Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 04

Abgabe bis zum 28.11.2022 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 7:

Gegeben sei ein Hertzscher Dipol der Länge Δs im Vakuum, der entlang der z-Achse ausgerichtet ist. Der Strombelag habe die Amplitude I_0 und die Schwingungsfrequenz ω. Für den komplexen Zeiger des magnetischen Vektorpotentials dieses Dipols wählen wir dementsprechend den Ansatz

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 \Delta s I_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr))\,\mathbf{e}_z\,.$$

a) Erklären Sie, welches physikalische Modell dem Hertzschen Dipol zugrunde liegt.

Ges: Physikalisches Modell Hertzscher Dipol

Das Modell des Hertzschen Dipols basiert auf folgendem Gedankenexperiment: Wir betrachten zwei entgegengesetzt geladene Punktladungen, die gemäß einer harmonischen Anregung entlang der z-Achse im Intervall $-\Delta s/2 \leq z \leq \Delta s/2$ um den Koordinatenursprung oszillieren. Zwischen den Ladungen fließt dementsprechend ein Strom mit harmonischer Zeitabhängigkeit. Aufgrund ihrer beschleunigten, d.h. ungleichförmigen Bewegung, erzeugen diese Ladungen nun eine elektromagnetische Welle bzw. Strahlung. Wird der Abstand der zwei Punktladungen nun auch infinitesimal klein, erhalten wir den Hertzschen Dipol.

b) Begründen Sie, weshalb wir ein magnetisches Vektorpotential ansetzen, welches wir mithilfe der kartesischen Basisvektoren ausdrücken.

Ges: Begründung für Verwendung magnetisches Vektorpotential mit kartesischen Basisvektoren

Wir setzen das magnetische Vektorpotential an, um die Maxwellschen Gleichungen zu entkoppeln und so eine Helmholtz-Gleichung für diese Größe lösen zu können. Im Gegensatz zu den bisher in EMW betrachteten Szenarien haben wir nun eine Quelle, die die Ursache der zu untersuchenden elektromagnetischen Wellen ist. Demzufolge gilt also $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ und $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}$. Wir wir in Aufgabe 1 a) des ersten Übungsblattes gesehen haben, können wir in diesem Fall keine Wellengleichung für das elektrische und magnetische Feld herleiten. Die kartesischen Basisvektoren verwenden wir schließlich, um den Laplace-Operator komponentenweise anwenden zu können und keine Verkopplung der Komponentenfunktionen berücksichtigen zu müssen.

Ergänzung: Ausführliche Motivation der Verwendung des magnetischen Vektorpotentials (nicht gefordert):

Betrachten wir einen Hertzschen Dipol, nimmt das Durchflutungsgesetz für zeitharmonische Felder im homogenen Medium folgende Form an

$$\nabla \times \underline{\mathbf{B}} = \mu\,\underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{c^2}\underline{\mathbf{E}}\,.$$

Setzen wir den komplexen Zeiger des magnetischen Vektorpotentials ein, welches definiert ist als $\nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{B}}$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \nabla\,(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - \Delta\underline{\mathbf{A}} &= \mu\,\underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{c^2}\underline{\mathbf{E}} \\ \Delta\underline{\mathbf{A}} + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{c^2}\underline{\mathbf{E}} &= \nabla\,(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - \mu\,\underline{\mathbf{J}}\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Setzen wir nun analog in das Induktionsgesetz ein, ergibt sich

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\,\omega \underline{\mathbf{B}} = -\mathrm{j}\,\omega \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\mathbf{E}} = -\nabla \underline{\phi} - \mathrm{j}\,\omega \underline{\mathbf{A}}\,, \tag{2}$$

wobei wir hier die Wirbelfreiheit des Gradientenfelds ausgenutzt haben (analog zu einer Integrationskonstante), um das Skalarpotential $\underline{\phi}$ zu berücksichtigen, das von Ladungen hervorgerufen wird. Die Ursachen des elektrischen Feldes sind also einerseits Ladungen, welche das Skalarpotential verursachen und andererseits zeitlich veränderliche Ströme, die die Quellen des Vektorpotentials darstellen. Führen wir nun (1) und (2) zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{\mathbf{A}} - \mathrm{j}\,\frac{\omega}{c^2}\,\nabla \underline{\phi} &= \nabla\left(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}\right) - \mu\,\underline{\mathbf{J}} \\
\Delta \underline{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{\mathbf{A}} &= \nabla\left(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}\right) + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{c^2}\,\nabla \underline{\phi} - \mu\,\underline{\mathbf{J}} \\
\Delta \underline{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{\mathbf{A}} &= \nabla\left(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{c^2}\underline{\phi}\right) - \mu\,\underline{\mathbf{J}}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Setzen wir zudem in den Gaußschen Satz für das elektrische Feld ein, finden wir eine weitere Gleichung für das Skalarpotential $\underline{\phi}$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = \frac{\underline{q}}{\varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta \underline{\phi} + \mathrm{j}\,\omega \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -\frac{\underline{q}}{\varepsilon}\,.$$

Führen wir nun eine Funktion $\underline{\psi}$ so ein, dass

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}_0 - \nabla \underline{\psi} \qquad\qquad \underline{\phi} = \underline{\phi}_0 + \mathrm{j}\,\omega\,\underline{\psi}\,,$$

stellen wir fest, dass das E- und das B-Feld aufgrund der Wirbelfreiheit des Gradientenfelds $\nabla \underline{\psi}$ invariant gegenüber $\underline{\psi}$ ist

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{B}} &= \nabla \times \left(\underline{\mathbf{A}}_0 - \nabla \underline{\psi}\right) = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}_0 \\
\underline{\mathbf{E}} &= -\nabla\left(\underline{\phi}_0 + \mathrm{j}\,\omega\,\underline{\psi}\right) - \mathrm{j}\,\omega\left(\underline{\mathbf{A}}_0 - \nabla \underline{\psi}\right) = -\nabla \underline{\phi}_0 - \mathrm{j}\,\omega \underline{\mathbf{A}}_0\,.
\end{aligned}$$

Dementsprechend ist weder das Skalarpotential noch das Vektorpotential eindeutig bestimmt und wir können die sogenannte Lorenz-Eichung (hier in der Form für die komplexen Zeiger zeitharmonischer Felder)

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\,\frac{\omega}{c^2}\,\underline{\phi} \tag{4}$$

einführen. Setzen wir (4) in (3) ein, erhalten wir mit $k = \frac{\omega}{c}$ die (inhomogene) Helmholtz-Gleichung für den Zeiger des magnetischen Vektorpotentials

$$\Delta \underline{\mathbf{A}} + k^2\,\underline{\mathbf{A}} = -\mu\,\underline{\mathbf{J}}\,.$$

Nehmen wir nun an, dass $\underline{\mathbf{J}} = \underline{J}_z\,\mathbf{e}_z$ gilt, erscheint es sinnvoll auch für $\underline{\mathbf{A}}$ lediglich eine z-Komponente anzusetzen. Da der Stromfluss außerhalb des infinitesimalen Leiters verschwindet, gilt im verbleibenden Raum im Fall des Hertzschen Dipols

$$\Delta \underline{\mathbf{A}} + k^2\,\underline{\mathbf{A}} = 0\,.$$

c) Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{A}}$ die vektorielle Helmholtz-Gleichung in kartesischen Koordinaten erfüllt (beachten Sie die Form des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten) und verwenden Sie anschließend die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten, um $\underline{\mathbf{A}}$ darzustellen.

Ges: Nachweis, dass $\underline{\mathbf{A}}$ die vektorielle Helmholtz-Gleichung erfüllt und Darstellung von $\underline{\mathbf{A}}$ in kartesischen Koordinaten

Geg: Komplexer Zeiger des magnetischen Vektorpotentials $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z\,\mathbf{e}_z$

Die vektorielle Helmholtz-Gleichung für das magnetische Vektorpotential im homogenen Medium lautet

$$\Delta\underline{\mathbf{A}} + k^2\,\underline{\mathbf{A}} = 0\,.$$

Da die x- und y-Komponenten des Vektorpotentials identisch null sind, müssen wir für den gewünschten Nachweis lediglich die skalare Helmholtz-Gleichung für $\underline{A}_z$ betrachten. Für die skalare Helmholtz-Gleichung für $\underline{A}_z$ in Kugelkoordinatenerhalten wir

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\underline{A}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\underline{A}_z}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\underline{A}_z}{\partial\phi^2} + k^2\underline{A}_z = 0\,. \tag{5}$$

Da jedoch $\underline{A}_z$ gegenüber ϑ und ϕ konstant ist, woraus $\frac{\partial\underline{A}_z}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\underline{A}_z}{\partial\phi} = 0$ folgt, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\underline{A}_z}{\partial r}\right) + k^2\underline{A}_z = 0\,. \tag{6}$$

Einsetzen des Ansatzes für $\underline{A}_z$ und ausklammern führt dann auf

$$\frac{\mu_0\Delta s I_0}{4\pi}\,\exp(\mathrm{j}\,\omega t)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\exp(-\mathrm{j}\,kr)\right)\right) + \frac{k^2}{r}\,\exp(-\mathrm{j}\,kr)\right) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-\frac{1}{r^2}\,\exp(-\mathrm{j}\,kr) - \mathrm{j}\,\frac{k}{r}\,\exp(-\mathrm{j}\,kr)\right)\right) + \frac{k^2}{r}\,\exp(-\mathrm{j}\,kr) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\exp(-\mathrm{j}\,kr) - \mathrm{j}\,kr\,\exp(-\mathrm{j}\,kr)\right) + \frac{k^2}{r}\,\exp(-\mathrm{j}\,kr) = 0\,. \tag{9}$$

Mit der Produktregel erhalten wir für die Ableitung von $\mathrm{j}\,kr\,\exp(-\mathrm{j}\,kr)$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{j}\,kr\,\exp(-\mathrm{j}\,kr)\right) = \mathrm{j}\,k\,\exp(-\mathrm{j}\,kr) + k^2 r\,\exp(-\mathrm{j}\,kr)\,. \tag{10}$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung für $\underline{A}_z$ liefert daher

$$-\frac{1}{r^2}k^2 r\,\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr)) + \frac{k^2}{r}\,\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr)) = 0 \tag{11}$$

$$0 = 0\,. \qquad \square \tag{12}$$

Nun zu dem Wechsel zwischen den Einheitsvektoren: Der Formelsammlung entnehmen wir, dass

$$\begin{aligned}
\underline{A}_r &= \underline{A}_z\,\cos\vartheta = \frac{\mu_0\Delta s I_0}{4\pi}\,\frac{\cos\vartheta}{r}\,\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr))\\
\underline{A}_\vartheta &= -\underline{A}_z\,\sin\vartheta = -\frac{\mu_0\Delta s I_0}{4\pi}\,\frac{\sin\vartheta}{r}\,\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr))\\
\underline{A}_\phi &= 0\,,
\end{aligned}$$

da $\underline{A}_x = \underline{A}_y = 0$.

d) Berechnen Sie aus der Darstellung des Vektorpotentials $\underline{\mathbf{A}}$ mithilfe der Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten den komplexen Zeiger der magnetische Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$.

Hinweis: Es gilt $\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$.

Ges: Komplexer Zeiger der magnetischen Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$

Geg: Komplexer Zeiger des magnetischen Vektorpotentials $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_r\,\mathbf{e}_r + \underline{A}_\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta$

Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$ können wir im Vakuum den Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \underline{\mathbf{A}}$$

verwenden. Durch Einsetzen des Vektorpotentials aus c) erhalten wir mit dem Rotationsoperator in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{A}} = &\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\left(\frac{\partial(\sin\vartheta\,\underline{A}_\phi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\underline{A}_\vartheta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r\\ &+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\underline{A}_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\underline{A}_\phi)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\vartheta\\ &+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial\underline{A}_r}{\partial\vartheta}\right)\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

und $\underline{A}_\phi = 0$ sowie $\frac{\partial}{\partial\phi} = 0$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{H}} &= 0\,\mathbf{e}_r + 0\,\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial\underline{A}_r}{\partial\vartheta}\right)\mathbf{e}_\phi\\ &= \frac{\Delta s I_0}{4\pi}\frac{1}{r}\left(-\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\Big[\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))\Big] - \frac{1}{r}\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))\,\frac{\partial\cos\vartheta}{\partial\vartheta}\right)\mathbf{e}_\phi\\ &= \frac{\Delta s I_0}{4\pi}\frac{\sin\vartheta}{r}\left(\mathrm{j}\,k + \frac{1}{r}\right)\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))\;\mathbf{e}_\phi\\ &= \frac{\Delta s I_0}{4\pi}\;\sin\vartheta\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr))\,\mathbf{e}_\phi\\ &= \frac{\Delta s I_0 k^2}{4\pi}\;\sin\vartheta\left(\mathrm{j}\,\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2r^2}\right)\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr))\,\mathbf{e}_\phi\\ &= \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi\omega\varepsilon}\,\frac{1}{Z}\;\sin\vartheta\left(\mathrm{j}\,\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2r^2}\right)\exp(\mathrm{j}\,(\omega t - kr))\,\mathbf{e}_\phi\,.\end{aligned}$$

Hinweis: Die letzten beiden Umformungen dienen dem Vergleich mit den Vorlesungsfolien und werden im Folgenden nicht weiter verwendet.

e) Zerlegen Sie das magnetische Feld in Nah- und Fernfeldanteile und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Ges: Magnetische Nah- und Fernfeldanteile, Begründung für Zuordnung

Geg: Komplexer Zeiger des magnetischen Felds $\underline{\mathbf{H}}$

Im Fernfeld sind wegen $\frac{1}{r^2} \ll \frac{k}{r}$ für $r \to \infty$ die Feldanteile mit $\frac{1}{r^2}$ vernachlässigbar. Entsprechend können wir im Nahfeld wegen $\frac{k}{r} \ll \frac{1}{r^2}$ für $r \to 0$ die Feldanteile vernachlässigen, die Terme mit $\frac{1}{r}$ enthalten. Des Weiteren lässt sich für $r \to 0$ der Exponentialterm zu $\exp(-\mathrm{j}\,kr) \approx 1$ vereinfachen. Folglich lauten der Nah- bzw. Fernfeldanteil

$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{Nahfeld}}(r,\vartheta,t) = \frac{I_0\Delta s}{4\pi}\frac{1}{r^2}\,\sin(\vartheta)\,\exp(\mathrm{j}\,\omega t)\,\mathbf{e}_\phi$$
$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{Fernfeld}}(r,\vartheta,t) = \mathrm{j}\,\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\,\frac{k}{r}\,\sin(\vartheta)\,\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))\,\mathbf{e}_\phi$$

f) Berechnen Sie die mittlere Leistungsdichte im Nah- und Fernfeld. Was fällt auf?

Ges: Mittlere Leistungsdichte im Nah- und Fernfeld & etwaige Auffälligkeiten

Geg: Komplexer Zeiger des magnetischen Feldes $\underline{\mathbf{H}}$

Um die mittlere Leistungsdichte zu ermitteln, benötigen wir den Poynting-Vektor. Demzufolge bestimmen wir im ersten Schritt das elektrische Feld jeweils im Nah- und Fernfeld. Die elektrische Feldstärke ergibt sich mit Hilfe des Induktionsgesetzes für harmonische Wellen mit $\underline{H}_r = \underline{H}_\vartheta = 0$ zu

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}(\nabla\times\underline{\mathbf{H}}) = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\left(\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial(\sin\vartheta\,\underline{H}_\phi)}{\partial\vartheta}\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\underline{H}_\phi)}{\partial r}\,\mathbf{e}_\vartheta\right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{E}_r &= \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\,\sin^2\vartheta\right)\\
&= -\mathrm{j}\,\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\;2\sin\vartheta\cos\vartheta\\
&= \frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\frac{k}{r^2}-\mathrm{j}\,\frac{1}{r^3}\right)2\cos\vartheta\,\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\\
&= \frac{I_0\Delta s k^3}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\frac{1}{k^2r^2}-\mathrm{j}\,\frac{1}{k^3r^3}\right)2\cos\vartheta\,\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\\
\underline{E}_\vartheta &= -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\left(\mathrm{j}\,k+\frac{1}{r}\right)\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\,\sin\vartheta\right)\\
&= \mathrm{j}\,\frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\sin\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\mathrm{j}\,k+\frac{1}{r}\right)\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\right)\\
&= \mathrm{j}\,\frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\sin\vartheta\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))+\left(\mathrm{j}\,k+\frac{1}{r}\right)(-\mathrm{j}\,k)\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\right)\\
&= \mathrm{j}\,\frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\sin\vartheta\frac{1}{r}\left(k^2-\frac{1}{r^2}-\mathrm{j}\,\frac{k}{r}\right)\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\\
&= \frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\mathrm{j}\,\frac{k^2}{r}+\frac{k}{r^2}-\mathrm{j}\,\frac{1}{r^3}\right)\sin\vartheta\,\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\\
&= \frac{I_0\Delta s k^3}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\mathrm{j}\,\frac{1}{kr}+\frac{1}{k^2r^2}-\mathrm{j}\,\frac{1}{k^3r^3}\right)\sin\vartheta\,\exp(\mathrm{j}(\omega t-kr))\\
\underline{E}_\phi &= 0
\end{aligned}$$

Analog zu den Begründungen aus Aufgabenteil d) (wobei dann im Nahfeld auch die Terme mit $\frac{1}{r^3}$ gegenüber denen der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ überwiegen) lässt sich das elektrische Nah- bzw. Fernfeld folgendermaßen vereinfachen:

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{Nahfeld}} = -\mathrm{j}\,\frac{I_0 \Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\frac{1}{r^3}\,(2\cos\vartheta\,\mathbf{e}_r + \sin\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta)\exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$
$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{Fernfeld}} = \mathrm{j}\,\frac{I_0 \Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\frac{k^2}{r}\,\sin\vartheta\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))\;\mathbf{e}_\vartheta$$

Für kleine Distanzen und unter Vernachlässigung einer zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes, also für $\exp(\mathrm{j}\,\omega t) = 1$, sprich $\omega = 0$, entspricht das elektrische Nahfeld bis auf eine Phasenverschiebung um 90° dem elektrischen Feld eines elektrostatischen Punktdipols.

Für das Nahfeld ergibt sich durch das Kreuzprodukt des magnetischen und elektrischen Feldes eine r- und ϑ-Komponente des Poynting-Vektors.

$$\underline{\mathbf{S}}_{\text{Nahfeld}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{E}}_{\text{Nahfeld}} \times \underline{\mathbf{H}}_{\text{Nahfeld}}{}^*) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^* \\ -\underline{E}_r \underline{H}_\phi^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Feldkomponenten ergibt

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{S}}_{r,\text{Nahfeld}} &= \frac{1}{2}\underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^* \\
&= -\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\frac{1}{r^3}\sin\vartheta\;\exp(\mathrm{j}\,\omega t)\;\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\frac{1}{r^2}\sin(\vartheta)\;\exp(-\mathrm{j}\,\omega t) \\
&= -\mathrm{j}\,\frac{1}{2\omega\varepsilon}\left(\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\right)^2\frac{1}{r^5}\sin^2(\vartheta) \\
\underline{\mathbf{S}}_{\vartheta,\text{Nahfeld}} &= -\frac{1}{2}\underline{E}_r \underline{H}_\phi^* \\
&= \mathrm{j}\,\frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\frac{1}{r^3}\;\cos\vartheta\;\exp(\mathrm{j}\,\omega t)\;\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\frac{1}{r^2}\sin(\vartheta)\;\exp(-\mathrm{j}\,\omega t) \\
&= \mathrm{j}\,\frac{1}{2\omega\varepsilon}\left(\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\right)^2\frac{1}{r^5}\sin(2\vartheta)\,.
\end{aligned}$$

Die mittlere Leistungsdichte entspricht dem Realteil des komplexen Poynting-Vektors. Da der Poynting-Vektor hier rein imaginär ist, wird im zeitlichen Mittel keine Leistung transportiert.
Da im Fernfeld das elektrische Feld lediglich in ϑ-Richtung und das magnetische Feld lediglich in ϕ-Richtung schwingt, breitet sich die Leistung vollständig in radialer Richtung aus, denn $\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r$.

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}} &= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{E}}_{\text{Fernfeld}} \times \underline{\mathbf{H}}^*_{\text{Fernfeld}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^*\,\mathbf{e}_r \\
&= \frac{1}{2}\frac{I_0\Delta s}{4\pi\omega\varepsilon}\frac{k^2}{r}\sin\vartheta\;\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))\;\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\frac{k}{r}\sin\vartheta\;\exp(-\mathrm{j}(\omega t - kr)) \\
&= \frac{1}{2\omega\varepsilon}\left(\frac{I_0\Delta s}{4\pi}\right)^2\frac{k^3}{r^2}\sin^2(\vartheta)
\end{aligned}$$

Da der Poynting-Vektor rein reell ist, wird dann ausschließlich Wirkleistung in radialer Richtung übertragen. Das Ergebnis für die mittlere Leistungsdichte ist identisch, da der komplexe Poynting-Vektor hier rein reell ist, $\Re\{\underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}}\} = \underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}}$.

Lösung zu Aufgabe 8:

Im Folgenden soll das Fernfeld einer linearen Antenne der Höhe h und infinitesimaler Dicke (siehe Abbildung 1) mit dem komplexen Zeiger der z-abhängigen Stromverteilung

$$\underline{I}(z,t) = I_0 \sin(k(h/2 - |z|)) \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

betrachtet werden. Der Mittelpunkt der Antenne befinde sich im Koordinatenursprung. Um das elektrische Fernfeld dieser Antenne zu ermitteln, nehmen wir an, dass sich das resultierende elektrische Feld aus der Überlagerung der Felder Hertzscher Dipole ergibt, welche entlang der z-Achse bei $z = z'$ mit $z' \in [-h/2, h/2]$ angeordnet sind. Den Abstand des Dipols bei $z = z'$ von dem Beobachtungspunkt mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ bezeichnen wir mit $r' = \|\mathbf{r} - z'\,\mathbf{e}_z\|$. Der gewählte Ansatz führt auf folgende mathematische Formulierung des komplexen Zeigers des elektrischen Fernfelds

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta = \mathrm{j}\,Z\frac{k}{4\pi}\int_{-h/2}^{h/2} \underline{I}(z',t)\,\frac{\exp(-\mathrm{j}\,kr')}{r'}\,\sin\vartheta'\,\mathrm{d}z'\,\mathbf{e}_\vartheta\,. \tag{13}$$

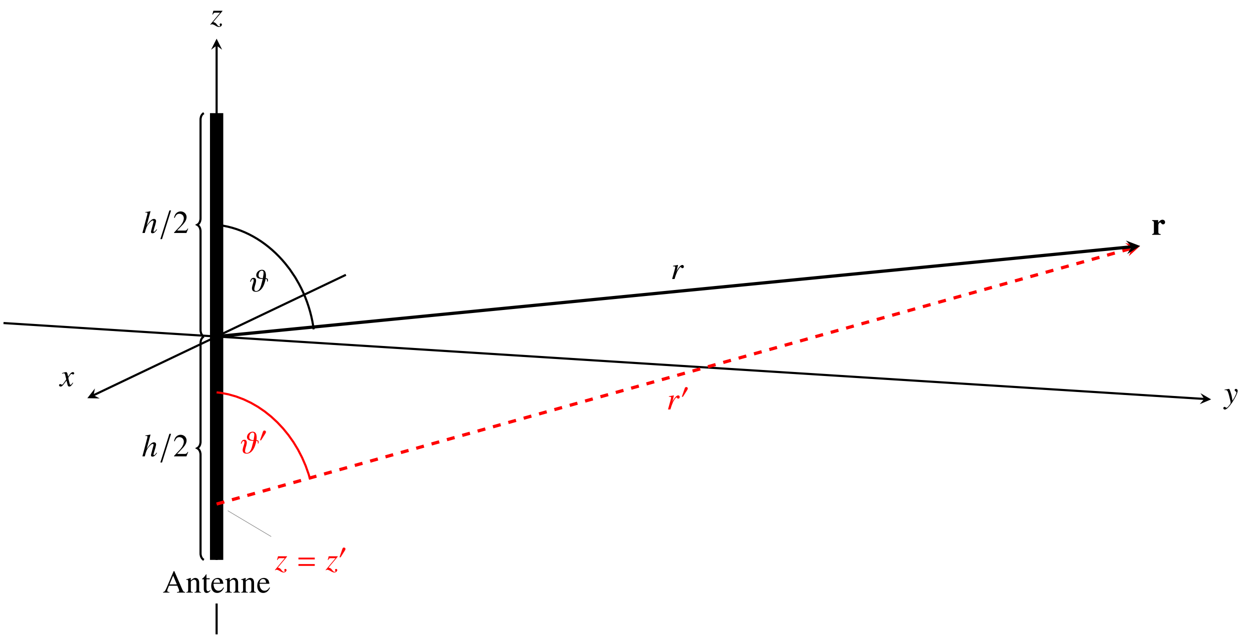

Abbildung 1

a) Drücken Sie r' und $\sin\vartheta'$ in Abhängigkeit von $r = \|\mathbf{r}\|$, z und z' aus. Vereinfachen Sie dabei soweit möglich.

Ges: r' und $\sin\vartheta'$

Geg: r, z und z'

Da sich die Antenne auf der z-Achse befindet, gilt für r'

$$\begin{aligned} r' = \|\mathbf{r} - z'\,\mathbf{e}_z\| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} && (14)\\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2zz' + z'^2} && (15)\\ &= \sqrt{r^2 - 2zz' + z'^2}\,. && (16)\end{aligned}$$

Zudem erhalten wir für $\sin\vartheta'$ mit $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ und

$$\cos\vartheta' = \frac{z-z'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} = \frac{z-z'}{r'}\,, \tag{17}$$

dass

$$\sin\vartheta' = \sin\left(\arccos\left(\frac{z-z'}{r'}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\frac{z-z'}{r'}\right)^2}\,. \tag{18}$$

b) Im Fernfeld gilt $r \gg h$. Begründen Sie anhand der Ergebnisse aus a), weshalb Sie für alle $z' \in [-h/2, h/2]$ die folgenden Näherungen verwenden können

$$\vartheta' \approx \vartheta \qquad\qquad \frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'} \qquad\qquad r' \approx r - z'\cos\vartheta\,.$$

Gehen Sie insbesondere darauf ein, weshalb wir in der komplexen Exponentialfunktion nicht einfach $r' \approx r$ annehmen können, außerhalb $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}$ jedoch zulässig ist.

Ges: Nachweis der gegebenen Näherungen

Geg: $z' \in [-h/2, h/2]$ und $r \gg h$

Beginnen wir mit der Näherung von r':

$$r' = \sqrt{r^2 - 2zz' + z'^2} \tag{19}$$

$$= r\sqrt{1 - \frac{2zz'}{r^2} + \frac{z'^2}{r^2}} \tag{20}$$

Da wegen $z' \in [-h/2, h/2]$ und $r \gg h$ auch $\frac{z'}{r} \ll 1$ gilt, können wir den letzten Term in der Wurzel vernachlässigen:

$$r' \approx r\sqrt{1 - 2\frac{z}{r}\frac{z'}{r}}\,. \tag{21}$$

Mit $\cos\vartheta = \frac{z}{r}$ und der Taylor-Entwicklung der Wurzel

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \mp O(x^2) \tag{22}$$

sehen wir zudem, dass

$$r' \approx r\left(1 - \frac{z'}{r}\cos\vartheta\right) = r - z'\cos\vartheta\,. \quad \square \tag{23}$$

Wieso berücksichtigen wir hier den Term $z'\cos\vartheta$ wenn doch $z'\cos\vartheta \ll r$ gilt? Die Variable r' kommt in dem zu untersuchenden Integral zweimal vor. Einerseits in $\frac{1}{r'}$ und andererseits in $\exp(-\mathrm{j}\,kr')$. Während im ersten Fall für kleine Abweichungen $z'\cos\vartheta$ in guter Näherung gilt, dass

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r + z'\cos\vartheta} = \frac{1}{r}\underbrace{\frac{1}{1+\frac{z'\cos\vartheta}{r}}}_{\approx 1} \approx \frac{1}{r}\,, \quad \square \tag{24}$$

sehen wir im zweiten Fall, dass

$$\exp(-\mathrm{j}\,k\,(r - z'\cos\vartheta)) = \exp(-\mathrm{j}\,kr)\exp(\mathrm{j}\,kz'\cos\vartheta)\ . \tag{25}$$

Hier genügt bereits die Erfüllung von $kz'\cos\vartheta = \pi$, um eine Änderung des Vorzeichens zu bewirken. Das heißt, nur für

$$z' \ll \frac{\pi}{k\cos\vartheta} = \frac{\lambda}{2\cos\vartheta} \tag{26}$$

wäre ein Vernachlässigen des Terms $z'\cos\vartheta$ zulässig. Schätzen wir nun noch $\cos\vartheta$ nach oben ab, erhalten wir

$$z' \ll \frac{\lambda}{2} \tag{27}$$

und sehen damit, dass nur für Antennen, welche viel kleiner als die Wellenlänge sind, die Näherung $r' \approx r$ im Allgemeinen gültig wäre. Unter diesen Umständen entspräche das elektrische Feld des Dipols wieder dem des Hertzschen Dipols. Abschließend sehen wir uns die Beziehung für $\cos\vartheta'$ aus a) an, um $\vartheta \approx \vartheta'$ nachzuweisen:

$$\cos\vartheta' = \frac{z - z'}{r'} \tag{28}$$

$$= \frac{z}{r'} - \frac{z'}{r'} \tag{29}$$

$$\approx \frac{z}{r} - \frac{z'}{r} = \cos\vartheta - \frac{z'}{r}\,. \tag{30}$$

Wegen $\frac{z'}{r} \ll 1$ erhalten wir damit

$$\cos\vartheta' \approx \cos\vartheta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vartheta' \approx \vartheta \quad \square \tag{31}$$

c) Setzen Sie die Näherungen aus b) in (13) ein. Verwenden Sie anschließend die Eulersche Formel $\exp(\mathrm{j}\,x) = \cos x + \mathrm{j}\sin x$ und daraufhin die Symmetrieeigenschaften des Integranden, um das Integral zu lösen.

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^h \sin(k(h - z))\ \cos(kz\ \cos\vartheta)\ \mathrm{d}z = \frac{\cos(kh\ \cos\vartheta) - \cos(kh)}{k\ \sin^2\vartheta}\ .$$

Ges: Lösung des Integrals für $\underline{E}_\vartheta$

Geg: Näherungen aus a) und b)

Mit den getroffenen Vereinfachungen lässt sich das Integral schreiben als

$$\underline{E}_\vartheta = \mathrm{j}\,Z\,\frac{k}{4\pi}\,I_0\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))\,\frac{\sin\vartheta}{r}\int_{-h/2}^{h/2}\sin(k(h/2 - |z'|))\ \exp(\mathrm{j}\,kz'\cos\vartheta)\ \mathrm{d}z'\,. \tag{32}$$

Nun verwenden wir die Eulersche Formel und erhalten

$$\underline{E}_\vartheta \propto \int_{-h/2}^{h/2}\sin(k(h/2 - |z'|))\ (\cos(kz'\cos\vartheta) + \mathrm{j}\sin(kz'\cos\vartheta))\ \mathrm{d}z'\,. \tag{33}$$

Im nächsten Schritt definieren wir die beiden Integrale

$$I_1 := \int_{-h/2}^{h/2} \sin(k(h/2 - |z'|)) \, \cos\left(kz' \cos\vartheta\right) \, \mathrm{d}z' \tag{34}$$

$$I_2 := \int_{-h/2}^{h/2} \sin(k(h/2 - |z'|)) \, \sin\left(kz' \cos\vartheta\right) \, \mathrm{d}z' \,, \tag{35}$$

Während das Produkt aus zwei gerade Funktionen eine gerade Funktion liefert, hat das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion eine ungerade Funktion zum Ergebnis. Die Funktionen $\sin\left(k(h/2 - |z'|)\right)$ und $\cos\left(kz' \cos\vartheta\right)$ sind beide gerade. Daher verschwindet das Integral I_1 trotz der symmetrischen Grenzen nicht. Da $\sin\left(kz' \cos\vartheta\right)$ jedoch eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral I_2 aufgrund der symmetrischen Grenzen. Wenn wir zudem die Symmetrie von I_1 ausnutzen, erhalten wir mit dem Hinweis

$$I_1 = 2 \int_0^{h/2} \sin(k(h/2 - z')) \, \cos\left(kz' \cos\vartheta\right) \, \mathrm{d}z' = 2 \frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \, \cos\vartheta\right) - \cos(\frac{kh}{2})}{k \, \sin^2\vartheta} \,. \tag{36}$$

Einsetzen der Lösung von I_1 liefert schließlich den gesuchten Ausdruck für $\underline{E}_\vartheta$

$$\underline{E}_\vartheta = \mathrm{j}\, Z \, \frac{k}{4\pi} \, I_0 \exp(\mathrm{j}(\omega t - kr)) \, \frac{\sin\vartheta}{r} \, 2 \frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \, \cos\vartheta\right) - \cos(\frac{kh}{2})}{k \, \sin^2\vartheta} \tag{37}$$

$$= \mathrm{j}\, Z \, \frac{I_0}{2\pi} \, \frac{\exp(\mathrm{j}(\omega t - kr))}{r} \frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \, \cos\vartheta\right) - \cos(\frac{kh}{2})}{\sin\vartheta} \,. \tag{38}$$

Da das elektrische Feld der betrachteten Antenne im Fernfeld lediglich eine ϑ-Komponente besitzt und die zugehörige Funktion unabhängig vom Azimuthwinkel ϕ ist, können wir zeigen, dass das zugehörige magnetische Feld nur eine ϕ-Komponente aufweist. Daraus folgt, dass der Poynting-Vektor in radiale Richtung zeigt, also $\mathbf{S} = S_r \, \mathbf{e}_r$ gilt.
Die sogenannte Richtcharakteristik $C^2(\vartheta, \phi)$ gibt die Winkelverteilung der Strahlungsintensität einer Antenne im Fernfeld an. Dementsprechend gilt hier

$$C^2(\vartheta, \phi) = C^2(\vartheta) \propto E_\vartheta^2(\vartheta) \,,$$

wobei $E_\vartheta^2(\vartheta)$ nur den Teil von E_ϑ bezeichnet, der keine radiale Abhängigkeit aufweist.

d) Skizzieren Sie die Richtcharakteristik $C^2(\vartheta)$ der Antenne für $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 3\lambda/2$ in einem Polardiagramm.

Hinweis: Es gilt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Ges: Richtcharakteristik $C^2(\vartheta)$

Geg: $C^2 \propto E_\vartheta^2$ und $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 3\lambda/2$

Für die Richtcharakteristik $C^2 \propto E_\vartheta^2$ setzen wir an, dass

$$C^2 \propto E_\vartheta^2 \propto \left(\frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \, \cos\vartheta\right) - \cos(\frac{kh}{2})}{\sin\vartheta} \right)^2 = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi h}{\lambda} \, \cos\vartheta\right) - \cos(\frac{\pi h}{\lambda})}{\sin\vartheta} \right)^2 \,. \tag{39}$$

Die zugehörigen Polardiagramme sind in Abbildung 2 dargestellt.

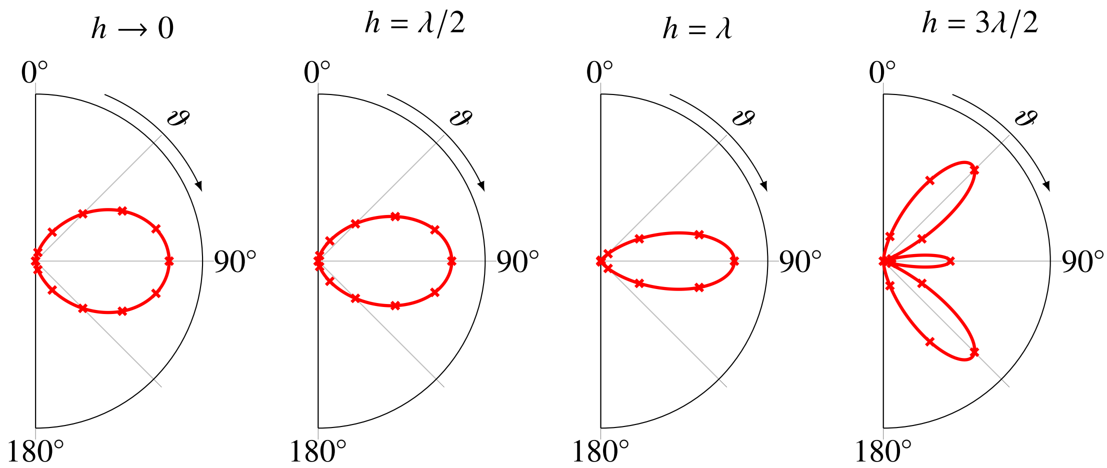

Abbildung 2: Richtcharakteristika für den Hertzschen Dipol ($h \to 0$) sowie für die Antenne mit $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 3\lambda/2$. Die rote Kreuze heben die Werte bei $\vartheta = 0°, 15°, \ldots, 180°$ hervor, um den Abgleich mit händisch angefertigten Skizzen zu vereinfachen.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu