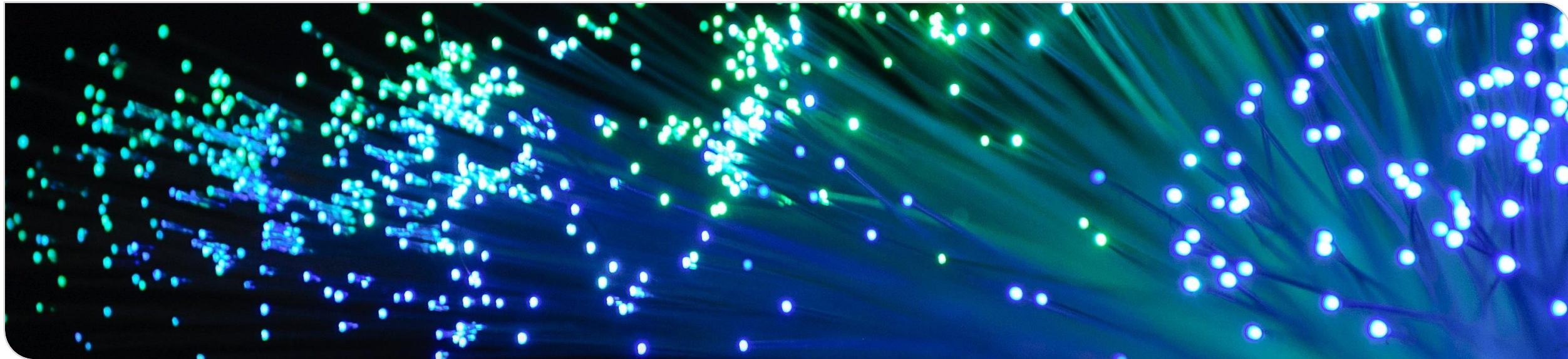


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 7

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel

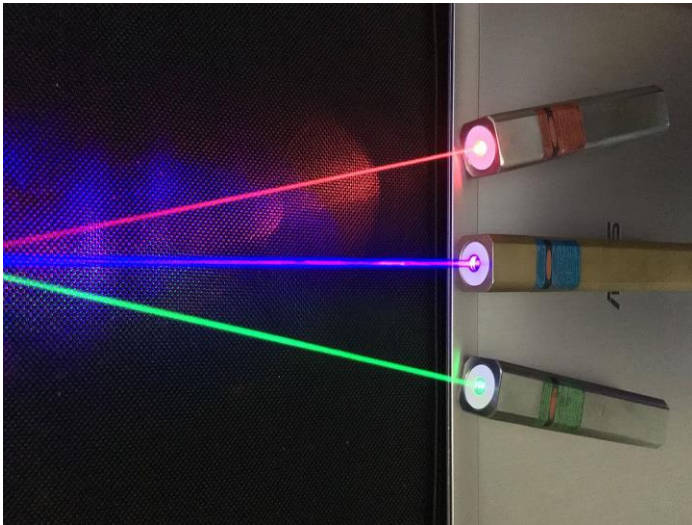


Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichung, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Polarisation
Übung 3	A6	Dispersive Medien
Übung 4	A7, A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Reflexion und Brechung
Übung 6	A10, 11	Beugung und Interferenz
Übung 7	A12	Gaußsche Strahl

Der Gaußsche Strahl - Intro

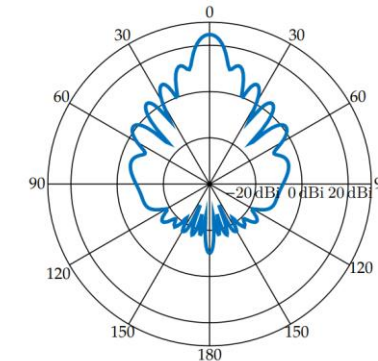
- Bisher: Ebene Wellen mit unendlich breiter Phasenfront → unendlich viel Energie in Welle
- Realität: Transversale Beschränkung der Welle
- Deutlich wird dies z.B. wenn man sich einen Laserstrahl anschaut
- Kombiniert Methoden der Strahlen- und Wellenoptik



Bildquelle: [Laserpointer – Wikipedia](#)

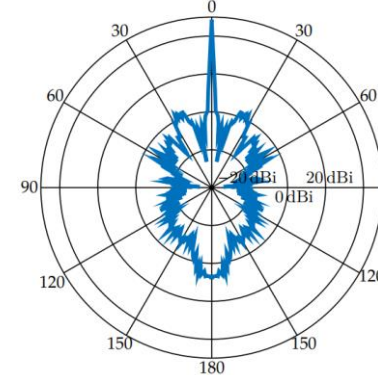


Bildquelle: [Der Laserleitstern des VLT | ESO Österreich](#)



Richtcharakteristik einer THz-Antenne für 6G (300 GHz Trägerwelle)

Oben:
divergenter „Strahl“. EM-Welle weitet sich nach der Antenne stark auf. Nachteil: Strahl weitet sich Kegel-förmig auf → die Empfängerantenne fängt nur einen kleinen Querschnitt, also weniger Signalleistung ein.



Unten:
Hinzunahme einer THz-Linse. Man erkennt sofort, dass der Strahl deutlich gebündelter ist → Empfängerantenne fängt mehr Leistung ein.

Paraxiale Näherung

- Ansatz für Feldgröße U

$$\underline{U}(\rho, \phi, z) = \underline{U}_0 \underline{\psi}(\rho, \phi, z) \exp(-jkz)$$

Transversale räumliche
Feldbegrenzung

Zeitliche Abhängigkeit
 $\exp(j\omega t)$ hier der Einfachheit
halber außen vor gelassen.

- Helmholtzgleichung in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial z^2} - j2k \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} = 0$$

Vernachlässigbar
klein

Auch klein, aber...

Sehr groß, da hohe Frequenzen bei optischen
Wellen. z.B. roter Laser:
 $\lambda \approx 700 \text{ nm}$, $f = 429 \text{ THz}$, $k = 8.98 \cdot 10^6 \text{ 1/m}$

- Paraxiale Näherung: Der transversale Feldverteilung des Strahls ändert sich nur sehr geringfügig mit z
 - Beispiel: Die Strahldicke handelsüblicher Laser nimmt mit „nur“ 1 mm/m zu.
- Daher Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten und der paraxialen Näherung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial \phi^2} - j2k \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} = 0$$

Der Gaußsche Strahl (I)

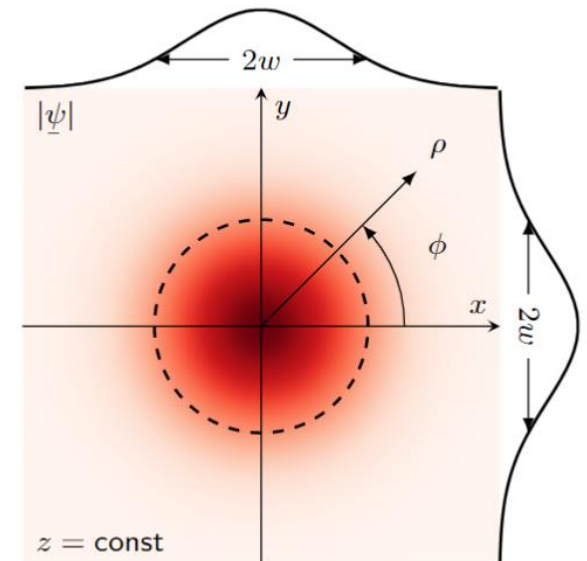
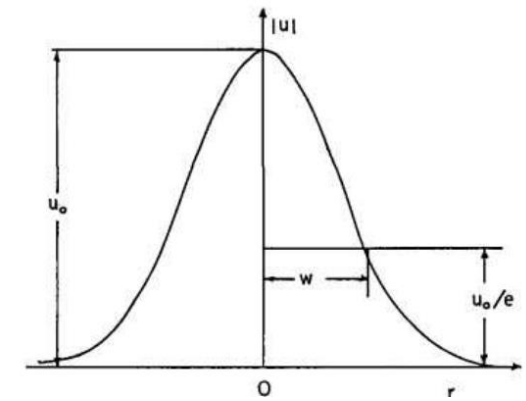
- Als Lösungsansatz für die Helmholtzgleichung beschreiben wir den Gaußschen Strahl

Da Strahl rotationssymmetrisch ist fliegt die Winkelabhängigkeit raus

Beim Radius $\rho = w(z)$ ist der Exponent -1 . Der Exponentialterm ist somit $1/e \rightarrow w(z)$ ist $1/e$ -Radius

Das Feld klingt Gaußförmig mit ρ ab

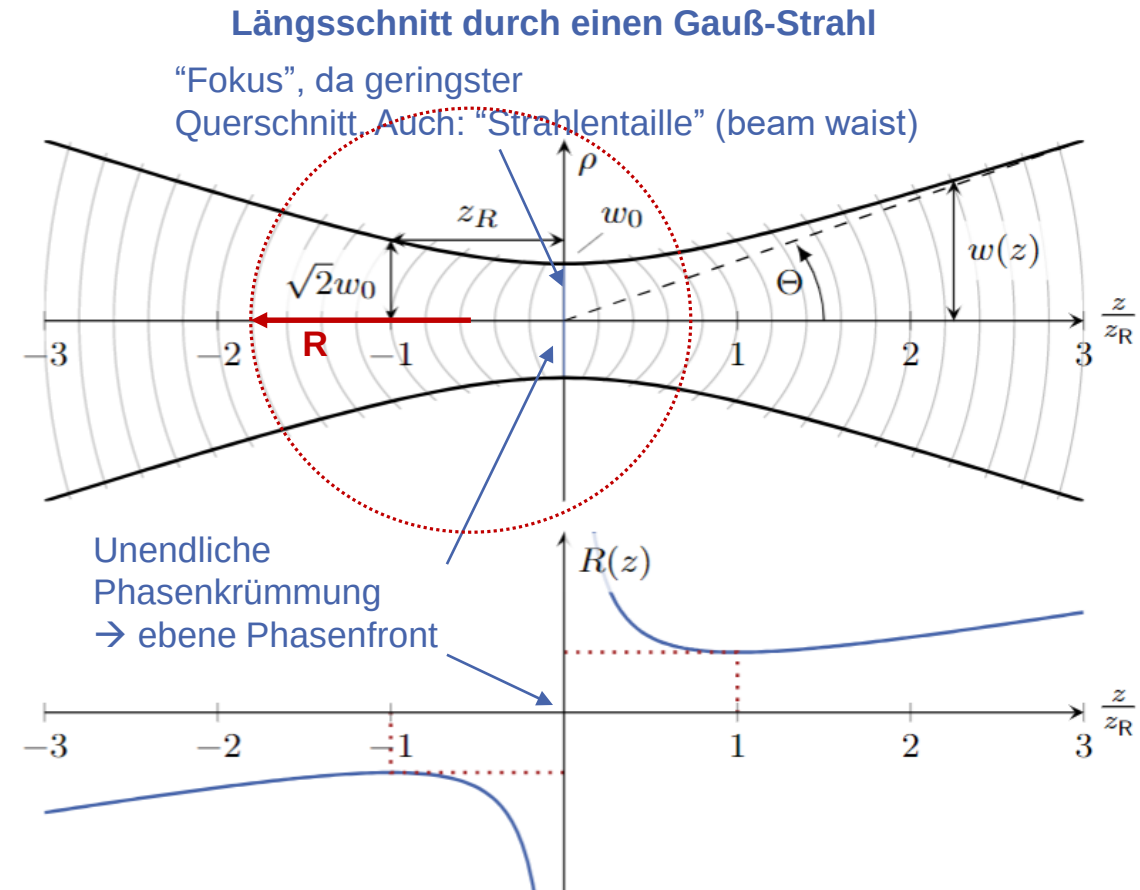
$$\underline{\psi}(\rho, z) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)}_{\text{Gaußscher Fleck}} \underbrace{\exp\left(-j \frac{k\rho^2}{2R(z)}\right)}_{\text{gekrümmte Phasenfront}} \underbrace{\exp\left(-j P(z)\right)}_{\text{weitere } z\text{-Abhängigkeit}}$$



Querschnitt durch einen Gauß-Strahl

Der Gaußsche Strahl (II)

- Strahlparameter Beziehung $\frac{1}{\underline{q}} = \frac{1}{R} - j \frac{2}{kw^2(z)}$
- Rayleigh-Länge $z_R = \frac{kw_0^2}{2}$
- Strahlradius $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$
- Krümmungsradius $R(z) = z \sqrt{1 + \frac{z_R^2}{z^2}}$
- Krümmung ist $\frac{1}{R}$, d.h. ist die $R(z)$ klein, ist die Krümmung am stärksten



Mehr Informationen: “*Laser Beams and Resonators*”, H. Kogelnik und T. Li, 1966.