omega t - k_z z + \varphi + \phi)) \exp(-j(\omega t - k_z z + \varphi)) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} \exp\left(j \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_z \\ &= j \frac{E_0^2}{2Z_0} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass der komplexe Poynting-Vektor nun rein imaginär ist. Es wird also nur Blindleistung und keine Wirkleistung von der ebenen Welle transportiert.

2. Fall, $\Phi = 180^\circ$:

Wieder berechnen wir den komplexen Poynting-Vektor, wobei das elektrische Feld gemäß der zusätzlichen Phasenverschiebung mit $\exp(j \pi) = -1$ multipliziert wird

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}} &= \frac{E_0^2}{2Z_0} \exp(j(\omega t - k_z z + \varphi + \phi)) \exp(-j(\omega t - k_z z + \varphi)) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} \exp(j \pi) \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{E_0^2}{2Z_0} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass der komplexe Poynting-Vektor wieder rein reell ist, allerdings wird die Wirkleistung nun in $-z$ -Richtung transportiert.

Aufgabe 5:

Für sich in z -Richtung ausbreitende ebene Wellen in homogenen, linearen Medien liefert die Wellengleichung zwei unabhängige Differentialgleichungen für die x - und y -Komponenten des elektrischen (bzw. magnetischen) Feldes. Diese beiden Komponenten sind folglich unabhängig voneinander und beeinflussen sich (im linearen Medium) nicht gegenseitig. Die Polarisation des resultierenden elektrischen Feldes beschreibt die Schwingungsrichtung, welche durch das Amplituden- und Phasenverhältnis der transversalen Komponenten bestimmt wird. Als Ansatz für diese Transversalkomponenten in $z = 0$ wählen wir mit $\omega = 2\pi f$

$$E_x(z = 0, t) = E_{x,0} \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(z = 0, t) = E_{y,0} \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y),$$

wobei zunächst folgende Parameter bekannt seien: $E_0, a_x = 1/\sqrt{2}, \varphi_x = \pi/3, \varphi_y = 0$.

- a) Ermitteln Sie die normierte Amplitude a_y .

Ges: a_y

Geg: a_x , Definition der normierten Amplitude $a_x^2 + a_y^2 = 1$

Mit der Definition der normierten Amplituden $a_x^2 + a_y^2 = 1$ lässt sich a_y folgendermaßen bestimmen:

$$a_y = \sqrt{1 - a_x^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- b) Skizzieren Sie den Verlauf von $E_x(z = 0, t)$ und $E_y(z = 0, t)$ im Intervall von $0 \leq t \leq \frac{2}{f}$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

Ges: Graphische Darstellung der zeitlichen Verläufe von E_x und E_y

Geg: Definition der normierten Amplitude $a_x^2 + a_y^2 = 1$

Abbildung 1 stellt den gesuchten zeitlichen Verlauf dar.

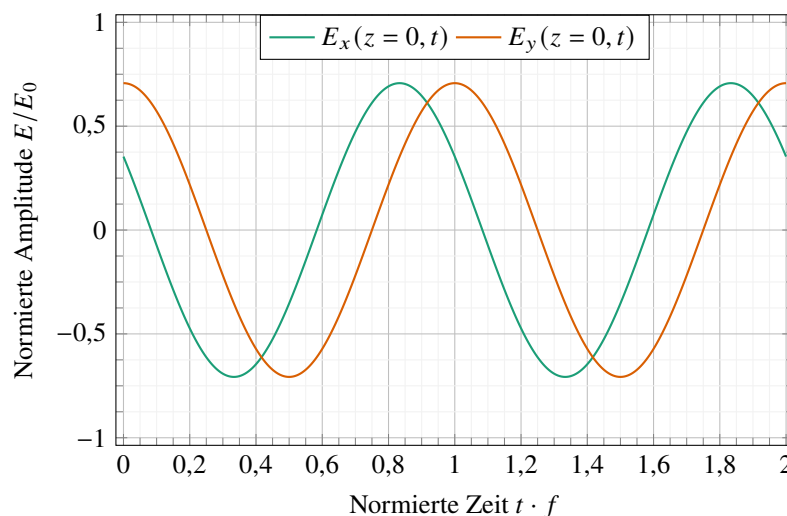


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf der Amplituden von E_x und E_y in $z = 0$.

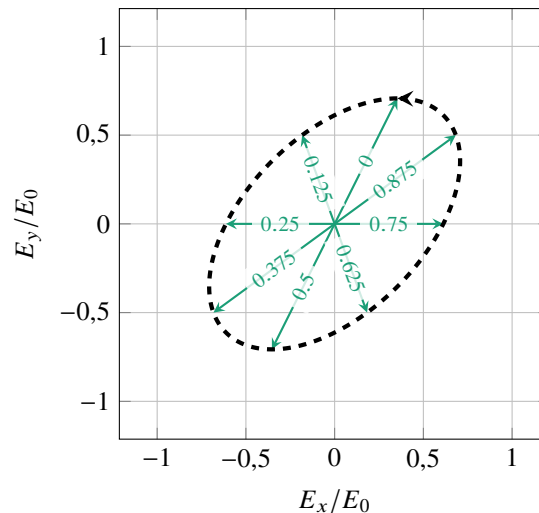


Abbildung 2: E-Feldvektor in der E_x - E_y -Ebene zu den Zeitpunkten $t \cdot f$.

- c) Stellen Sie nun die elektrischen Feldkomponenten mithilfe der komplexen Zeigerschreibweise dar. Wie lautet der Jones-Vektor $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{a}_x, \underline{a}_y)^T$ der gesamten Welle?

Ges: Feldkomponenten in komplexer Zeigerschreibweise, Jones-Vektor $\underline{\mathbf{a}}$

Geg: Reelle Feldkomponenten, $a_x, a_y, \varphi_x, \varphi_y$

Die zeitliche Änderung des Feldes, zuvor beschrieben mit der Cosinus-Funktion, lässt sich in der komplexen Schreibweise mithilfe der Exponentialfunktion ausdrücken. Die transversalen Feldkomponenten ergeben sich so zu

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_x \exp(j(\omega t + \varphi_x)) = E_0 \underline{a}_x \exp(j \omega t) \\ E_y(t) &= E_y \exp(j(\omega t + \varphi_y)) = E_0 \underline{a}_y \exp(j \omega t) . \end{aligned}$$

Hier beinhalten die komplexen normierten Amplituden $\underline{a}_x$ und $\underline{a}_y$ nicht nur Informationen über das Amplitudenverhältnis, sondern auch die Phasenbeziehung der beiden Wellen. Der Jones-Vektor fasst diese beiden komplexen normierten Amplituden in einem Vektor zusammen, der in unserem Fall folgendermaßen lautet

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \exp(j \varphi_x) \\ a_y \exp(j \varphi_y) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp(j \frac{\pi}{3}) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- d) Skizzieren Sie die Projektion des resultierenden E-Feldvektors $\mathbf{E}(t) = E_x(t) \mathbf{e}_x + E_y(t) \mathbf{e}_y$ zu den Zeitpunkten $t = 0, \frac{1}{8f}, \frac{2}{8f}, \dots, \frac{7}{8f}$ in einen E_x - E_y Graphen. Um welchen Polarisationszustand handelt es sich unter Annahme der gegebenen Parameter? Berücksichtigen Sie ggf. auch die Umlaufrichtung des Feldvektors.

Ges: Graphische Darstellung der zeitlichen Verläufe von E_x und E_y

Geg: Definition der normierten Amplitude $a_x^2 + a_y^2 = 1$

Abbildung 2 zeigt die Projektion des gesuchten elektrischen Feldvektors zusammen mit der resultierenden Polarisationsellipse. Offenbar ist die betrachtete Welle linksdrehend elliptisch polarisiert, wobei wir die Drehrichtung aus der Perspektive eines Betrachters definieren, auf den die Welle zuläuft.

Erinnerung: Im Allgemeinen können wir den Polarisationszustand einer Welle folgendermaßen bestimmen: Haben die beiden transversalen Feldkomponenten eine Phasendifferenz von $m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$, so ergibt sich ein linearer Polarisationszustand. Bei einer Phasendifferenz von einem ungeraden Vielfachen von $(2m+1)\pi/2$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und gleich großen Feldamplituden $E_x = E_y$ bzw. $a_x = a_y$ ergibt sich ein zirkularer Polarisationszustand. Mit anderen Phasendifferenzen oder ungleichen Amplituden, wie es hier der Fall ist, ergeben sich elliptische Polarisationszustände.

- e) Wie muss die Phase φ_x angepasst werden, um eine linear polarisierte Welle zu erhalten? Wie müssen wir die Parameter des Jones-Vektor wählen, um eine zirkular polarisierte Welle zu beobachten?

Für einen linearen Polarisationszustand wird ein Phasendifferenz von $m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$ benötigt. Angenommen wir können die Phase φ_y nicht beeinflussen, muss φ_x justiert werden. Die nächstliegenden Phasen für eine linear polarisierte Phase ist $\varphi_x = 0$, d.h. die x -Komponente der Welle muss in der x -Ebene um diese Phase verzögert werden.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu