

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 05

Abgabe bis zum 05.12.2022 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 9:

Eine ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle breitet sich in einem Medium 1 aus und trifft unter einem Winkel α_e bei $z = 0$ auf eine Grenzfläche zu einem zweiten Medium (s. Abbildung 1). Das H-Feld liegt in der Einfallsebene und das E-Feld steht orthogonal auf der Einfallsebene. Ein Teil der Welle wird reflektiert, ein Teil wird durchgelassen (transmittiert). Medium 1 hat die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega)$ und Medium 2 $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_2(\omega)$. Es gilt überall $\mu = \mu_0$ und $\kappa = 0$.

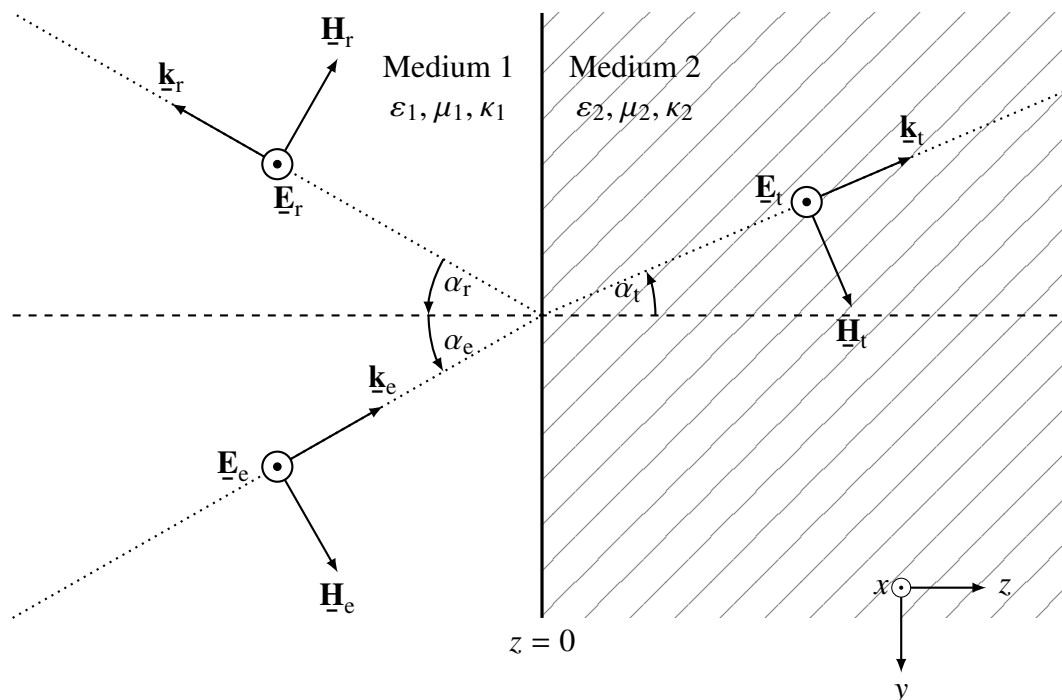


Abbildung 1

Der Ortsvektor ist hier als Vektor in kartesischen Koordinaten aufzufassen, d.h. $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$. Wir nehmen zudem verlustlose Propagation an, d.h. der Wellenvektor $\mathbf{k}(\omega)$ ist reellwertig. Die E-Felder der schräg einlaufenden Welle lassen sich mit Hilfe des Wellenvektors $\mathbf{k}(\omega)$ und des Ortsvektors $\mathbf{r}$ wie folgt beschreiben:

Hinlaufende Welle:

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_e \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e(\omega) \mathbf{r})) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{k}_e(\omega) = k_1(\omega) (-\sin \alpha_e \mathbf{e}_y + \cos \alpha_e \mathbf{e}_z)$$

Reflektierte Welle:

$$\underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_r \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r(\omega) \mathbf{r})) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{k}_r(\omega) = k_1(\omega) (-\sin \alpha_r \mathbf{e}_y - \cos \alpha_r \mathbf{e}_z)$$

Durchgelassene Welle:

$$\underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_t \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_t(\omega) \mathbf{r})) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{k}_t(\omega) = k_2(\omega) (-\sin \alpha_t \mathbf{e}_y + \cos \alpha_t \mathbf{e}_z)$$

Hinweis: $k_{1,2}(\omega) = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_{1,2}(\omega)}$ und $Z_{1,2}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{1,2}(\omega)}}$.

- a) Welche Koordinaten spannen die Einfallsebene auf? Handelt es sich bei der einfallenden Welle um eine senkrecht oder parallel polarisierte Welle? Begründen Sie ihre Aussagen.

Zur Bestimmung der Polarisation muss zunächst die Grenzfläche und Einfallsebene bestimmt werden. Die Grenzfläche ist die Ebene in welcher der Grenzübergang zwischen den beiden Materialien liegt. In unserem Fall ist dies die x - y -Ebene bei $z = 0$. Die Einfallsebene ist die Ebene, welche die Wellenvektoren $\underline{k}_e$ und $\underline{k}_r$ enthält und trifft hier auf die y - z -Ebene zu. Da die Schwingungsrichtung des E-Feldes nun senkrecht auf der Einfallsebene steht, liegt in diesem Beispiel eine senkrechte Polarisation vor.

- b) Handelt es sich bei der einfallenden Welle um eine linear, zirkular oder elliptisch polarisierte Welle? Begründen Sie ihre Aussage.

Das elektrische Feld besitzt nur eine einzige Amplitude. Wir beschreiben hier also nur eine einzige harmonische ebene Welle, welche in x -Richtung schwingt. Es handelt sich daher um eine lineare Polarisation. Damit eine elliptische oder zirkulare Polarisation möglich ist, wird die Überlagerung (Superpositionsprinzip) von mindestens einer weiteren ebenen Welle, welche nicht in dieselbe Richtung wie die erste Welle schwingt, benötigt.

- c) Verwenden Sie für den Fall $t = 0$ und $z = 0$ die Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente des E-Feldes, um die Reflexions- und Transmissionswinkel in Abhängigkeit des Einfallswinkels α_e zu ermitteln.

Die elektrischen Tangentialkomponenten müssen an der Grenzfläche stetig sein. Einsetzen der Feldkomponenten in die Stetigkeitsbedingung $E_1 = E_2$ mit ($t = 0$ und (effektiv) $\mathbf{r} = y \mathbf{e}_y$) ergibt:

$$\underline{E}_e \exp(j k_1(\omega) \sin \alpha_e y) + \underline{E}_r \exp(j k_1(\omega) \sin \alpha_r y) = \underline{E}_t \exp(j k_2(\omega) \sin \alpha_t y)$$

Diese Gleichung ist nichtlinear in y und muss für jeden Punkt in der Grenzfläche, also für alle y , erfüllt sein. Soll die Beziehung $\underline{E}_e + \underline{E}_r = \underline{E}_t$ bei $y = 0$ nun auch für beliebig andere y gelten, folgt daraus, dass alle Exponenten der Exponentialfunktionen identisch sein müssen:

$$j k_1(\omega) \sin \alpha_e y = j k_1(\omega) \sin \alpha_r y = j k_2(\omega) \sin \alpha_t y$$

In anderen Worten: Wenn alle Exponenten der Exponentialfunktion gleich sind, dann kann man diese Ausklammern und auf beiden Seiten der Gleichung kürzen. Es bleibt $\underline{E}_e + \underline{E}_r = \underline{E}_t$ an allen beliebigen Stellen y übrig und die Gleichung ist erfüllt. Daraus folgen dann das Reflexionsgesetz und das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \alpha_e \\ \sin \alpha_t &= \frac{k_1(\omega)}{k_2(\omega)} \sin \alpha_e \end{aligned}$$

- d) Berechnen Sie für den Fall $t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ mit folgendem Zusammenhang den komplexen Zeiger des $\underline{\mathbf{H}}$ -Feldes:

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z(\omega)} \mathbf{e}_k \times \underline{\mathbf{E}}$$

Mit Kenntnis der Wellenvektor-Komponenten und der elektrischen Feldkomponenten, lässt sich durch das Kreuzprodukt bestimmen, welche magnetischen Feldkomponenten ungleich Null sind.

Der Wellenvektor hat nun nur Anteile in y - und z -Richtung. Das E-Feld hingegen nur Anteile in x -Richtung. Das Kreuzprodukt enthält entsprechend nur Anteile in y - und z -Richtung gemäß $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$. Setzt man nun die jeweiligen elektrischen Feldkomponenten ein erhält man:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{H}}_e &= \frac{1}{Z(\omega)} \mathbf{e}_{k_e} \times \underline{\mathbf{E}}_e \\ &= \frac{1}{Z_1(\omega)} E_e \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e(\omega) \mathbf{r})) (\cos \alpha_e \mathbf{e}_y + \sin \alpha_e \mathbf{e}_z) \\ \underline{\mathbf{H}}_r &= \frac{1}{Z_1(\omega)} E_r \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r(\omega) \mathbf{r})) (-\cos \alpha_r \mathbf{e}_y + \sin \alpha_r \mathbf{e}_z) \\ \underline{\mathbf{H}}_t &= \frac{1}{Z_2(\omega)} E_t \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_t(\omega) \mathbf{r})) (\cos \alpha_t \mathbf{e}_y + \sin \alpha_t \mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

Da $t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ gilt vereinfacht sich das $\underline{\mathbf{H}}$ -Feld zu:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{H}}_e &= \frac{1}{Z_1(\omega)} E_e (\cos \alpha_e \mathbf{e}_y + \sin \alpha_e \mathbf{e}_z) \\ \underline{\mathbf{H}}_r &= \frac{1}{Z_1(\omega)} E_r (-\cos \alpha_r \mathbf{e}_y + \sin \alpha_r \mathbf{e}_z) \\ \underline{\mathbf{H}}_t &= \frac{1}{Z_2(\omega)} E_t (\cos \alpha_t \mathbf{e}_y + \sin \alpha_t \mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

- e) Stellen Sie nun die Stetigkeitsbedingungen für alle Felder auf ($t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$) und berechnen Sie so E_t und E_r in Abhängigkeit von E_e . Geben Sie abschließend die Reflexions- und Transmissionsfaktoren $\underline{r}$ und $\underline{t}$ an.

Unter der Annahme von $t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ sind die Exponentialterme, welche die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Welle beschreiben, gleich eins. Die Stetigkeitsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}E\text{-tangential} &\implies \underline{E}_e + \underline{E}_r = \underline{E}_t \\ H\text{-tangential} &\implies \frac{1}{Z_1(\omega)} E_e \cos \alpha_e - \frac{1}{Z_1(\omega)} E_r \cos \alpha_r = \frac{1}{Z_2(\omega)} E_t \cos \alpha_t \\ E\text{-orthogonal} &\implies \text{nicht vorhanden} \\ B\text{-orthogonal} &\implies \frac{1}{Z_1(\omega)} E_e \sin \alpha_e + \frac{1}{Z_1(\omega)} E_r \sin \alpha_r = \frac{1}{Z_2(\omega)} E_t \sin \alpha_t\end{aligned}$$

Die tangentielle Bedingung für das E-Feld ergibt sich aus Aufgabenteil c). Eine orthogonale Bedingung existiert nicht, da kein E-Feld orthogonal zur Grenzfläche vorhanden ist (da senkrechte Polarisation). Die tangentielle und orthogonale Bedingung für das H-Feld lassen sich ermitteln, indem man das H-Feld aus Aufgabenteil d) in die tangentielle bzw. orthogonale Stetigkeitsbedingung $H_1 = H_2$ bzw. $B_1 = B_2$ (mit $i' = 0$, da $\kappa = 0$ angenommen) einsetzt.

Als nächstes setzen wir das Brechungsgesetz $\alpha_e = \alpha_r$ in die Stetigkeitsbedingungen ein. Anschließend können wir $\underline{E}_e + \underline{E}_r = \underline{E}_t$ in die tangentielle und orthogonale H-Feld-Bedingung einsetzen, um jeweils entweder das $\underline{E}_r$ - oder $\underline{E}_t$ -Feld zu eliminieren. Uns fällt auf, dass die orthogonale Bedingung gerade dem Snelliusschen Brechungsgesetz entspricht. Mit der tangentialen E- und H-Feld-Bedingung bleibt folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$E_e + E_r = E_t \quad (1)$$

$$E_e \cos \alpha_e - E_r \cos \alpha_e = \frac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)} E_t \cos \alpha_t. \quad (2)$$

Setzt man Gleichung (1) in (2) ein, so lässt sich jeweils $\underline{E}_r$ oder $\underline{E}_t$ eliminieren und man erhält die gesuchten Felder in Abhängigkeit von $\underline{E}_e$

$$\begin{aligned}\underline{E}_t &= \frac{2 \cos \alpha_e}{\frac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)} \cos \alpha_t + \cos \alpha_e} \underline{E}_e \\ &= \frac{2 Z_2(\omega) \cos \alpha_e}{Z_1(\omega) \cos \alpha_t + Z_2(\omega) \cos \alpha_e} \underline{E}_e \\ \underline{E}_r &= \left(\frac{2 Z_2(\omega) \cos \alpha_e}{Z_1(\omega) \cos \alpha_t + Z_2(\omega) \cos \alpha_e} - 1 \right) \underline{E}_e \\ &= \frac{Z_2(\omega) \cos \alpha_e - Z_1(\omega) \cos \alpha_t}{Z_2(\omega) \cos \alpha_e + Z_1(\omega) \cos \alpha_t} \underline{E}_e\end{aligned}$$

Der Reflexions- bzw. Transmissionsfaktor sind als der Anteil der reflektierten bzw. der transmittierten Welle zu der einfallenden Welle definiert. Es resultiert so

$$\begin{aligned}\underline{t} &= \frac{\underline{E}_t}{\underline{E}_e} = \frac{2 Z_2(\omega) \cos \alpha_e}{Z_1(\omega) \cos \alpha_t + Z_2(\omega) \cos \alpha_e} \\ \underline{r} &= \frac{\underline{E}_r}{\underline{E}_e} = \frac{Z_2(\omega) \cos \alpha_e - Z_1(\omega) \cos \alpha_t}{Z_2(\omega) \cos \alpha_e + Z_1(\omega) \cos \alpha_t}\end{aligned}$$

- f) Ab welchem Einfallswinkel $\alpha_{e,\text{kritisch}}$ kann kein reelles α_t die Gleichung aus e) erfüllen? Welche Voraussetzung muss hierbei für ε_1 und ε_2 erfüllt sein? Erklären Sie, was für Winkel $\alpha_e \geq \alpha_{e,\text{kritisch}}$ mit der Welle in Medium 2 passiert.

Der kritische Winkel wird erreicht, wenn $\sin \alpha_e \frac{k_1}{k_2} > 1$. In diesem Fall kann kein reelles α_t die Bedingungen erfüllen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn Medium 1 optisch dichter als Medium 2 ist, also $\varepsilon_{r1} \geq \varepsilon_{r2}$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_e \frac{k_1(\omega)}{k_2(\omega)} &> 1 \\ \sin \alpha_e &> \frac{k_2(\omega)}{k_1(\omega)} \\ \alpha_{e,\text{kritisch}} &= \arcsin \frac{k_2(\omega)}{k_1(\omega)}\end{aligned}$$

Für den Fall $\alpha_e \geq \alpha_{e,\text{kritisch}}$ tritt Totalreflexion auf. Jedoch existiert auch in diesem Fall im zweiten Medium eine exponentiell abfallende Welle, da andernfalls die Stetigkeitsbedingungen verletzt wären. Die Lösung kann mittels eines komplexen Ansatzes für α_t hergeleitet werden. α_t kann dann allerdings nicht mehr als Winkel interpretiert werden. Das Phänomen Totalreflektion findet insbesondere in der optischen Kommunikation Anwendung, da es die Lichtwellenleitung, etwa mithilfe von Glasfasern, ermöglicht.

- g) Berechnen Sie den kritischen Winkel $\alpha_{e,\text{kritisch}}$ für den Übergang von Quarzglas $\varepsilon_{r,\text{Quarzglas}} \approx 2.132$ zu Luft $\varepsilon_{r,\text{Luft}} \approx 1$.

Beim Übergang von Quarzglas zu Luft ändert sich der Brechungsindex. Der kritische Winkel ist

$$\begin{aligned}\alpha_{e,\text{kritisch}} &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r,\text{Luft}}(\omega)}{\varepsilon_{r,\text{Quarzglas}}(\omega)}}\right) \\ &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2.132}}\right) \\ &= 43.23^\circ.\end{aligned}$$

- h) Als nächstes betrachten wir den Brewster-Winkel $\alpha_e = \alpha_{\text{Brewster}}$. Welchen Wert nimmt der Reflexionsfaktor r_p für einen Einfallswinkel $\alpha_e = \alpha_{\text{Brewster}}$ an? Beschreiben Sie, welche Auswirkung dieser Einfallswinkel auf eine parallel polarisierte eintreffende Welle hat.

Für den Brewster-Winkel $\alpha_e = \alpha_{\text{Brewster}}$ gilt $r_p = 0$. Das bedeutet, dass eine parallel polarisierte Welle nicht reflektiert wird, sondern nur transmittiert. Anwendung findet der Brewster-Winkel als Filter in der Fotografie oder bei Sonnenbrillen. Das Licht der Sonne ist unpolarisiert, das bedeutet, es hat eine große Anzahl an harmonischen ebenen Wellen, welche in verschiedene Raumrichtungen polarisiert sind. Eine Sonnenbrille mit Polarisationsfilter wird dann alle Wellenanteile, welche parallel polarisiert sind, rausfiltern. Nur die die senkrecht polarisierten Wellenanteile gelangen zum Auge und reduziert damit die Sonnenintensität. Überprüfen lässt sich dieses Verhalten mit einem Bildschirm. Bildschirme emittieren polarisiertes Licht. Hat man eine Sonnenbrille mit Polarisationsfilter auf und rotiert den Kopf, wird man erkennen, dass für bestimmte Winkel das Licht durchgelassen wird und für andere Winkel das Licht blockiert wird.

- i) Beeinflusst der Einfall unter dem Brewster-Winkel die Reflexion bzw. Transmission der Welle in dieser Aufgabenstellung? Begründen Sie ihre Antwort.

Der Brewster-Winkel kann in dieser Aufgabe nicht auftreten, da die Welle in dieser Aufgabe senkrecht polarisiert ist.

Die wellenlängenabhängige Brechzahl von Quarzglas (SiO_2) lässt sich durch die Sellmeier-Gleichung

$$n^2 - 1 = \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - 9.896161^2}$$

beschreiben. Abbildung 2 zeigt den Verlauf der Brechzahl über der Wellenlänge. Wir betrachten nun sichtbares Licht, welches Wellenlängen im Bereich von etwa 380 nm bis 750 nm aufweist. Dieses Licht treffe nun auf die Grenzschicht aus Abbildung 1.

- j) Erklären Sie qualitativ, welches Phänomen Sie für das gebrochene Licht in Medium 2 beobachten können.

Sichtbares Licht lässt sich als Superposition von einer Vielzahl einzelner harmonischer ebenen Wellen verstehen. In der Abbildung 2 erkennen wir, dass der Brechungsindex sich für den Wellenlängenbereich von Interesse leicht ändert. Jede ebene Welle, welche einer bestimmten sichtbaren Farbe entspricht, erfährt somit einen anderen Brechungsindex n und dementsprechend eine andere Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\omega)$. Dies hat zur Folge, dass jede Frequenz/Farbanteil des Lichtes einen anderen Transmissionswinkel $\alpha_t(\omega)$ hat und die Farben daher bei Propagation durch das zweite Medium sich voneinander separieren. Dieser physikalische Effekt wird bei Prismen verwendet.

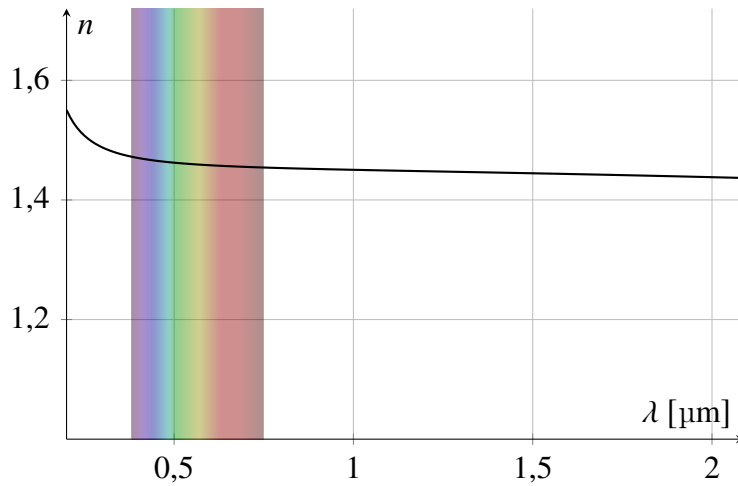


Abbildung 2

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu