

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 03

Abgabe bis zum 21.11.2022 um 11:30 via ILIAS

Aufgabe 6:

Wir betrachten eine ebene Welle, welche in einem linearen, dispersiven Medium, d.h. $\underline{k}(\omega) = \omega/c_0 \underline{n}(\omega) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$ in z -Richtung propagiert. Der elektrische Feldvektor zeigt in x -Richtung und hat den komplexen Zeiger

$$\underline{E}_x(z, t) = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}(\omega)z)}.$$

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des komplexen Poynting-Vektors, dass die Leistung der Welle mit $\exp(-2\alpha z)$ exponentiell in Ausbreitungsrichtung gedämpft wird.

Ges: Leistungsabfall mit $\exp(-2\alpha z)$ zeigen

Geg: Elektrisches Feld $\underline{E}_x(z, t)$, Wellenzahl $\underline{k}(\omega) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$

Mit Hilfe des Wellenwiderstandes Z lässt sich das elektrische Feld in Abhängigkeit vom magnetischen Feld beschreiben

$$\underline{E} = Z(\underline{H} \times \underline{e}_a).$$

Umformen nach dem magnetischen Feld ergibt mit der Beziehung $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{b}(\underline{c} \cdot \underline{a}) - \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c})$ und der Tatsache, dass wir ein Rechtsschraubensystem betrachten,

$$\begin{aligned} Z(\underline{H} \times \underline{e}_a) \times \underline{e}_a &= \underline{E} \times \underline{e}_a \\ \underline{e}_a(\underline{e}_a \cdot \underline{H}) - \underline{H}(\underline{e}_a \cdot \underline{e}_a) &= \frac{1}{Z}(\underline{E} \times \underline{e}_a) \\ -\underline{H} &= \frac{1}{Z}(\underline{E} \times \underline{e}_a) \\ \underline{H} &= \frac{1}{Z}(\underline{e}_a \times \underline{E}). \end{aligned}$$

Mit $\underline{E} = \underline{E}_x(z, t)\underline{e}_x$ und $\underline{e}_a = \underline{e}_z$ folgt somit

$$\underline{H}_z(z, t) = \frac{1}{Z}\underline{E}_z(z, t).$$

Einsetzen der Felder in den komplexen Poynting-Vektor $\underline{S} = 1/2(\underline{E} \times \underline{H}^*)$ ergibt

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2Z}|\underline{E}|^2 \\ &= \frac{E_0^2}{2Z} e^{j(\omega t - \beta(\omega)z) - \alpha(\omega)z} e^{-j(\omega t - \beta(\omega)z) - \alpha(\omega)z} \\ &= \frac{E_0^2}{2Z} e^{-2\alpha(\omega)z}. \end{aligned}$$

Aus obiger Gleichung ist ersichtlich, dass der Imaginärteil von $\underline{k}(\omega)$ für eine exponentielle Dämpfung der elektromagnetischen Welle verantwortlich ist.

Im Folgenden soll die Wirkung der Dispersion auf ein Wellenpaket untersucht werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich die Welle in einem Dielektrikum ausbreitet, welches im betrachteten Frequenzbereich verlustfrei ist, d.h. $\alpha(\omega) = 0$. Dieses Wellenpaket können wir durch die Überlagerung vieler monochromatischer Wellen mit verschiedenen Frequenzen (siehe Fourier-Reihe) darstellen. Die Form der Welle soll ein Gauß'scher Puls sein, welcher in positive z -Richtung propagiert und ω_0 als Trägerfrequenz besitzt. Nehmen Sie an, dass der Puls an der Stelle $z = 0$ gegeben ist als

$$\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2(0)}} e^{j\omega_0 t}.$$

Hierbei gibt $\sigma_t^2(0)$ die Varianz der Gauß-Funktion an der Stelle $z = 0$ an.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$ an einer Stelle $z > 0$. Gehen Sie in wie folgt vor:

- i) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, \omega) = \mathcal{F}\{\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, t)\}$ des Pulses, um die spektralen Feldanteile des Wellenpakets in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit (der Frequenz) zu formulieren.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4a}}$$

Ges: Elektrisches Feld $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, \omega) = \mathcal{F}\{\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, t)\}$ im Frequenzbereich

Geg: Elektrisches Feld $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, t)$ im Zeitbereich, Hinweis

Der Hinweis zeigt die Fourier-Transformierte einer Einhüllenden Gauß-Funktion (der Gauß-Puls) e^{-at^2} , welcher auf eine Trägerfrequenz ω_0 , hier impliziert durch den Exponentialterm $e^{j\omega_0 t}$, moduliert ist. Abbildung 2, links, zeigt eine Momentaufnahme $t = \text{const.}$ des Wellenpakets im Zeitbereich. Vergleicht man den Hinweis mit $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$, so wird deutlich, dass $a = 1/(2\sigma_t^2(0))$. Die Fouriertransformierte ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, \omega) &= \mathcal{F}\{\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, t)\} \\ &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2(0)}} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= 2\pi\sigma_t(0)E_0 e^{-\frac{\sigma_t^2(0)(\omega - \omega_0)^2}{2}}. \end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir die Notation mit der Tilde, um zu verdeutlichen, dass es sich hier um die spektralen Anteile der Welle handelt, welche von der Frequenz, statt der Zeit, abhängig sind. Bei genauerer Betrachtung von $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$ erkennen wir, dass der Exponentialterm wieder einer Gaußverteilung mit $a = \sigma_t^2(0)/2$ entspricht und um ω_0 verschoben ist.

- ii) Bestimmen Sie $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)$. Nehmen Sie dazu verlustfreie Propagation in $+z$ -Richtung im Medium an und multiplizieren Sie $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, \omega)$ mit $\exp(-j\beta(\omega)z)$. Approximieren Sie die Phasenkonstante $\beta(\omega)$ mithilfe der Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung. Setzen Sie die Taylorentwicklung von $\beta(\omega)$ in $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)$ ein, um Exponenten zu erhalten, welche nur noch von der Variablen ω abhängig sind.

Ges: $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)$ für $z > 0$

Geg: $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z = 0, \omega)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, verlustfreies Medium $\alpha = 0$

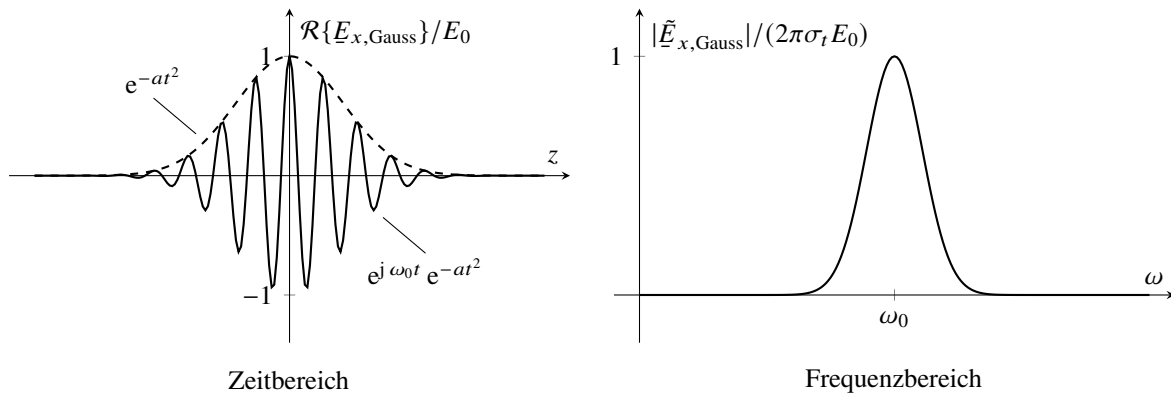


Abbildung 1: Die linke Abbildung zeigt den Realteil eines Wellenpaketes mit Gauß'scher Einhüllenden moduliert um eine Trägerfrequenz ω_0 . Die rechte Abbildung zeigt den Betrag des fouriertransformierten Gauß-Pulses, welche ebenso gaußförmig ist.

Im Zeitbereich propagiert unsere Welle, bzw. unser Puls, mit dem komplexen Exponentialterm $\exp(-j\beta(\omega)z)$

$$\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t) = \underline{E}_{x,\text{Gauss}}(0, t) \exp(-j\beta(\omega)z) .$$

Wenn $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$ Fourier transformieren, dann bleibt dieser Exponentialterm im Frequenzbereich erhalten, da er unabhängig von t ist und man ihn daher aus dem Fourier-Integral ziehen kann. Wir multiplizieren also den komplexen Exponentialterm $\exp(-j\beta(\omega)z)$ zu $\tilde{E}(z=0, \omega)$. Beachten Sie, dass wir auch im Aufgabenteil i) diesen Exponentialterm berücksichtigt haben. Zu Beginn der Propagation $z=0$ resultiert dieser allerdings zu eins und erscheint daher nicht in unserer Rechnung. Multiplikation mit $\exp(-j\beta(\omega)z)$ resultiert zu

$$\tilde{E}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega) = 2\pi\sigma_t(0)E_0 e^{-\frac{\sigma_t^2(0)(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-j\beta(\omega)z} .$$

Da wir wissen, dass die spektralen Anteile unseres Gauß-Pulses im Frequenzbereich wieder einen gaußförmigen Verlauf um ω_0 haben, interessieren wir uns insbesondere für diesen Frequenzbereich. Die Funktion von $\beta(\omega)$ können wir um diesen Arbeitspunkt mittels der Taylourreihenentwicklung approximieren

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &\approx \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\omega - \omega_0)^m \left. \frac{d^m \beta(\omega)}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0} \\ &= \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Schließlich können wir dies in $\tilde{E}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)$ einsetzen

$$\tilde{E}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega) = 2\pi\sigma_t(0)E_0 e^{-\frac{\sigma_t^2(0)(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-j\beta_0 z} e^{-j\beta_1(\omega-\omega_0)z} e^{-j\frac{\beta_2}{2}(\omega-\omega_0)^2 z} .$$

- iii) Berechnen Sie nun die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{E}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)\}$, um das elektrische Feld in $z > 0$ in Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$. Die inverse Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion ist gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} e^{j\omega t} d\omega = e^{-at^2} .$$

Hinweis: Nutzen Sie folgende Beziehung um den Integranden zu vereinfachen

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad \text{und} \quad \sigma_t^2(z) = \sigma_t^2(0) + j\beta_2 z.$$

Ges: $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$

Geg: $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)$

Um das elektrische Feld $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$ im Zeitbereich für eine Distanz $z > 0$ zu erhalten, müssen wir $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)$ invers Fourier transformieren

$$\begin{aligned} \underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\sigma_t(0)E_0 e^{-\frac{\sigma_t^2(0)(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-j\beta_0 z} e^{-j\beta_1(\omega-\omega_0)z} e^{-j\frac{\beta_2}{2}(\omega-\omega_0)^2 z} e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{-j\beta_0 z} \sigma_t(0)E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_t^2(0)(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-j\beta_1(\omega-\omega_0)z} e^{-j\frac{\beta_2}{2}(\omega-\omega_0)^2 z} e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Zur einfacheren Handhabung substituieren wir $\sigma_t^2(z) = \sigma_t^2(0) + j\beta_2 z$ und $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

$$\begin{aligned} \underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t) &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \sigma_t(0)E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_t^2(0)\Delta\omega^2}{2}} e^{-j\beta_1\Delta\omega z} e^{-j\frac{\beta_2}{2}\Delta\omega^2 z} e^{j\Delta\omega t} d\Delta\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \frac{\sigma_t(0)}{\sigma_t(z)} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_t(z) e^{-\frac{\sigma_t^2(z)\Delta\omega^2}{2}} e^{-j\beta_1\Delta\omega z} e^{j\Delta\omega t} d\Delta\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \frac{\sigma_t(0)}{\sigma_t(z)} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_t(z) e^{-\frac{\sigma_t^2(z)\Delta\omega^2}{2}} e^{j\Delta\omega(t - \beta_1 z)} d\Delta\omega \\ &= E_0 \frac{\sigma_t(0)}{\sigma_t(z)} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{-\frac{(t - \beta_1 z)^2}{2\sigma_t^2(z)}}. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass das Wellenpaket $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(0, t)$ mit Varianz $\sigma_t^2(0)$ nach Propagation in z -Richtung immer noch eine Gaußform mit Varianz $\sigma_t^2(z)$ hat.

- c) In vorherigem Aufgabenteil haben wir gesehen, dass ein gaußförmiges Wellenpaket nach Propagation in z -Richtung erneut einen Gauß ergibt. Mit dem gegebenen Hinweis haben wir nun allerdings eine Gauß-Funktion mit komplexer Varianz $\sigma_t^2(z)$. Zeigen Sie, dass dieser propagierende Gauß-Puls in der Tat eine reellwertige Varianz $\sigma^2(z)$ besitzt

$$|\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)| = E_0 \frac{|\sqrt{\sigma_t(0) + \beta_2 z}|}{\sigma(z)} e^{-\frac{(t - z/v_g)^2}{2\sigma^2(z)}}.$$

Nutzen Sie hierfür die Substitution $\sigma^2(z) = \sigma_t^2(0) + (\beta_2 z / \sigma_t(0))^2$.

Ges: Zeigen, dass Varianz des propagierenden Gauß-Pulses reellwertig ist

Geg: $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$

Unser propagierender Gauß-Strahl $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$ für $z > 0$ besitzt eine komplexe Varianz $\sigma_t^2(z)$. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Varianz des Gauß-Pulses reellwertig ist. Mit der

vorherigen Substitution $\sigma_t^2(z) = \sigma_t^2(0) + j\beta_2 z$ können wir $\sigma_t^2(z)$ ausformulieren

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_t^2(z)} &= \frac{1}{\sigma_t^2(0) + j\beta_2 z} \frac{\sigma_t^2(0) - j\beta_2 z}{\sigma_t^2(0) - j\beta_2 z} \\ &= \frac{\sigma_t^2(0) - j\beta_2 z}{\sigma_t^4(0) + \beta_2^2 z^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_t^2(0) + \left(\frac{\beta_2 z}{\sigma_t(0)}\right)^2} - j \frac{\beta_2 z}{\sigma_t^2(0) \left(\sigma_t^2(0) + \left(\frac{\beta_2 z}{\sigma_t(0)}\right)^2\right)}.\end{aligned}$$

Wir führen anschließend eine neue Variable $\sigma^2(z) = \sigma_t^2(0) + (\beta_2 z / \sigma_t(0))^2$ ein

$$\frac{1}{\sigma_t^2(z)} = \frac{1}{\sigma^2(z)} - j \frac{\beta_2 z}{\sigma_t^2(0) \sigma^2(z)}.$$

Einsetzen in den Gauß-Puls $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$ ergibt

$$\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t) = E_0 \frac{\sqrt{\sigma_t(0) - j\beta_2 z}}{\sigma(z)} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{-\frac{(t - \beta_1 z)^2}{2\sigma^2(z)}} e^{j \frac{\beta_2 z}{\sigma_t^2(0) \sigma^2(z)} (t - \beta_1 z)^2}.$$

Und schließlich bilden wir den Betrag und setzen für $\beta_1 = 1/v_{\text{gr}}$, mit v_{gr} für die Gruppengeschwindigkeit, ein

$$|\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)| = E_0 \frac{\left| \sqrt{\sigma_t(0) + \beta_2 z} \right|}{\sigma(z)} e^{-\frac{(t - z/v_{\text{gr}})^2}{2\sigma^2(z)}}.$$

d) Erklären Sie anschaulich, welchen Effekt β_0 , β_1 und β_2 auf die elektromagnetische Welle haben.

Wir betrachten zunächst die einzelnen Terme in $\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega)$ und $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{E}}_{x,\text{Gauss}}(z, \omega) &= \underbrace{2\pi\sigma_t(0)E_0}_{\text{Amplitude}} \underbrace{e^{-j\beta_0 z}}_{\text{Gauß}} \underbrace{e^{-\frac{\sigma_t^2(0)(\omega - \omega_0)^2}{2}}}_{\text{Allpass mit linearer Phasendrehung}} \underbrace{e^{-j\beta_1(\omega - \omega_0)z}}_{\text{Allpass mit quadratischer Phasendrehung}} e^{-j\frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 z} \\ \underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t) &= \underbrace{E_0 \frac{\sqrt{\sigma_t(0) - j\beta_2 z}}{\sigma(z)}}_{\text{Komplexe Amplitude}} \underbrace{e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}}_{\text{Propagator Träger}} \underbrace{e^{-\frac{(t - \beta_1 z)^2}{2\sigma^2(z)}}}_{\text{Gauß}} \underbrace{e^{j \frac{\beta_2 z}{\sigma_t^2(0) \sigma^2(z)} (t - \beta_1 z)^2}}_{\text{Quadratische Phasendrehung}}\end{aligned}$$

Anhand $\underline{E}_{x,\text{Gauss}}(z, t)$ lässt sich sehr gut erkennen, was mit einem gaußförmigen Wellenpaket passiert, wenn es durch ein dispersives Medium propagiert. Aus $|\sigma(z) > \sigma_t(0)|$ folgt, dass sich die Amplitude des Gauß-Pulses verringert hat und der Puls sich verbreitert hat. Der zweite Term ist eine Exponentialfunktion, welche lediglich die zeitliche Propagation der Trägerwelle mit Frequenz ω_0 und die räumliche Propagation mit der Ausbreitungskonstanten β_0 betrachtet. Da der Exponent einheitenlos sein muss, hat β_0 die Einheit s/m. Daraus lässt sich schließen, dass die Inverse von β_0 der Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = 1/\beta_0$ der Trägerwelle (siehe Abbildung 1) entspricht. Der dritte Term entspricht der gaußförmigen Einhüllenden der Welle. Hier erkennen wir, dass die Gauß-Funktion um eine Zeit $\beta_1 z$ verschoben ist. Auch hier muss der Exponent einheitenlos sein, sodass der einhüllende Gauß mit einer Geschwindigkeit $v_{\text{gr}} = 1/\beta_1$, auch

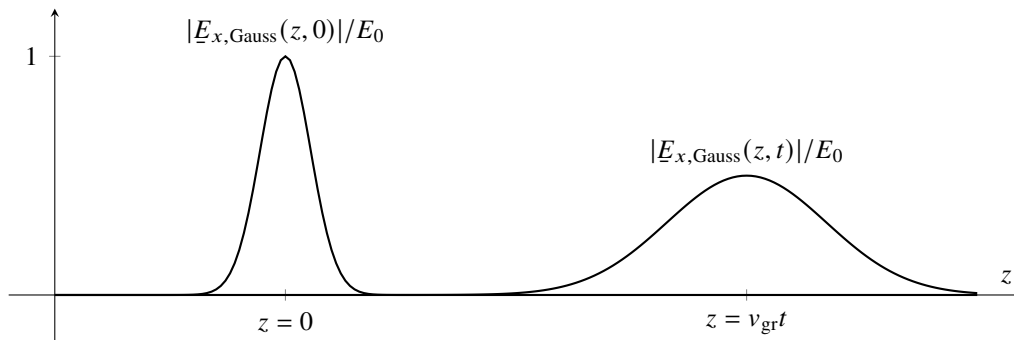


Abbildung 2: Zeitlicher Verlauf der Intensität eines Wellenpakets in einer verlustreien, dispersiven Übertragungsstrecke.

Gruppenlaufzeit oder Gruppengeschwindigkeit genannt, propagiert. Wir stellen ebenso fest, dass mit $\sigma^2(z) > \sigma_t^2(0)$ der Gauß-Puls sich verbreitert hat. Diese Verbreiterung der Pulse stellt in Nachrichtentechnischen Systemen, in welchem binäre Daten durch Pulse übertragen werden (bei einer binären 1 detektieren wir einen Puls, bei einer binären 0 detektieren wir keinen Puls), eine Limitierung dar. Am Empfänger legen wir dann eine Schwelle fest. Liegt das empfangene Signal über dieser Schwelle, dann dekodieren wir diesen Puls als eine 1. Liegt das empfangene Signal unter dieser Schwelle, so interpretieren wir das Signal als eine 0. Wenn nun eine Folge von Pulsen ineinander zerfließen, so lässt sich am Empfänger nicht mehr zuverlässig das empfangene Signal einem 'high' oder 'low' Pegel zuordnen.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu