EMW Übungsblatt 06

Abgabe bis zum 12.12.2022 um 11:30 via ILIAS

Aufgabe 10:

Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jede Wellenfunktion mit komplexer Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ an einem Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden kann.
In der Vorlesung haben wir das Huygenssche Prinzip und damit das Phänomen der Beugung mathematisch beschrieben. Zu diesem Zweck haben wir unsere Betrachtungen auf ein geeignetes quellenfreies Volumen V mit der Oberfläche O beschränkt, wobei wir den Betrag der in das Volumen gerichteten Flächennormalen mit n bezeichnet haben (vgl. Abbildung 1a). Da das betrachtete Volumen quellenfrei ist, müssen alle zu der Wellenfunktion am Punkt P beitragenden Kugelwellen auch die Oberfläche O des Volumens durchlaufen. Demzufolge erwarten wir, dass wir den Beitrag aller Kugelwellen in P durch den Beitrag aller Kugelwellen auf der Oberfläche darstellen können. Als Ausgangspunkt für die Beschreibung dieses Sachverhalts haben wir die zweite Greensche Identität

$$-\oint_O \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' = \int_V \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\Delta'\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Delta'\underline{U}(\mathbf{r}')\right)\mathrm{d}V' \tag{1}$$

angesetzt, wobei wir durch $'$ die Integrationsvariablen kennzeichnen. Für die skalare Hilfsfunktion $\underline{G}$ haben wir die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung

$$\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left(-\mathrm{j}\,k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \text{mit} \qquad \Delta\underline{G} + k^2\underline{G} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2}$$

gewählt, um das Volumenintegral auf der rechten Seite von (1) zu eliminieren (δ bezeichnet die Delta-Distribution). Da diese Fundamentallösung eine Singularität in $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ besitzt, müssen wir das Integrationsvolumen in Abbildung 1a so wählen, dass eine kleine (nahezu geschlossene) Kugel den Punkt P ausschließt. Diese Kugel ist wiederum durch einen infinitesimalen Schlauch mit dem „Äußeren“ von V verbunden. So wird $\mathbf{r}'$ im Zuge der Integration den Wert $\mathbf{r}$ *nicht* annehmen.

a) Nehmen Sie an, dass $\underline{U}$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung darstellt. Zeigen Sie so unter Verwendung von (2), dass das Volumenintegral auf der rechten Seite von (1) verschwindet.

   Hinweis: Ist $\underline{U}$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, so gilt $\Delta\underline{U} + k^2\underline{U} = 0$.

Da das Volumenintegral in (1) verschwindet, gilt

$$-\oint_O \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' = 0\,. \tag{3}$$

Nun nehmen wir an, dass $\underline{U}$ und $\underline{G}$ stetige Funktionen sind. Dementsprechend muss das Integral über den Schlauch infinitesimaler Dicke ebenfalls verschwinden. Daher vereinfacht sich die linke Seite von (3) zu der Summe des Integrals über die Hüllfläche H und des Integrals über die Kugelfläche K. Die vereinfachten Integrationsgebiete sind in Abbildung 1b dargestellt und erlauben uns, Gleichung (3) folgendermaßen zu schreiben

$$-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' = \oint_H \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F'\,. \tag{4}$$

Im nächsten Schritt möchten wir zeigen, dass das Integral über die Kugelfläche K gerade dem Wert der Wellenfunktion $\underline{U}(\mathbf{r})$ entspricht. Wir schreiben $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Da sich der Punkt P im Mittelpunkt der Kugel befindet, zeigt der Normalenvektor stets in die gleiche Richtung wie der Verbindungsvektor von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r}'$. Daher gilt $\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial R}$.

b) Setzen Sie $\underline{G}$ aus (2) ein und verwenden Sie die zuvor gegebenen Informationen, um den Integranden von

$$-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \mathrm{d}F' \tag{5}$$

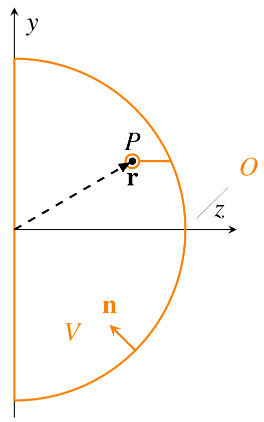
zu vereinfachen.

c) Da die Flächennormale zu K ausschließlich in radiale Richtung zeigt, gilt für das Flächenelement $\mathrm{d}F'$ in Kugelkoordinaten

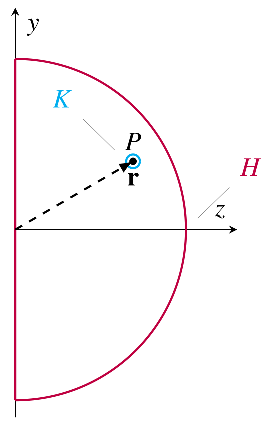
$$\mathrm{d}F' = R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\phi \,,$$

mit $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Setzen Sie in den vereinfachten Ausdruck von (5) ein. Zeigen Sie anschließend, dass im Grenzübergang $R \to 0$ das Integral (5) gerade zu $\underline{U}(\mathbf{r})$ wird.

d) Erklären Sie anschaulich, weshalb das Ergebnis aus Aufgabenteil c) nach dem Huygensschen Prinzip zu erwarten ist.



(a) Projektion des initialen Integrationsgebiets auf eine Ebene $x = \text{const}$. Der Schlauch ist dementsprechend durch eine Linie dargestellt.



(b) Vereinfachtes (projiziertes) Integrationsgebiet, das den Einfluss des Schlauchs vernachlässigt.

Abbildung 1

Aufgabe 11:

Wir nehmen an, dass eine ebene Welle, welche sich in $+z$-Richtung ausbreitet und vom Halbraum $z < 0$ ausgeht, in der Ebene $z = 0$ auf einen Schirm S mit der Apertur A trifft. Mithilfe des Kirchhoffschen Beugungsintegrals könnten wir nun die Feldverteilung an jedem Punkt im Halbraum $z > 0$ ermitteln. Für hinreichend große Abstände von der Apertur liefert allerdings bereits das Fresnelsche Beugungsintegral

$$\underline{U}^{(\mathrm{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0 \exp(-\mathrm{j}\,kz)}{\lambda z} \iint_A \exp\left(-\mathrm{j}\,k\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z}\right) \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,, \tag{6}$$

eine hinreichende Beschreibung, welche mathematisch leichter zu handhaben ist als das Kirchhoffsche Beugungsintegral.

a) Gegeben sei die Indikatorfunktion

$$g_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Verwenden Sie g_A, um die Integrationsgrenzen des Fresnelschen Beugungsintegrals (6) ins Unendliche zu erweitern.

b) Führen Sie nun auch die Raumfrequenzen $\xi = -x/\lambda z$ und $\upsilon = -y/\lambda z$ ein, um das Fresnelsche Beugungsintegral in ein Fourierintegral zu überführen.

Hinweis: Orientieren Sie sich an dem entsprechenden Vorgehen für die Fraunhofer-Näherung aus den Vorlesungsfolien.

c) Zeigen Sie rechnerisch, unter welchen Bedingungen wir das Fresnelsche Beugungsintegral zu dem Fraunhoferschen Beugungsintegral vereinfachen können.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass sich die Apertur A im Koordinatenursprung befindet und stets $x'^2 + y'^2 \leq R^2$ gilt.

d) Ermitteln Sie mithilfe des Fraunhoferschen Beugungsintegrals die Feldverteilung hinter der rechteckigen Apertur

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < \frac{d_x}{2} \wedge |y| < \frac{d_y}{2}\right\} .$$

e) Erklären Sie rechnerisch was geschieht, wenn die Apertur zwei Öffnungen im Abstand D entlang x besitzt, also folgende Menge die Apertur beschreibt

$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \left|x \pm \frac{D}{2}\right| < \frac{d_x}{2} \wedge |y| < \frac{d_y}{2}\right\} .$$

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu