EMW Übungsblatt 07

Abgabe bis zum 19.12.2022 um 11:30 via ILIAS

Aufgabe 12:

In der Vorlesung haben wir den Gaußschen Strahl als Lösung der Helmholtz-Gleichung unter der paraxialen Näherung hergeleitet. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass wir alternativ den Gaußschen Strahl auch aus dem Fresnelschen Beugungsintegral (siehe Vorlesung 7 und Übung 6) herleiten können. Hierzu nehmen wir an, dass eine in $+z$-Richtung propagierende ebene Welle aus dem Halbraum $z < 0$

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = U_0 \exp(-\mathrm{j}\, kz)$$

in $z = 0$ auf eine gaußförmige „Apertur“ der Form

$$g_A(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right)$$

trifft. Hierbei bezeichnet w_0 den Strahlradius in $z = 0$, welchen wir deutlich größer als die Wellenlänge λ annehmen. Wir betrachten zudem Abstände vergleichbar mit oder groß gegenüber w_0, sodass die Fresnel-Näherung gültig ist.

a) Zeigen Sie mithilfe der Fourier-Darstellung des Fresnelschen Beugungsintegrals aus Übung 6, dass mit der betrachteten ebenen Welle und Apertur für die komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ der Welle für $z > 0$ folgende Beziehung gilt:

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\, U_0 \exp(-\mathrm{j}\, kz)}{\lambda z} \exp\left(-\mathrm{j}\, k\frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\mathrm{j}\, k\frac{x'^2}{2z}\right) \exp(-\mathrm{j}\, 2\pi\xi x')\, \mathrm{d}x'$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\mathrm{j}\, k\frac{y'^2}{2z}\right) \exp(-\mathrm{j}\, 2\pi\upsilon y')\, \mathrm{d}y', \quad (1)$$

wobei $\xi = -\frac{x}{\lambda z}$ und $\upsilon = -\frac{y}{\lambda z}$.

b) Verwenden Sie die Fourierkorrespondenz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\underline{\alpha} x'^2\right) \exp(-\mathrm{j}\, 2\pi\xi x')\, \mathrm{d}x' = \sqrt{\frac{\pi}{\underline{\alpha}}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\underline{\alpha}}\xi^2\right),$$

um die beiden Integrale in (1) aufzulösen. Substituieren Sie hierfür mit $\underline{\alpha} = \frac{1}{w_0^2} + \mathrm{j}\,\frac{k}{2z}$.

c) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung der Rayleigh-Länge $z_\mathrm{R} = kw_0^2/2$.

d) Vereinfachen Sie den Ausdruck für $\underline{U}(\mathbf{r})$ weiter, indem Sie nun $\underline{\alpha}$ resubstituieren und die Rayleigh-Länge einführen.

e) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung des Krümmungsradius $R(z)$ und Strahlradius $w(z)$ des Gaußschen Strahls.

Hinweis: Es gilt

$$R(z) = z\left(1 + \frac{z_\mathrm{R}^2}{z^2}\right) = \frac{z^2 + z_\mathrm{R}^2}{z} \qquad w^2(z) = w_0^2\left(1 + \frac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}\right) = \frac{2}{k}\frac{z_\mathrm{R}^2 + z^2}{z_\mathrm{R}}.$$

f) Vereinfachen Sie den Ausdruck für $\underline{U}(\mathbf{r})$ weiter, indem Sie nun auch den Krümmungsradius und Strahlradius einführen.

g) Führen Sie abschließend die Gouy-Phase $\varphi_\mathrm{G} = \arctan(z/z_\mathrm{R})$ ein und vereinfachen Sie Ihre Darstellung von $\underline{U}(\mathbf{r})$ so, dass Sie den Gaußschen Strahl erhalten, wie er in der Vorlesung eingeführt wurde

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = U_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp(-\mathrm{j}(kz - \varphi_\mathrm{G})) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\mathrm{j}\, \frac{k}{2R(z)} \left(x^2 + y^2\right)\right) .$$

h) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung der Gouy-Phase.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu