Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 06

Abgabe bis zum 12.12.2022 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 10:

Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jede Wellenfunktion mit komplexer Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ an einem Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden kann.
In der Vorlesung haben wir das Huygenssche Prinzip und damit das Phänomen der Beugung mathematisch beschrieben. Zu diesem Zweck haben wir unsere Betrachtungen auf ein geeignetes quellenfreies Volumen V mit der Oberfläche O beschränkt, wobei wir den Betrag der in das Volumen gerichteten Flächennormalen mit n bezeichnet haben (vgl. Abbildung 1a). Da das betrachtete Volumen quellenfrei ist, müssen alle zu der Wellenfunktion am Punkt P beitragenden Kugelwellen auch die Oberfläche O des Volumens durchlaufen. Demzufolge erwarten wir, dass wir den Beitrag aller Kugelwellen in P durch den Beitrag aller Kugelwellen auf der Oberfläche darstellen können. Als Ausgangspunkt für die Beschreibung dieses Sachverhalts haben wir die zweite Greensche Identität

$$-\oint_O \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right) \mathrm{d}F' = \int_V \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\Delta'\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Delta'\underline{U}(\mathbf{r}')\right) \mathrm{d}V' \quad (1)$$

angesetzt, wobei wir durch $'$ die Integrationsvariablen kennzeichnen. Für die skalare Hilfsfunktion $\underline{G}$ haben wir die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung

$$\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp\left(-\mathrm{j}\,k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \text{mit} \qquad \Delta\underline{G} + k^2\underline{G} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2)$$

gewählt, um das Volumenintegral auf der rechten Seite von (1) zu eliminieren (δ bezeichnet die Delta-Distribution). Da diese Fundamentallösung eine Singularität in $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ besitzt, müssen wir das Integrationsvolumen in Abbildung 1a so wählen, dass eine kleine (nahezu geschlossene) Kugel den Punkt P ausschließt. Diese Kugel ist wiederum durch einen infinitesimalen Schlauch mit dem „Äußeren“ von V verbunden. So wird $\mathbf{r}'$ im Zuge der Integration den Wert $\mathbf{r}$ *nicht* annehmen.

a) Nehmen Sie an, dass $\underline{U}$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung darstellt. Zeigen Sie so unter Verwendung von (2), dass das Volumenintegral auf der rechten Seite von (1) verschwindet.

Hinweis: Ist $\underline{U}$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, so gilt $\Delta\underline{U} + k^2\underline{U} = 0$.

Ges: Nachweis, dass das Volumenintegral in (1) verschwindet

Geg: $\Delta\underline{U} + k^2\underline{U} = 0$ und $\Delta\underline{G} + k^2\underline{G} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

Verwenden wir die Informationen über $\underline{U}$ bzw. $\underline{G}$, können wir $\Delta'\underline{U}(\mathbf{r}')$ bzw. $\Delta'\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ schreiben als

$$\begin{aligned}\Delta'\underline{U}(\mathbf{r}') &= -k^2\underline{U}(\mathbf{r}')\\ \Delta'\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - k^2\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,.\end{aligned}$$

Einsetzen in das zu untersuchende Volumenintegral liefert

$$\begin{aligned}\int_V \left(\underline{U}\Delta'\underline{G} - \underline{G}\Delta'\underline{U}\right)\mathrm{d}V' &= \int_V \underline{U}\left(-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - k^2\underline{G}\right) - \underline{G}\left(-k^2\underline{U}\right)\mathrm{d}V'\\ &= -\int_V \underline{U}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

Da der Punkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ außerhalb des Integrationsvolumens V liegt, ist auch die Delta-Distribution für alle $\mathbf{r}' \in V$ identisch null. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\int_V (\underline{U}\Delta'\underline{G} - \underline{G}\Delta'\underline{U})\,\mathrm{d}V' = 0\,. \quad \square$$

Da das Volumenintegral in (1) verschwindet, gilt

$$-\oint_O \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' = 0\,. \tag{3}$$

Nun nehmen wir an, dass $\underline{U}$ und $\underline{G}$ stetige Funktionen sind. Dementsprechend muss das Integral über den Schlauch infinitesimaler Dicke ebenfalls verschwinden. Daher vereinfacht sich die linke Seite von (3) zu der Summe des Integrals über die Hüllfläche H und des Integrals über die Kugelfläche K. Die vereinfachten Integrationsgebiete sind in Abbildung 1b dargestellt und erlauben uns, Gleichung (3) folgendermaßen zu schreiben

$$-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' = \oint_H \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F'\,. \tag{4}$$

Im nächsten Schritt möchten wir zeigen, dass das Integral über die Kugelfläche K gerade dem Wert der Wellenfunktion $\underline{U}(\mathbf{r})$ entspricht. Wir schreiben $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Da sich der Punkt P im Mittelpunkt der Kugel befindet, zeigt der Normalenvektor stets in die gleiche Richtung wie der Verbindungsvektor von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r}'$. Daher gilt $\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial R}$.

b) Setzen Sie $\underline{G}$ aus (2) ein und verwenden Sie die zuvor gegebenen Informationen, um den Integranden von

$$-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' \tag{5}$$

zu vereinfachen.

Ges: Vereinfachung von (5)

Geg: Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung $\underline{G}$, $\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial R}$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

Mit

$$\underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-\mathrm{j}\,k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R}\,,$$

erhalten wir unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel für die Ableitung

$$\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R} = \frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R}\left(-\frac{1}{R} - \mathrm{j}\,k\right)\,.$$

Einsetzen in den Integranden und anschließendes Vereinfachen führt auf

$$\begin{aligned}\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} &= \underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R}\left(-\frac{1}{R} - \mathrm{j}\,k\right) - \frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R}\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ &= -\frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R}\left(\underline{U}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}\,k\right) + \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\end{aligned}$$

c) Da die Flächennormale zu K ausschließlich in radiale Richtung zeigt, gilt für das Flächenelement $\mathrm{d}F'$ in Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}F' = R^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\phi\,,$$

mit $\vartheta \in [0,\pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Setzen Sie in den vereinfachten Ausdruck von (5) ein. Zeigen Sie anschließend, dass im Grenzübergang $R \to 0$ das Integral (5) gerade zu $\underline{U}(\mathbf{r})$ wird.

Ges: Ergebnis von (5)

Geg: Vereinfachter Integrand aus b), das Flächenelement $\mathrm{d}F'$

Einsetzen des Ergebnisses aus b) sowie des Flächenelements $\mathrm{d}F'$ resultiert in

$$\begin{aligned}
-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' &= \oint_K \frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R}\left(\underline{U}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{R}+\mathrm{j}\,k\right)+\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi R}\left(\underline{U}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{R}+\mathrm{j}\,k\right)+\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right) R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\exp(-\mathrm{j}\,kR)}{4\pi}\left(\underline{U}(\mathbf{r}')\,(1+\mathrm{j}\,kR)+R\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right) \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi\,.
\end{aligned}$$

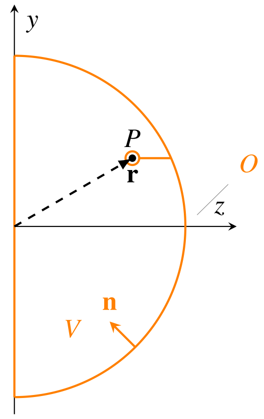
Im Grenzübergang $R \to 0 \iff \mathbf{r}' \to \mathbf{r}$ (das entspricht einer Kugel mit infinitesimalem Radius um $\mathbf{r}$) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\mathrm{d}F' &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underline{U}(\mathbf{r})\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\underline{U}(\mathbf{r})}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\underline{U}(\mathbf{r})}{4\pi}\int_0^{2\pi} [-\cos\vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\underline{U}(\mathbf{r})}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\phi \\
&= \underline{U}(\mathbf{r})\,,\quad \square
\end{aligned}$$

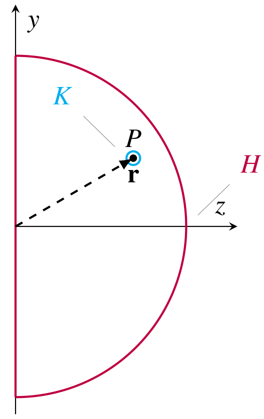
wobei wir angenommen haben, dass $\frac{\partial \underline{U}}{\partial n'}$ in $\mathbf{r}$ endlich ist.

d) Erklären Sie anschaulich, weshalb das Ergebnis aus Aufgabenteil c) nach dem Huygensschen Prinzip zu erwarten ist.

Da das Volumen innerhalb der Kugel quellenfrei ist, müssen alle zu der Wellenfunktion am Punkt P beitragende Kugelwellen auch die Kugeloberfläche durchlaufen. Demzufolge erwarten wir nach dem Huygensschen Prinzip, dass wir den Beitrag aller Kugelwellen in P durch den Beitrag aller Kugelwellen auf der Oberfläche K darstellen können. Da die Kugel lediglich einen infinitesimalen Radius aufweist, ist die von den Kugelwellen auf K bei der Ausbreitung nach P zurückgelegte Strecke vernachlässigbar und das Integral über K muss identisch zu der Wellenfunktion in P sein.



(a) Projektion des initialen Integrationsgebiets auf eine Ebene x = const. Der Schlauch ist dementsprechend durch eine Linie dargestellt.



(b) Vereinfachtes (projiziertes) Integrationsgebiet, das den Einfluss des Schlauchs vernachlässigt.

Abbildung 1

Lösung zu Aufgabe 11:

Wir nehmen an, dass eine ebene Welle, welche sich in $+z$-Richtung ausbreitet und vom Halbraum $z < 0$ ausgeht, in der Ebene $z = 0$ auf einen Schirm S mit der Apertur A trifft. Mithilfe des Kirchhoffschen Beugungsintegrals könnten wir nun die Feldverteilung an jedem Punkt im Halbraum $z > 0$ ermitteln. Für hinreichend große Abstände von der Apertur liefert allerdings bereits das Fresnelsche Beugungsintegral

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0 \exp(-\mathrm{j}\,kz)}{\lambda z} \iint_A \exp\left(-\mathrm{j}\,k\,\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}\right) \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \,, \tag{6}$$

eine hinreichende Beschreibung, welche mathematisch leichter zu handhaben ist als das Kirchhoffsche Beugungsintegral.

a) Gegeben sei die Indikatorfunktion

$$g_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Verwenden Sie g_A, um die Integrationsgrenzen des Fresnelschen Beugungsintegrals (6) ins Unendliche zu erweitern.

Ges: Fresnelsches Beugungsintegral mit Integrationsgrenzen im Unendlichen

Geg: Indikatorfunktion g_A, Fresnelsches Beugungsintegral

Um die Integrationsgrenzen ins Unendliche zu erweitern, müssen wir lediglich den Integrand mit der Indikatorfunktion multiplizieren. Wir erhalten

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0 \exp(-\mathrm{j}\,kz)}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x',y')\,\exp\left(-\mathrm{j}\,k\,\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}\right) \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \,.$$

b) Führen Sie nun auch die Raumfrequenzen $\xi = -x/\lambda z$ und $\upsilon = -y/\lambda z$ ein, um das Fresnelsche Beugungsintegral in ein Fourierintegral zu überführen.

Hinweis: Orientieren Sie sich an dem entsprechenden Vorgehen für die Fraunhofer-Näherung aus den Vorlesungsfolien.

Ges: Fresnelsches Beugungsintegral als Fourierintegral

Geg: Fresnelsches Beugungsintegral, Raumfrequenzen ξ und υ

Um das Fresnelsche Beugungsintegral als Fourierintegral zu schreiben, multiplizieren wir zunächst das Argument der komplexen Exponentialfunktion im Integranden aus

$$k\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z} = \frac{k}{2z}\left(x^2+y^2-2xx'-2yy'+x'^2+y'^2\right) .$$

Davon ausgehend können wir an

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0\exp(-\mathrm{j}\,kz)}{\lambda z}\underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x',y')\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z}\right)\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'}_{=:I}$$

folgende Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x',y')\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\exp\!\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{z}\,(xx'+yy')\right)\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\
&= \exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x',y')\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp\!\left(\mathrm{j}\,\frac{k}{z}\,(xx'+yy')\right)\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\
&= \exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x',y')\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp\!\left(\mathrm{j}\,2\pi\left(\frac{x}{\lambda z}x'+\frac{y}{\lambda z}y'\right)\right)\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\
&= \exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x',y')\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp(-\mathrm{j}\,2\pi\,(\xi x'+\upsilon y'))\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' .
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0\exp(-\mathrm{j}\,kz)}{\lambda z}\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\mathcal{F}\left\{g_A(x',y')\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\right\}\Bigg|_{\substack{\xi=-x/\lambda z\\ \upsilon=-y/\lambda z}} .$$

Aus dem Ergebnis können wir Ablesen, dass wir neben dem Fraunhoferschen Beugungsintegral (siehe Vorlesung) auch das Fresnelsche Beugungsintegral (für den Fall einer ebenen Welle in der Apertur) mithilfe der Fouriertransformation der phasenverschobenen Indikatorfunktion

$$g_A(x',y')\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

auswerten können.

c) Zeigen Sie rechnerisch, unter welchen Bedingungen wir das Fresnelsche Beugungsintegral zu dem Fraunhoferschen Beugungsintegral vereinfachen können.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass sich die Apertur A im Koordinatenursprung befindet und stets $x'^2+y'^2 \leq R^2$ gilt.

Ges: Bedingungen für Gültigkeit Fraunhofer-Näherung

Geg: Fresnelsches Beugungsintegral

Wir erhalten genau dann das Fraunhofersche Beugungsintegral, wenn der quadratische Term im Exponenten einen vernachlässigbaren Beitrag liefert, d.h. er muss viel kleiner als π sein

$$\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2) \leq \frac{k}{2z} R^2 \ll \pi \,.$$

Umformen führt auf

$$\frac{\pi}{\lambda z} R^2 \ll \pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad R \ll \sqrt{\lambda z}\,.$$

Wir schlussfolgern also, dass wir für $R \ll \sqrt{\lambda z}$, die Fraunhofer-Näherung verwenden können. Dann gilt

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0 \exp(-\mathrm{j}\,kz)}{\lambda z} \exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}\right) \mathcal{F}\left\{g_A(x',y')\right\}\Big|_{\substack{\xi=-x/\lambda z\\ \upsilon=-y/\lambda z}} .$$

Hinweis: Um die Beugung einer Welle an einer Blende/Apertur zu beurteilen, wird in der Optik oft die (dimensionslose) Fresnel-Zahl

$$F = \frac{R^2}{\lambda z} = \frac{(R/\lambda)^2}{z/\lambda}$$

verwendet. Auf Basis dieser Kennzahl unterscheiden wir folgende Fälle:

- $F \ll 1$: Die Blende ist sehr klein oder der Abstand zur Apertur z sehr groß (ggü. der Wellenlänge) $\Longrightarrow$ Fernfeld, Fraunhofer-Beugung
- $F \simeq 1$: Die Blendengröße und der Abstand zur Apertur z sind ähnlich groß (ggü. der Wellenlänge) $\Longrightarrow$ Nahfeld, Fresnel-Beugung
- $F \gg 1$: Die Blende ist sehr groß oder der Abstand zur Apertur z sehr klein (ggü. der Wellenlänge) $\Longrightarrow$ Gültigkeit der geometrischen Optik/Strahlenoptik

d) Ermitteln Sie mithilfe des Fraunhoferschen Beugungsintegrals die Feldverteilung hinter der rechteckigen Apertur

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < \frac{d_x}{2} \wedge |y| < \frac{d_y}{2}\right\} .$$

Ges: Feldverteilung (in großem Abstand von der Apertur)

Geg: Apertur A, Fraunhofersches Beugungsintegral

Für die gegebene Apertur A können wir die Indikatorfunktion g_A schreiben als

$$g_A(x',y') = \mathrm{rect}(x'/d_x)\ \mathrm{rect}(y'/d_y)$$

mit der Rechteckfunktion

$$\mathrm{rect}(x') = \begin{cases} 1 & |x'| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{rect}(x'/d) = \begin{cases} 1 & |x'| < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Einsetzen in das Fraunhofersche Beugungsintegral führt auf folgenden Ausdruck

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}}{\lambda z}\, \underline{U}_0 \,\exp\!\left(-\mathrm{j}\, k \left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right) \mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}(x'/d_x)\right\}\Big|_{\xi=-x/\lambda z} \mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}(y'/d_y)\right\}\Big|_{\upsilon=-y/\lambda z} .$$

Um das Ergebnis zu erhalten, müssen wir nun die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion ermitteln. Exemplarisch widmen wir uns nun $\mathrm{rect}(x'/d_x)$ und verwenden die Frequenzvariable ξ ohne $\xi = -\frac{x}{\lambda z}$ explizit anzuführen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}(x'/d_x)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(x'/d_x)\, \exp(-\mathrm{j}\, 2\pi\xi x')\, \mathrm{d}x' \\
&= \int_{-d_x/2}^{d_x/2} \exp(-\mathrm{j}\, 2\pi\xi x')\, \mathrm{d}x' = \left[\frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi} \exp(-\mathrm{j}\, 2\pi\xi x')\right]_{x'=-d_x/2}^{d_x/2} \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi}\exp(-\mathrm{j}\,\pi\xi d_x) - \frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi}\exp(\mathrm{j}\,\pi\xi d_x) = \frac{1}{\mathrm{j}\,2}\frac{\exp(\mathrm{j}\,\pi\xi d_x) - \exp(-\mathrm{j}\,\pi\xi d_x)}{\pi\xi} \\
&= \frac{\sin(\pi\xi d_x)}{\pi\xi} = d_x\, \mathrm{sinc}(d_x\xi) .
\end{aligned}$$

Analoges Vorgehen führt für $\mathrm{rect}(y'/d_y)$ auf

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}(y'/d_y)\right\} = d_y\, \mathrm{sinc}(d_y\upsilon) .$$

Dementsprechend ergibt sich für den komplexen Zeiger der gesuchten Feldverteilung

$$\begin{aligned}
\underline{U}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathrm{j}}{\lambda z}\, \underline{U}_0 \,\exp\!\left(-\mathrm{j}\, k \left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right) \left[d_x\, \mathrm{sinc}(d_x\xi)\right]_{\xi=-x/\lambda z} \left[d_y\, \mathrm{sinc}(d_y\upsilon)\right]_{\upsilon=-y/\lambda z} \\
&= \frac{\mathrm{j}}{\lambda z}\, \underline{U}_0 \,\exp\!\left(-\mathrm{j}\, k \left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right) d_x\, d_y\, \mathrm{sinc}\left(\frac{d_x}{\lambda z}x\right) \mathrm{sinc}\left(\frac{d_y}{\lambda z}y\right) ,
\end{aligned}$$

und für die gesuchte Feldverteilung

$$U(\mathbf{r}) = \frac{U_0}{\lambda z}\, \sin\!\left(kz + k\frac{x^2+y^2}{2z}\right) d_x\, d_y\, \mathrm{sinc}\left(\frac{d_x}{\lambda z}x\right) \mathrm{sinc}\left(\frac{d_y}{\lambda z}y\right) .$$

Eine beispielhafte graphische Darstellung der normierten Intensität $|\underline{U}(\mathbf{r})|^2$ ist in Abbildung 2 gegeben. Im Prinzip haben wir in dieser Aufgabe das Einzelspaltexperiment aus der Schulphysik mithilfe der Wellenoptik beschrieben.

e) Erklären Sie rechnerisch was geschieht, wenn die Apertur zwei Öffnungen im Abstand D entlang x besitzt, also folgende Menge die Apertur beschreibt

$$A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \left|x \pm \frac{D}{2}\right| < \frac{d_x}{2} \wedge |y| < \frac{d_y}{2}\right\} .$$

Ges: Feldverteilung in großem Abstand von der Apertur

Geg: Apertur A_2, Fraunhofersches Beugungsintegral

Für die angepasste Apertur A_2 können wir die Indikatorfunktion g_{A_2} schreiben als

$$g_{A_2}(x', y') = (\mathrm{rect}((x + D/2)/d_x) + \mathrm{rect}((x - D/2)/d_x))\ \mathrm{rect}(y/d_y) .$$

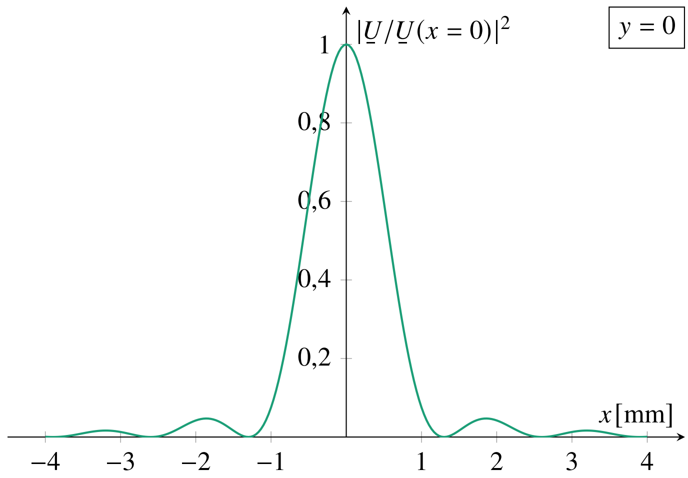


Abbildung 2: Intensität der normierten Feldverteilung entlang $y = 0$ hinter dem Einzelspalt für rotes Licht mit $\lambda = 0.65\,\mu\mathrm{m}$ und $z = 0.5\,\mathrm{m}$ bei einer Spaltgröße $d_x = 0.25\,\mathrm{mm}$.

Um auch für diese Apertur die Feldverteilung in großem Abstand zu ermitteln, benötigen wir erneut die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion. Letztgenannte tritt im Fall von A' entlang von x zweifach in verschobener Form auf. Da die Fouriertransformation eine lineare Operation darstellt, können wir die beiden um $x = \pm D/2$-zentrierten Terme separat transformieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}((x' \pm D/2)/d_x)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}((x' \pm D/2)/d_x)\ \exp(-\mathrm{j}\,2\pi\xi x')\ \mathrm{d}x' \\ &= \int_{\pm D/2 - d_x/2}^{\pm D/2 + d_x/2} \exp(-\mathrm{j}\,2\pi\xi x')\ \mathrm{d}x' = \left[\frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi}\exp(-\mathrm{j}\,2\pi\xi x')\right]_{x'=\pm D/2 - d_x/2}^{\pm D/2 + d_x/2} \\ &= \exp(\mp\mathrm{j}\,\pi\xi D)\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi}\exp(-\mathrm{j}\,\pi\xi d_x) - \frac{\mathrm{j}}{2\pi\xi}\exp(\mathrm{j}\,\pi\xi d_x)\right) \\ &= \exp(\mp\mathrm{j}\,\pi\xi D)\ d_x\,\mathrm{sinc}(d_x\xi)\,.\end{aligned}$$

Bilden wir also die Summe, wie sie auch in der Indikatorfunktion auftritt, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}((x' + D/2)/d_x) + \mathrm{rect}((x' - D/2)/d_x)\right\} = \\ &\qquad\qquad \exp(-\mathrm{j}\,\pi\xi D)\ d_x\,\mathrm{sinc}(d_x\xi) + \exp(+\mathrm{j}\,\pi\xi D)\ d_x\,\mathrm{sinc}(d_x\xi)\,.\end{aligned}$$

Zusammenfassen führt schließlich auf

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}((x' + D/2)/d_x) + \mathrm{rect}((x' - D/2)/d_x)\right\} &= d_x\,\mathrm{sinc}(d_x\xi)\ \left(\exp(-\mathrm{j}\,\pi\xi D) + \exp(+\mathrm{j}\,\pi\xi D)\right) \\ &= 2d_x\,\mathrm{sinc}(d_x\xi)\ \cos(\pi\xi D)\,,\end{aligned}$$

offenbar resultiert durch die Überlagerung eine Modulation mit $\cos(\pi\xi D)$, deren Periode von dem Mittenabstand der beiden Öffnungen D abhängt. Setzen wir entsprechend diesen Ausdruck für den komplexen Zeiger $\underline{U}(\mathbf{r})$ ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}\underline{U}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathrm{j}}{\lambda z}\,\underline{U}_0\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right)\left[2d_x\,\mathrm{sinc}(d_x\xi)\ \cos(\pi\xi D)\right]_{\xi=-x/\lambda z}\left[d_y\,\mathrm{sinc}(d_y\upsilon)\right]_{\upsilon=-y/\lambda z} \\ &= \frac{\mathrm{j}}{\lambda z}\,\underline{U}_0\,\exp\!\left(-\mathrm{j}\,k\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right) 2d_xd_y\,\mathrm{sinc}\left(\frac{d_x}{\lambda z}x\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{d_y}{\lambda z}y\right)\cos\left(\frac{\pi D}{\lambda z}x\right)\end{aligned}$$

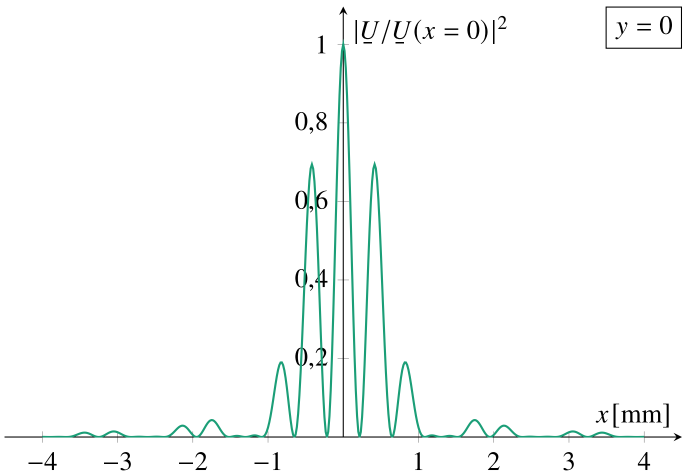


Abbildung 3: Intensität der normierten Feldverteilung entlang $y = 0$ hinter dem Doppelspalt für rotes Licht mit $\lambda = 0.65\,\mu\text{m}$ und $z = 0.5\,\text{m}$ bei einer Spaltgröße $d_x = 0.25\,\text{mm}$. Die Spalte weisen einen Abstand von $D = 0.75\,\text{mm}$ auf.

Analog zu Aufgabe d) erhalten wir für die Feldverteilung

$$U(\mathbf{r}) = \frac{U_0}{\lambda z}\,\sin\!\left(kz + k\frac{x^2+y^2}{2z}\right) 2d_x d_y\,\mathrm{sinc}\left(\frac{d_x}{\lambda z}x\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{d_y}{\lambda z}y\right)\cos\!\left(\frac{\pi D}{\lambda z}x\right)\,.$$

Die Modulation, welche uns bereits in der Fouriertransformation der Apertur aufgefallen ist, manifestiert sich also direkt in der Feldverteilung. Die Apertur mit zwei Öffnungen entspricht gerade dem aus der Schulphysik bekannten Doppelspaltexperiment, wobei der Cosinus-Term die dabei (im Vergleich zum Einzelspaltexperiment) zusätzlichen Maxima und Minima beschreibt. Eine beispielhafte graphische Darstellung der normierten Intensität $|\underline{U}(\mathbf{r})|^2$ ist in Abbildung 3 gegeben.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu