EMW Übungsblatt 03

Abgabe bis zum 21.11.2022 um 11:30 via ILIAS

Aufgabe 6:

Wir betrachten eine ebene Welle, welche in einem linearen, dispersiven Medium, d.h. $\underline{k}(\omega) = \omega/c_0 \underline{n}(\omega) = \beta(\omega) - \mathrm{j}\,\alpha(\omega)$ in z-Richtung propagiert. Der elektrische Feldvektor zeigt in x-Richtung und hat den komplexen Zeiger

$$\underline{E}_x(z,t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}(\omega) z)}\;.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des komplexen Poynting-Vektors, dass die Leistung der Welle mit $\exp(-2\alpha z)$ exponentiell in Ausbreitungsrichtung gedämpft wird.

Im Folgenden soll die Wirkung der Dispersion auf ein Wellenpaket untersucht werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich die Welle in einem Dielektrikum ausbreitet, welches im betrachteten Frequenzbereich verlustfrei ist, d.h. $\alpha(\omega) = 0$. Dieses Wellenpaket können wir durch die Überlagerung vieler monochromatischer Wellen mit verschiedenen Frequenzen (siehe Fourier-Reihe) darstellen. Die Form der Welle soll ein Gauß'scher Puls sein, welcher in positive z-Richtung propagiert und ω_0 als Trägerfrequenz besitzt. Nehmen Sie an, dass der Puls an der Stelle $z = 0$ gegeben ist als

$$\underline{E}_{x,\mathrm{Gauss}}(z=0,t) = E_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2(0)}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0 t}\;.$$

Hierbei gibt $\sigma_t^2(0)$ die Varianz der Gauß-Funktion an der Stelle $z = 0$ an.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}_{x,\mathrm{Gauss}}(z,t)$ an einer Stelle $z > 0$. Gehen Sie in wie folgt vor:

   i) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\underline{\tilde{E}}_{x,\mathrm{Gauss}}(z=0,\omega) = \mathcal{F}\{\underline{E}_{x,\mathrm{Gauss}}(z=0,t)\}$ des Pulses, um die spektralen Feldanteile des Wellenpakets in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit (der Frequenz) zu formulieren.

   Hinweis:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0 t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4a}}$$

   ii) Bestimmen Sie $\underline{\tilde{E}}_{x,\mathrm{Gauss}}(z,\omega)$. Nehmen Sie dazu verlustfreie Propagation in $+z$-Richtung im Medium an und multiplizieren Sie $\underline{\tilde{E}}_{x,\mathrm{Gauss}}(z=0,\omega)$ mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(\omega)z}$. Approximieren Sie die Phasenkonstante $\beta(\omega)$ mithilfe der Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung. Setzen Sie die Taylorentwicklung von $\beta(\omega)$ in $\underline{\tilde{E}}_{x,\mathrm{Gauss}}(z,\omega)$ ein, um Exponenten zu erhalten, welche nur noch von der Variablen ω abhängig sind.

   iii) Berechnen Sie nun die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}\{\underline{\tilde{E}}_{x,\mathrm{Gauss}}(z,\omega)\}$, um das elektrische Feld in $z > 0$ in Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten $\underline{E}_{x,\mathrm{Gauss}}(z,t)$. Die inverse Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion ist gegeben durch

   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{e}^{-at^2}\;.$$

   Hinweis: Nutzen Sie folgende Beziehung um den Integranden zu vereinfachen

   $$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \qquad \text{und} \qquad \underline{\sigma}_t^2(z) = \sigma_t^2(0) + \mathrm{j}\,\beta_2 z\,.$$

c) In vorherigem Aufgabenteil haben wir gesehen, dass ein gaußförmiges Wellenpaket nach Propagation in z-Richtung erneut einen Gauß ergibt. Mit dem gegebenen Hinweis haben wir nun allerdings eine Gauß-Funktion mit komplexer Varianz $\underline{\sigma}_t^2(z)$. Zeigen Sie, dass dieser propagierende Gauß-Puls in der Tat eine reellwertige Varianz $\sigma^2(z)$ besitzt

$$|\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z,t)| = E_0 \frac{\left|\sqrt{\sigma_t(0) + \beta_2 z}\right|}{\sigma(z)} \, \mathrm{e}^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2\sigma^2(z)}} \; .$$

Nutzen Sie hierfür die Substitution $\sigma^2(z) = \sigma_t^2(0) + (\beta_2 z/\sigma_t(0))^2$.

d) Erklären Sie anschaulich, welchen Effekt β_0, β_1 und β_2 auf die elektromagnetische Welle haben.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu