EMW Übungsblatt 04

Abgabe bis zum 28.11.2022 um 11:30 via ILIAS

Aufgabe 7:

Gegeben sei ein Hertzscher Dipol der Länge Δs im Vakuum, der entlang der z-Achse ausgerichtet ist. Der Strombelag habe die Amplitude I_0 und die Schwingungsfrequenz ω. Für den komplexen Zeiger des magnetischen Vektorpotentials dieses Dipols wählen wir dementsprechend den Ansatz

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 \Delta s I_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr))\,\mathbf{e}_z\,.$$

a) Erklären Sie, welches physikalische Modell dem Hertzschen Dipol zugrunde liegt.

b) Begründen Sie, weshalb wir ein magnetisches Vektorpotential ansetzen, welches wir mithilfe der kartesischen Basisvektoren ausdrücken.

c) Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{A}}$ die vektorielle Helmholtz-Gleichung in kartesischen Koordinaten erfüllt (beachten Sie die Form des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten) und verwenden Sie anschließend die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten, um $\underline{\mathbf{A}}$ darzustellen.

d) Berechnen Sie aus der Darstellung des Vektorpotentials $\underline{\mathbf{A}}$ mithilfe der Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten den komplexen Zeiger der magnetische Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$.

   Hinweis: Es gilt $\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$.

e) Zerlegen Sie das magnetische Feld in Nah- und Fernfeldanteile und begründen Sie Ihre Zuordnung.

f) Berechnen Sie die mittlere Leistungsdichte im Nah- und Fernfeld. Was fällt auf?

Aufgabe 8:

Im Folgenden soll das Fernfeld einer linearen Antenne der Höhe h und infinitesimaler Dicke (siehe Abbildung 1) mit dem komplexen Zeiger der z-abhängigen Stromverteilung

$$\underline{I}(z,t) = I_0\,\sin(k(h/2 - |z|))\,\exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

betrachtet werden. Der Mittelpunkt der Antenne befinde sich im Koordinatenursprung. Um das elektrische Fernfeld dieser Antenne zu ermitteln, nehmen wir an, dass sich das resultierende elektrische Feld aus der Überlagerung der Felder Hertzscher Dipole ergibt, welche entlang der z-Achse bei $z = z'$ mit $z' \in [-h/2, h/2]$ angeordnet sind. Den Abstand des Dipols bei $z = z'$ von dem Beobachtungspunkt mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ bezeichnen wir mit $r' = \|\mathbf{r} - z'\,\mathbf{e}_z\|$. Der gewählte Ansatz führt auf folgende mathematische Formulierung des komplexen Zeigers des elektrischen Fernfelds

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta = \mathrm{j}\,Z\frac{k}{4\pi}\int_{-h/2}^{h/2} \underline{I}(z',t)\,\frac{\exp(-\mathrm{j}\,kr')}{r'}\,\sin\vartheta'\,\mathrm{d}z'\,\mathbf{e}_\vartheta\,. \tag{1}$$

a) Drücken Sie r' und $\sin\vartheta'$ in Abhängigkeit von $r = \|\mathbf{r}\|$, z und z' aus. Vereinfachen Sie dabei soweit möglich.

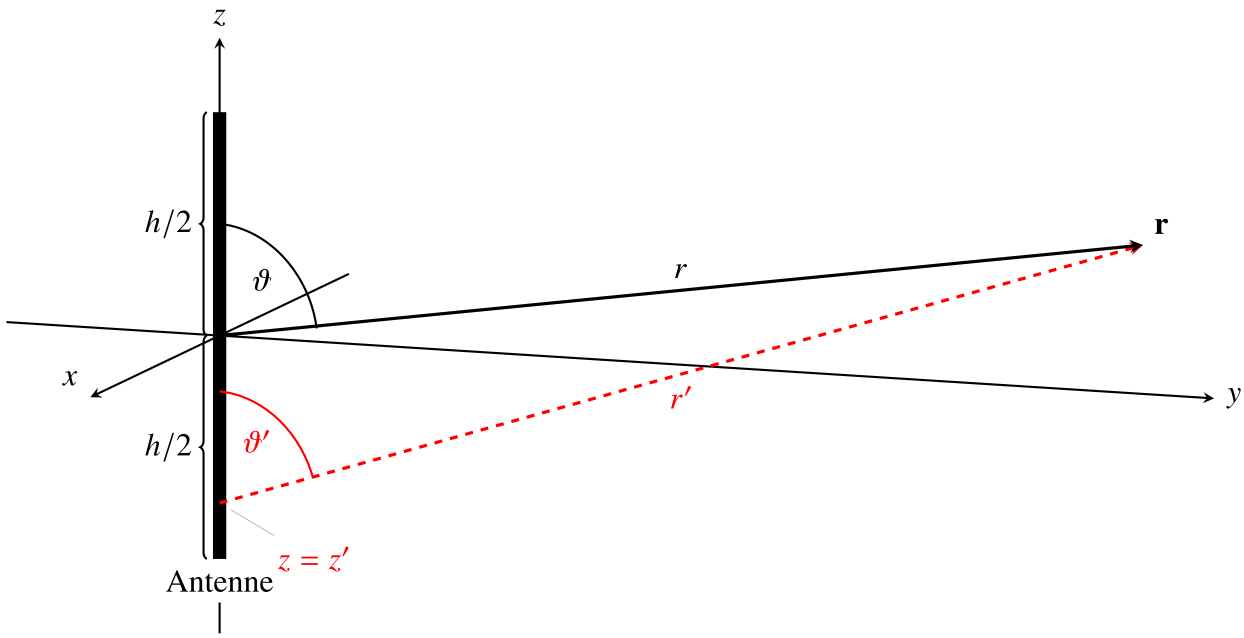

Abbildung 1

b) Im Fernfeld gilt $r \gg h$. Begründen Sie anhand der Ergebnisse aus a), weshalb Sie für alle $z' \in [-h/2, h/2]$ die folgenden Näherungen verwenden können

$$\vartheta' \approx \vartheta \qquad \frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'} \qquad r' \approx r - z' \cos\vartheta\,.$$

Gehen Sie insbesondere darauf ein, weshalb wir in der komplexen Exponentialfunktion nicht einfach $r' \approx r$ annehmen können, außerhalb $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}$ jedoch zulässig ist.

c) Setzen Sie die Näherungen aus b) in (1) ein. Verwenden Sie anschließend die Eulersche Formel $\exp(\mathrm{j}\,x) = \cos x + \mathrm{j}\sin x$ und daraufhin die Symmetrieeigenschaften des Integranden, um das Integral zu lösen.

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^h \sin(k(h-z))\,\cos(kz\,\cos\vartheta)\,\mathrm{d}z = \frac{\cos(kh\,\cos\vartheta) - \cos(kh)}{k\,\sin^2\vartheta}\,.$$

Da das elektrische Feld der betrachteten Antenne im Fernfeld lediglich eine ϑ-Komponente besitzt und die zugehörige Funktion unabhängig vom Azimuthwinkel ϕ ist, können wir zeigen, dass das zugehörige magnetische Feld nur eine ϕ-Komponente aufweist. Daraus folgt, dass der Poynting-Vektor in radiale Richtung zeigt, also $\mathbf{S} = S_r\,\mathbf{e}_r$ gilt.
Die sogenannte Richtcharakteristik $C^2(\vartheta, \phi)$ gibt die Winkelverteilung der Strahlungsintensität einer Antenne im Fernfeld an. Dementsprechend gilt hier mit $E_\vartheta = \Re\{\underline{E}_\vartheta\}$

$$C^2(\vartheta, \phi) = C^2(\vartheta) \propto E_\vartheta^2(\vartheta)\,,$$

wobei $E_\vartheta^2(\vartheta)$ nur den Teil von E_ϑ bezeichnet, der keine radiale Abhängigkeit aufweist.

d) Skizzieren Sie die Richtcharakteristik $C^2(\vartheta)$ der Antenne für $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 3\lambda/2$ in einem Polardiagramm.

Hinweis: Es gilt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu