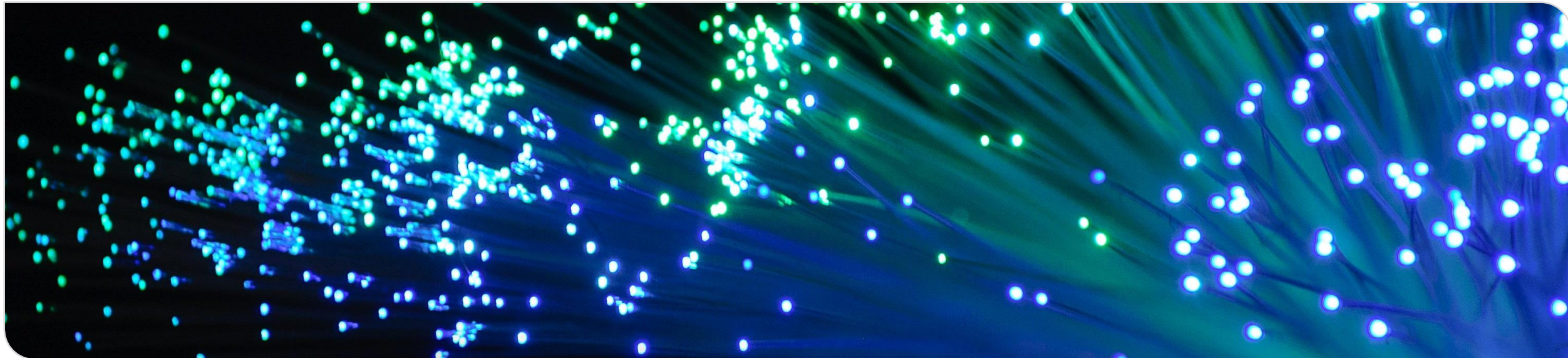


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 5

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



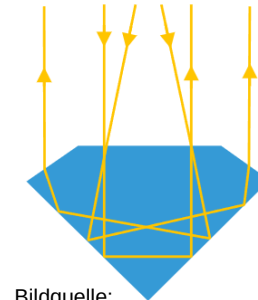
Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichung, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Polarisation
Übung 3	A6	Dispersive Medien
Übung 4	A7, A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Reflexion und Brechung

Motivation

■ Technologien basierend auf Reflektion/Beugung an Grenzflächen

- Metallische Wellenleiter/Hohlleiter zur Signalübertragung
- Lichtwellenleiter/dielektrische Wellenleiter zur Signalübertragung (Glasfaser)
- Reflektion von Funkwellen zur Hinderniserkennung und Ortungsverfahren (Radar)
- Reflektion optischer Wellen zur Hinderniserkennung (Lidar)
- Sensorik, z.B. Regensensor im Automobil
- Geometrische Optik (Linsen, Prismen, etc.)
 - Messtechnik: Mikroskopie
 - Fotografie (Linsen, Polarisationsfilter)
 - Teleskope
 - Brillen, Kontaktlinsen, menschliches Auge



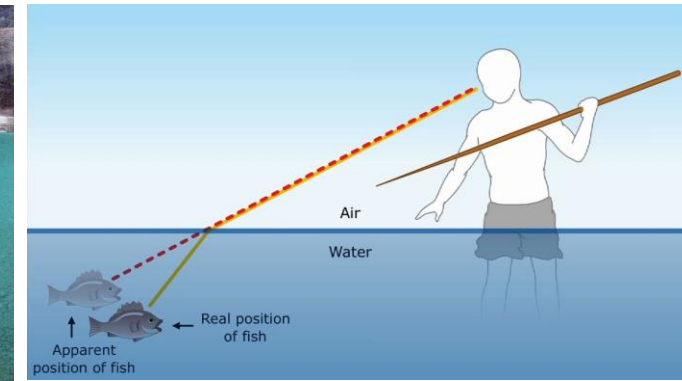
Bildquelle:
[Totalreflexion | LEIFIphysik](#)

■ Vorkommen in der Natur

- Funkeln von Diamanten, Zuckerkristallen oder Papier durch Totalreflexion
- Spiegelungen im Wasser



Bildquelle:
[Total internal reflection of Chelonia mydas](#)
- [Totalreflexion – Wikipedia](#)



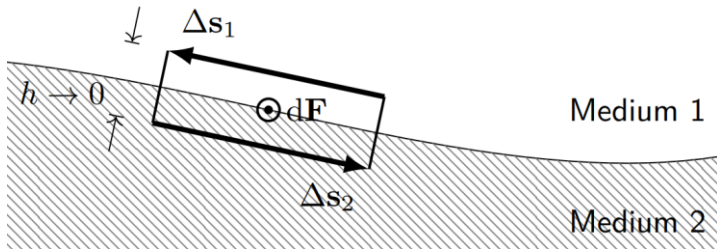
Bildquelle:
[Refraction Lab - Mrs. Munn's Science \(weebly.com\)](#)

Web Apps:

[Apparat für Brechung und Totalreflexion \(fu-berlin.de\)](#)
[Lichtbrechung 1.1.22 \(colorado.edu\)](#)

Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Tangentiale Feldkomponenten

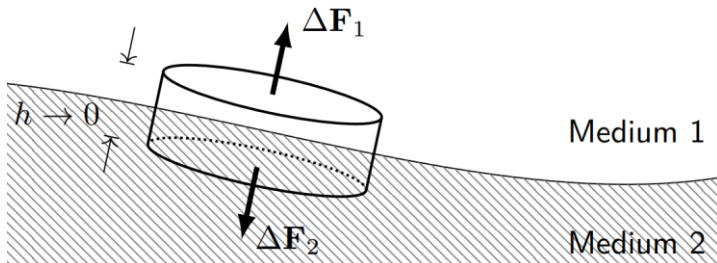


Durchflutungsgesetz $\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} \rightarrow H_{t,1} - H_{t,2} = i'$

Oberflächenstrom

Induktionsgesetz $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} \rightarrow E_{t,1} - E_{t,2} = 0$

Normale Feldkomponenten



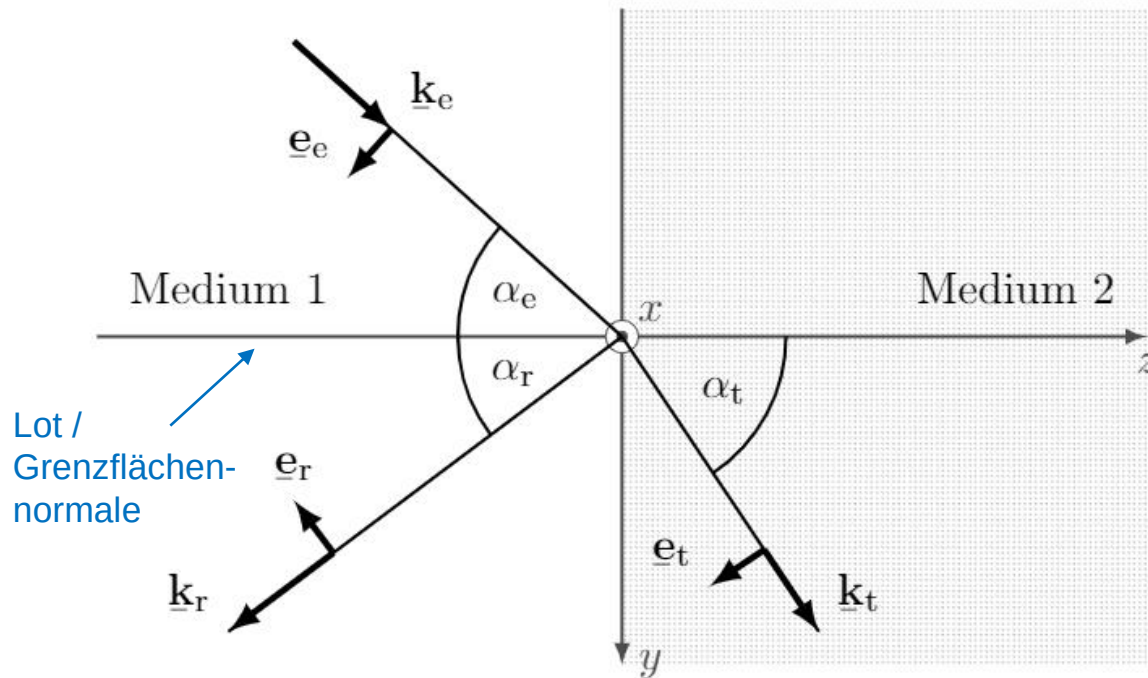
Gaußsches Gesetz $\oint_O \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \rho dV \rightarrow D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma$

Oberflächenladung

$\oint_O \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0 \rightarrow B_{n,1} - B_{n,2} = 0$

- Stetigkeitsbedingung für Tangential- und Normalkomponenten liefern dieselbe Information. Daher im Folgenden Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponenten verwendet
- Bei den Tangential- und Normalkomponenten handelt es sich nicht um vektorielle Größen

Grenzflächenbetrachtungen



An der Grenzfläche zweier Medien werden Wellen teilweise reflektiert. Der übrige Teil der Wellen dringt in das hinter der Grenzfläche liegende Medium ein (Transmission).

Reflexionsgesetz:

$$\alpha_e = \alpha_r$$

(“Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel”)

Snelliussches Brechungsgesetz:

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_e) = \underline{k}_2 \sin(\alpha_t)$$

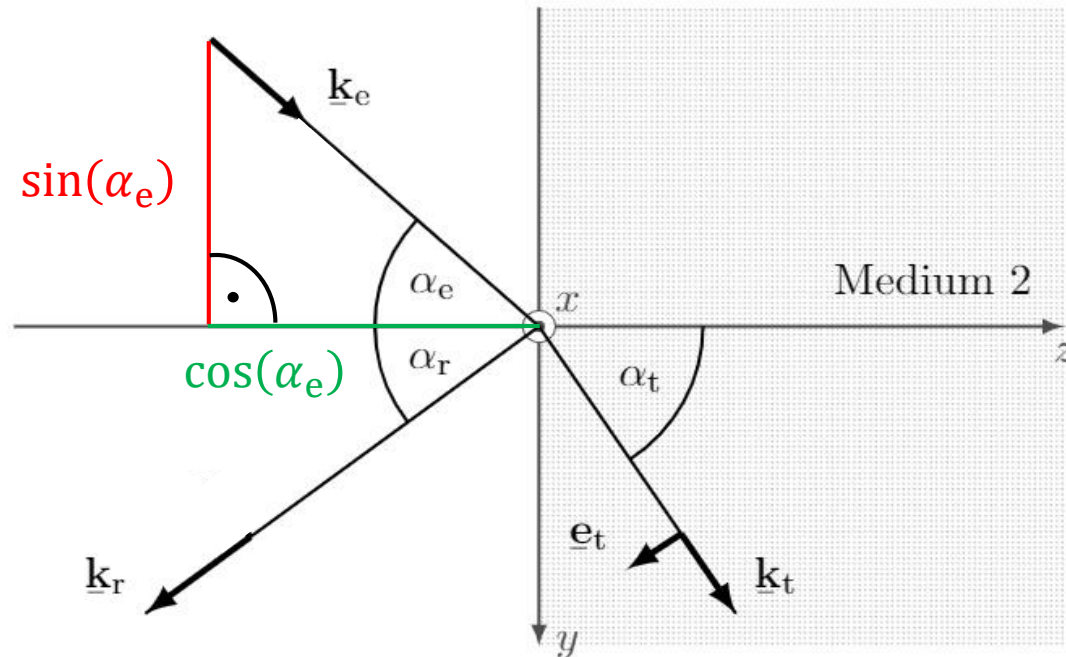


In manchen Büchern wird nicht der Winkel zur Grenzflächennormalen, sondern jener zur Grenzfläche selbst definiert. Dadurch verändern sich auch die weiteren mathematischen Formeln (Brechungsgesetz, Fresnelsche Formeln, usw.).



Vorsicht gelte bei der Wahl des Koordinatensystems! Die Richtung der Koordinatenpfeile sowie die Wahl in welche Richtung die Welle wandert kann die Gleichungen ändern.

Grenzflächenbetrachtungen



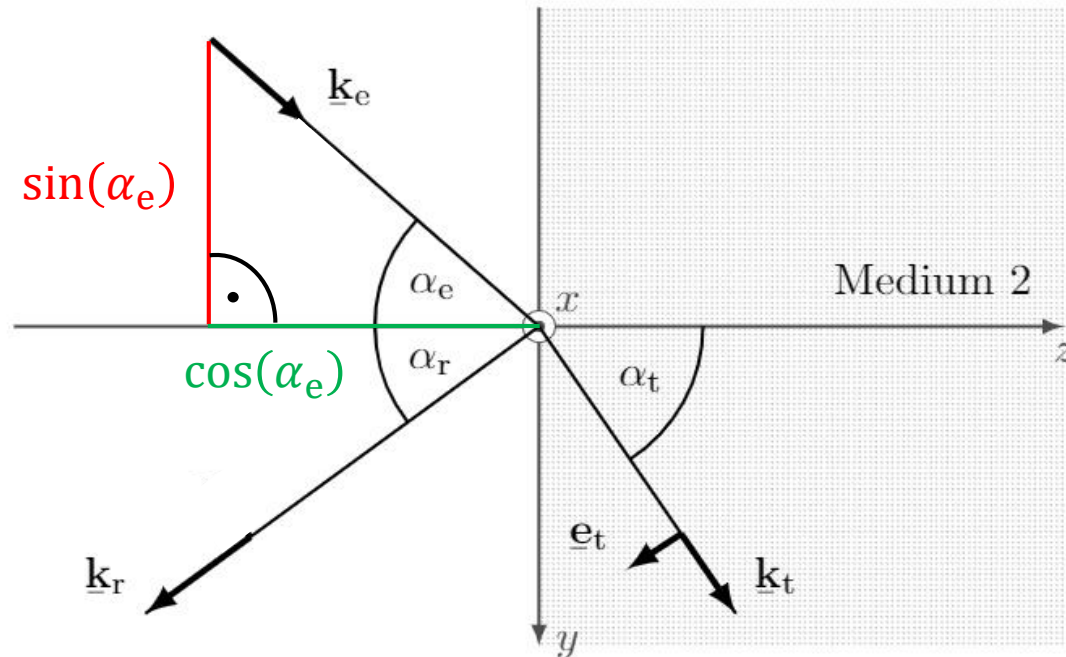
- Für einen Winkel $\alpha_e \neq 0^\circ$ entsprechen die Ausbreitungsrichtung der Welle sowie die Schwingungsrichtung von **E**- und **H**-Feld nicht notwendigerweise einer Koordinatenachse.
- **Schritt 1.** Einführung von Einheitsvektoren in Richtung der Ausbreitungsrichtung der einfallenden (e), reflektierten (r) und transmittierten Welle (t).

$$\mathbf{e}_{k,e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_r) \\ -\cos(\alpha_r) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_t) \\ \cos(\alpha_t) \end{pmatrix}$$

Grenzflächenbetrachtungen



Schritt 2.

Einführung eines (komplexen) **Wellenvektors** anstelle der skalaren Wellenzahl

$$\underline{\mathbf{k}}_i = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = k_i \mathbf{e}_{k,i} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z \quad \text{mit } i \in \{e, r, t\}$$

Der harmonische Ansatz ergibt dann

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_i \mathbf{r})},$$

mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$.

Poynting-Vektor (Ausbreitungsrichtung), **E**-Feld und **H**-Feld bilden weiterhin ein Rechtssystem

Bisher:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(z, t) &= \underline{\mathbf{E}}(z) e^{j(\omega t - kz)} \\ &= \underline{\mathbf{E}}(z) e^{j(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$



Wieso ist $\underline{\mathbf{E}}(z)$ und $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ komplex, wenn doch die Exponentialfunktion die zeitliche und räumliche beinhaltet? Begründung: Eine Phasenrotation um φ ist in der komplexen Amplitude enthalten (siehe VI. 2). Ist die Amplitude als reelle Größe $\mathbf{E}(z)$ oder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ gegeben, wird eine Phasenrotation von $\varphi = 0$ vorausgesetzt.

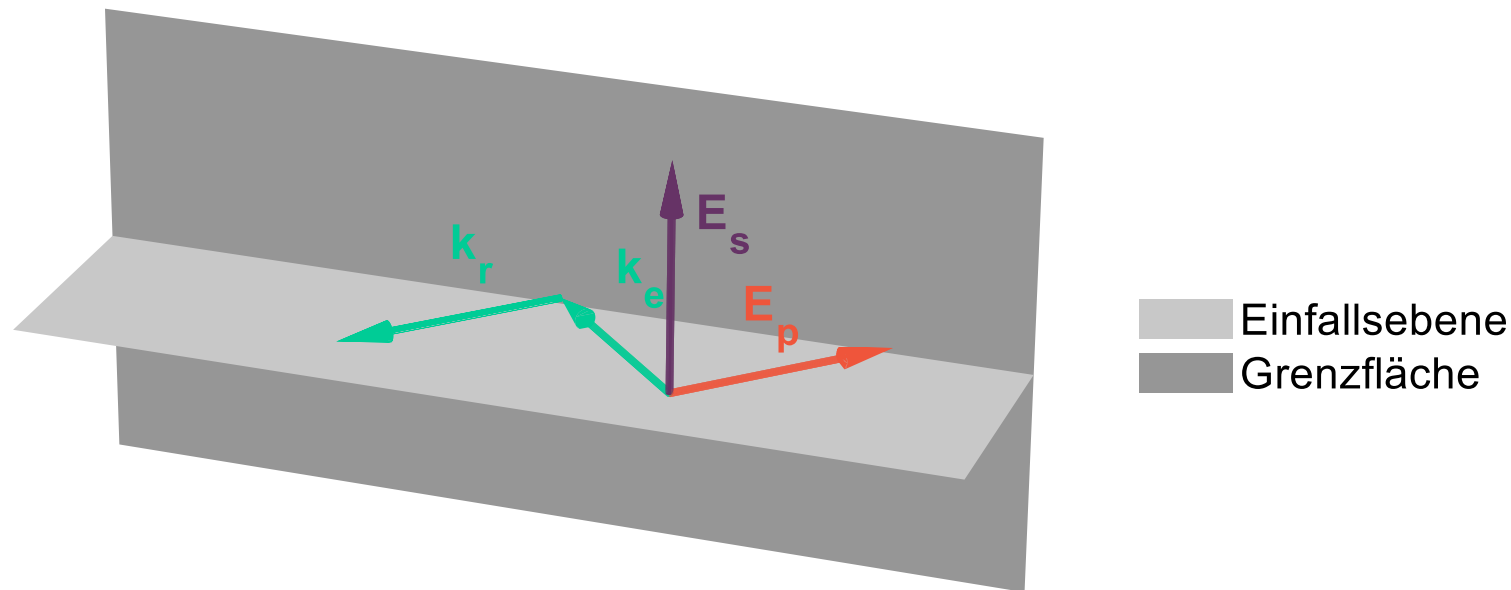
Senkrechte & parallele Polarisation

■ Senkrechte Polarisation:

Schwingungsrichtung E-Feld senkrecht zu Einfallsebene

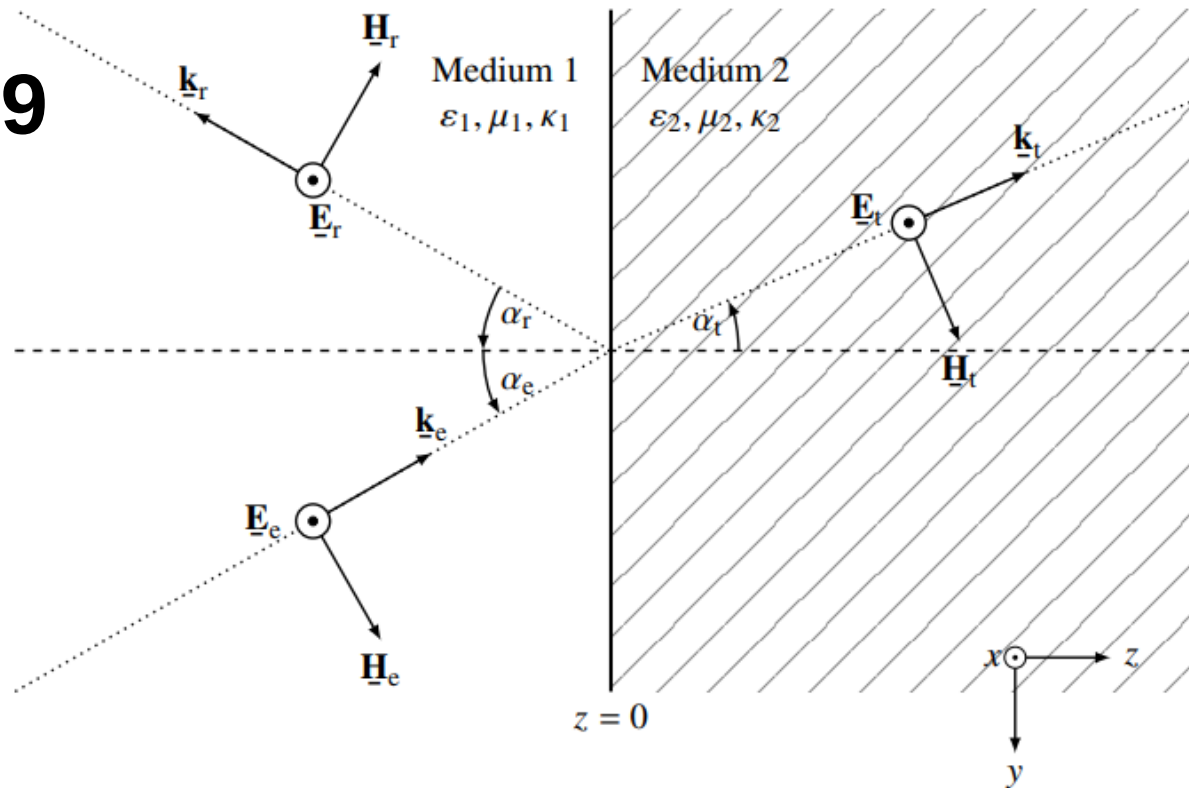
■ Parallele Polarisation:

Schwingungsrichtung E-Feld liegt in Einfallsebene



Hinweis: Die Einfallsebene ist die Ebene, die die Wellenvektoren $\mathbf{k}_e$ und $\mathbf{k}_r$ enthält. Folglich existieren bei senkrechtem Einfall unendlich viele solcher Ebenen.

Aufgabe 9



Hinlaufende Welle:

$$\underline{E}_e(\mathbf{r}, t) = E_e \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e(\omega)\mathbf{r})) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{k}_e(\omega) = k_1(\omega) (-\sin \alpha_e \mathbf{e}_y + \cos \alpha_e \mathbf{e}_z)$$

Reflektierte Welle:

$$\underline{E}_r(\mathbf{r}, t) = E_r \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r(\omega)\mathbf{r})) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{k}_r(\omega) = k_1(\omega) (-\sin \alpha_r \mathbf{e}_y - \cos \alpha_r \mathbf{e}_z)$$

Durchgelassene Welle:

$$\underline{E}_t(\mathbf{r}, t) = E_t \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_t(\omega)\mathbf{r})) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{k}_t(\omega) = k_2(\omega) (-\sin \alpha_t \mathbf{e}_y + \cos \alpha_t \mathbf{e}_z)$$

Hinweis: $k_{1,2}(\omega) = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_{1,2}(\omega)}$ und $Z_{1,2}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{1,2}(\omega)}}$.

Tangentiale Stetigkeitsbedingungen

$$H_{t,1} - H_{t,2} = i'$$

$$E_{t,1} - E_{t,2} = 0$$

Normale Stetigkeitsbedingungen

$$D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma$$

$$B_{n,1} - B_{n,2} = 0$$

Was passiert bei Totalreflexion?

- Für ein dielektrisches Medium ($\kappa = 0$) lässt sich das Snelliussche Brechungsgesetz mit $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ (Wellenzahl in Vakuum) und $n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$ formulieren zu $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$
- Wir betrachten den Fall für welchen genau $\vartheta_2 = 90^\circ \rightarrow \sin \vartheta_2 = 1$ ist, also in der Grenzfläche, der z-Koordinate, liegt (roter Pfeil).

$$n_1 \sin \vartheta_{1,T} = n_2$$

- z-Komponenten des Wellenvektors (es gilt $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$, Stetigkeitsbedingung) für $\vartheta_1 > \vartheta_{1,T}$

$$k_{1,z} = k_{3,z} = k_{2,z}$$

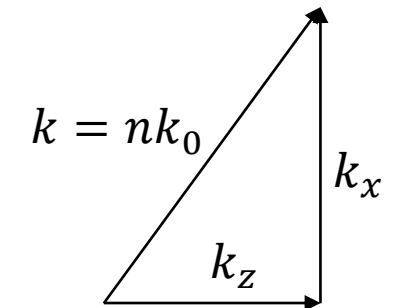
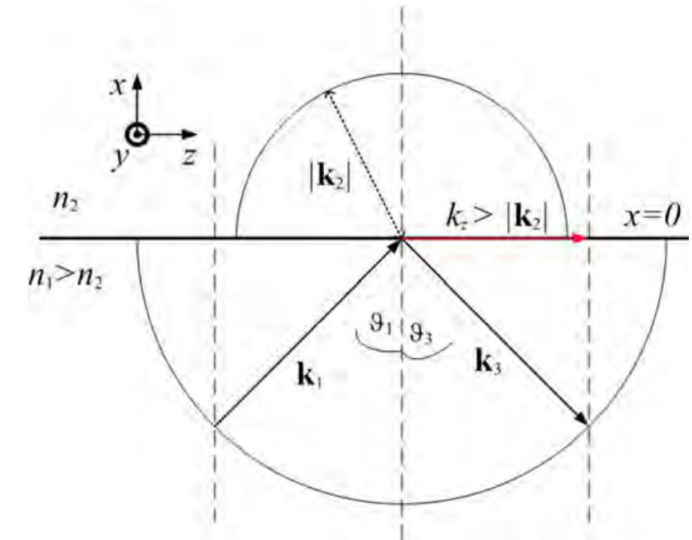
$$n_1 k_0 \sin \vartheta_1 > n_2 k_0$$

- Aus $k_{2,x}^2 + k_{2,z}^2 = n_2^2 k_0^2$ lässt sich erkennen, dass $k_{2,x}^2$ negativ sein muss, da $k_{2,z}^2 > n_2^2 k_0^2$ gilt. $k_{2,x}$ ist also rein imaginär $\rightarrow k_{2,x} = \pm j k_{2,x}^{(i)}$

- Einsetzen in transmittierte Welle mit $\mathbf{k} = k_x + k_z$

$$\underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_2 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} = \underline{\mathbf{E}}_2 e^{j\omega t} e^{-j k_{2,z} z} e^{-k_{2,x} x}$$

- Der Exponentialterm, welcher $k_{2,x}$ beinhaltet hat kein j mehr und stellt daher keine Phasenrotation dar, sondern einen exponentiellen Abfall des Feldes in x-Richtung!
D.h. es wird keine Leistung in x-Richtung transportiert!

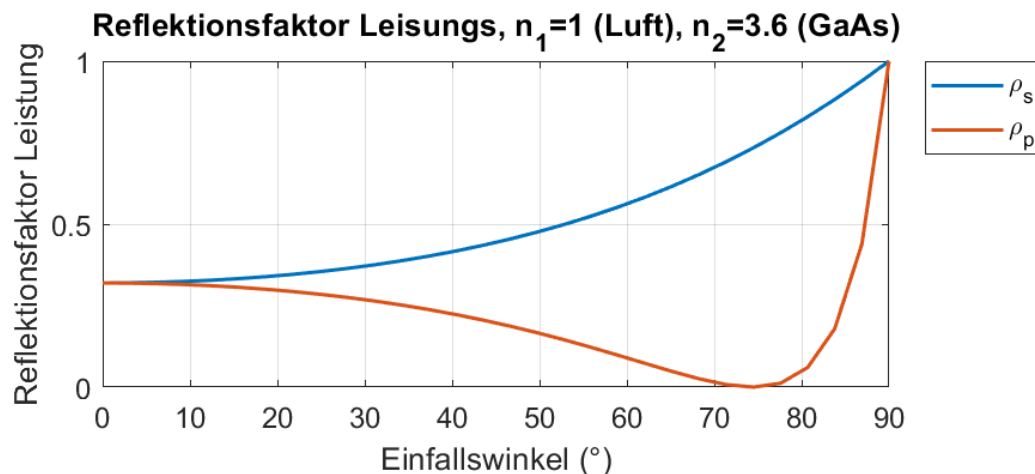


$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = n^2 k_0^2$$

Brewsterscher Polarisationswinkel

- Trifft eine beliebig polarisierte Welle im Brewsterschen Polarisationswinkel auf eine Grenzfläche, so wird nur die senkrecht auf der Einfallsebene stehende Feldkomponente reflektiert.
- Dieser Winkel lässt sich entweder aus den Reflexionsfaktoren der Feldkomponenten herleiten (Vorlesung) oder indem man die Reflexionsfaktoren der Wellenleistung betrachtet.
- Die Feldleistung ist proportional zum Betragsquadrats des Feldes, es gilt demnach

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}, \quad \underline{r}_p = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2}, \quad \rho_s = |\underline{r}_s|^2, \quad \rho_p = |\underline{r}_p|^2$$



Bildquelle: [Brewster's angle - Wikipedia](#)