

Übung 7 - Gaußscher Strahl

Sonntag, 18. Dezember 2022 20:08

Lösung zu Aufgabe 12:

In der Vorlesung haben wir den Gaußschen Strahl als Lösung der Helmholtz-Gleichung unter der paraxialen Näherung hergeleitet. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass wir alternativ den Gaußschen Strahl auch aus dem Fresnelschen Beugungsintegral (siehe Vorlesung 7 und Übung 6) herleiten können. Hierzu nehmen wir an, dass eine in +z-Richtung propagierende ebene Welle aus dem Halbraum $z < 0$

$$U(\mathbf{r}) = U_0 \exp(-j k z)$$

in $z = 0$ auf eine gaußförmige „Apertur“ der Form

$$g_A(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right)$$

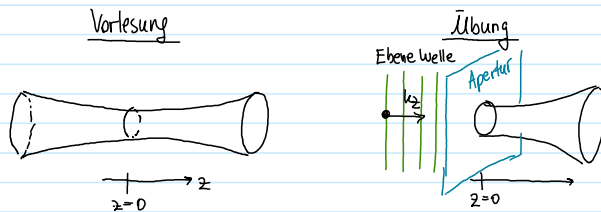
trifft. Hierbei bezeichnet w_0 den Strahlradius in $z = 0$, welchen wir deutlich größer als die Wellenlänge λ annehmen. Wir betrachten zudem Abstände vergleichbar mit oder groß gegenüber w_0 , sodass die Fresnel-Näherung gültig ist.

- a) Zeigen Sie mithilfe der Fourier-Darstellung des Fresnelschen Beugungsintegrals aus Übung 6, dass mit der betrachteten ebenen Welle und Apertur für die komplexe Amplitude $U(\mathbf{r})$ der Welle für $z > 0$ folgende Beziehung gilt:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{j U_0 \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{x'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{y'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \nu y') dy', \quad (1)$$

wobei $\xi = -\frac{x}{\lambda z}$ und $\nu = -\frac{y}{\lambda z}$.

Problemstellung



Annahme. Wir schauen Gaußschen Strahl in $z=0$ an & bestimmen hieraus wie er für $z>0$ propagiert

- a) Ebene Welle im Halbraum $z < 0$

$$U(\vec{r}) = U_0 e^{-j k z}$$

Apertur mit Gaußform

$$g_A(x, y) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}} \leftarrow \text{Radius}^2$$

beachte. Apertur ist teildurchlässig

Aus der Übung 6, Aufgabe 11.b) kennen wir das Fresnelsche Beugungsintegral in der Fourier-Darstellung:

$$U(\vec{r}) = \frac{j U_0 e^{-j k z}}{\lambda z} e^{-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}} \mathcal{F} \left\{ g_A(x', y') e^{-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}} \right\} \Big|_{\xi = -x/\lambda z, \nu = -y/\lambda z}$$

Apertur $g_A(x, y)$ bekannt

$$\begin{aligned} &= \frac{j U_0 e^{-j k z}}{\lambda z} e^{-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2}} e^{-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}} e^{-j 2\pi (\xi x' + \nu y')} dx' dy' \\ &= \frac{j U_0 e^{-j k z}}{\lambda z} e^{-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{w_0^2}} e^{-j k \frac{x'^2}{2z}} e^{-j 2\pi \xi x'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y'^2}{w_0^2}} e^{-j k \frac{y'^2}{2z}} e^{-j 2\pi \nu y'} dy' \end{aligned}$$

- b) Verwenden Sie die Fourierkorrespondenz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x'^2) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\alpha} \xi^2\right),$$

um die beiden Integrale in (1) aufzulösen. Substituieren Sie hierfür mit $\alpha = \frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}$.

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \frac{j U_0 e^{-j k z}}{\lambda z} e^{-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}\right) x'^2} e^{-j 2\pi \xi x'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}\right) y'^2} e^{-j 2\pi \nu y'} dy' \\ &= \frac{j U_0 e^{-j k z}}{\lambda z} e^{-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} \xi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} \nu^2} \end{aligned}$$

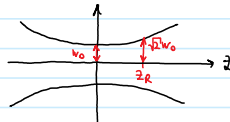
$$\begin{aligned}
&= \frac{U_0 e^{-jkz}}{z^2} e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} z^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} z^2} \\
&= \frac{U_0}{z^2} \frac{\pi}{\alpha} e^{-jkz} e^{-jk \frac{1}{2z} (x^2+y^2)} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} (z^2+y^2)} \\
&= \frac{U_0}{z^2} \frac{\pi}{\alpha} e^{-jkz} e^{-jk \frac{1}{2z} (x^2+y^2)} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} \frac{1}{z^2} (x^2+y^2)} \\
&= U_0 \frac{jk}{\lambda z} \frac{1}{\alpha} e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2z} (x^2+y^2)} e^{-\frac{k^2}{4z^2} \frac{1}{\alpha} (x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

Weg γ nicht von x und y abhängig?!

$\frac{1}{z}$ gleich. Was da nicht irgendwas mit k, λ, z Abhängigkeit? $\rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$

c) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung der Rayleigh-Länge $z_R = k w_0^2 / 2$.

- Strahl weitet sich auf $\rightarrow$ Strahlradius ist gute Metrik zum charakterisieren



- Die Rayleigh-Länge ist die Distanz entlang der optischen Achse, bei welcher die Strahlen-Querschnittsfläche sich verdoppelt hat

d) Vereinfachen Sie den Ausdruck für $U(\vec{r})$ weiter, indem Sie nun α resubstituieren und die Rayleigh-Länge einführen.

$$U(\vec{r}) = U_0 \frac{jk}{\lambda z} \frac{1}{\alpha} e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2z} (x^2+y^2)} e^{-\frac{k^2}{4z^2} \frac{1}{\alpha} (x^2+y^2)}$$

- Zweimal $\frac{1}{\alpha}$ Faktor.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}} = \frac{\frac{1}{w_0^2} - j \frac{k}{2z}}{\frac{1}{w_0^2} + \frac{k^2}{4z^2}} = \frac{w_0^2}{1 + \left(\frac{k w_0^2}{2z}\right)^2} \cdot j \frac{w_0^2 \frac{k w_0^2}{2z}}{1 + \left(\frac{k w_0^2}{2z}\right)^2} = \frac{z_R}{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \cdot j \frac{w_0^2 z_R}{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \\
&\stackrel{\frac{z^2}{z_R^2}}{=} w_0^2 \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \cdot j \frac{w_0^2}{z^2 + z_R^2} \frac{z_R z}{z^2 + z_R^2} = w_0^2 \frac{z}{z^2 + z_R^2} (z - j z_R)
\end{aligned}$$

Beachte: $z_R = \frac{w_0^2 k}{2}$

- Einsetzen in $U(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}
U(\vec{r}) &= U_0 \frac{jk}{\lambda z} \frac{z_R}{w_0^2} \frac{z}{z^2 + z_R^2} (z - j z_R) e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2z} (x^2+y^2)} e^{-\frac{k^2}{4z^2} \frac{w_0^2}{z^2 + z_R^2} (z - j z_R) (x^2+y^2)} \\
&= U_0 \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + j z) e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2z} (x^2+y^2)} e^{-\frac{k}{2z} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z - j z_R) (x^2+y^2)} \\
&= U_0 \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + j z) e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2z} \left(1 - \frac{z_R^2}{z^2 + z_R^2}\right) (x^2+y^2)} e^{-\frac{k}{2z} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (x^2+y^2)} \\
&= U_0 \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + j z) e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2} \frac{z}{z^2 + z_R^2} (x^2+y^2)} e^{-\frac{k}{2} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

e) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung des Krümmungsradius $R(z)$ und Strahlradius $w(z)$ des Gaußschen Strahls.

Hinweis: Es gilt

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) = \frac{z^2 + z_R^2}{z} \quad w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) = \frac{z^2 + z_R^2}{k^2 z_R^2}$$

Siehe Folien

f) Vereinfachen Sie den Ausdruck für $U(\vec{r})$ weiter, indem Sie nun auch den Krümmungsradius und Strahlradius einführen.

$$\begin{aligned}
U(\vec{r}) &= U_0 \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + j z) e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2} \frac{z}{z^2 + z_R^2} (x^2+y^2)} e^{-\frac{k}{2} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (x^2+y^2)} \\
&= U_0 \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + j z) e^{-jkz} e^{-j \frac{k}{2} \frac{1}{R(z)} (x^2+y^2)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{R(z)}$ $\frac{1}{w^2(z)}$

g) Führen Sie abschließend die Gouy-Phase $\varphi_G = \arctan(z/z_R)$ ein und vereinfachen Sie Ihre Darstellung von $U(\vec{r})$ so, dass Sie den Gaußschen Strahl erhalten, wie er in der Vorlesung eingeführt wurde

$$U(\vec{r}) = U_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp(-j(kz - \varphi_G)) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2R(z)} (x^2+y^2)\right)$$

Nur, Vorzeichen sehen wir doch $\frac{w_0}{w(z)} \exp(j \varphi_G) = \frac{w_0}{w(z)} \exp(j \arctan(\frac{z}{z_R})) = \frac{1}{\frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + j z)} \stackrel{\text{komplex}}{=} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R - j z)$ sonst muss $\rightarrow$ Erbrechen

$$\psi(r) = \frac{U_0}{w(z)} \exp(-j(kz - \varphi_G)) \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-j \frac{2R(z)}{2R(z)} \left(x^2 + y^2\right)\right]$$

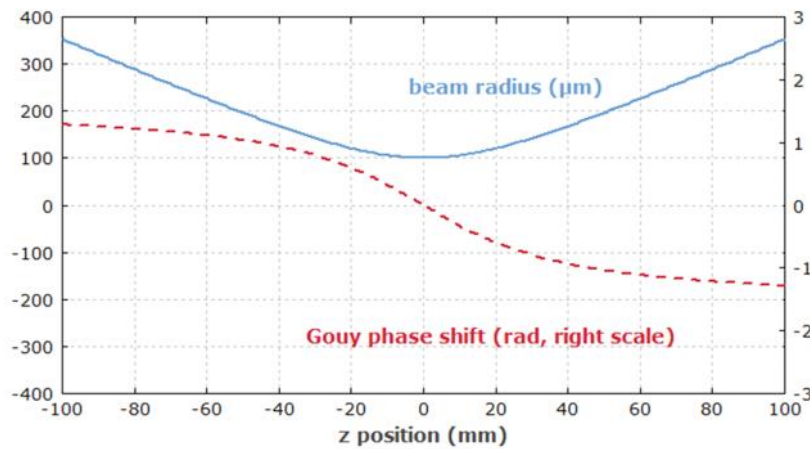
Durch Vergleichen sehen wir, dass $\frac{w_0}{w(z)} e^{j\varphi_G} = \frac{w_0}{w(z)} e^{j \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)} = \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z_R + jz)$ sein muss $\rightarrow$ Eulersche Formel

und es gilt: $w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right) = \frac{z_R^2}{k^2} \frac{z_R^2 + z^2}{z_R^2}$

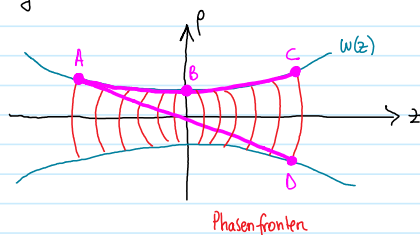
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} |z_R + jz| e^{j \arg(z_R + jz)} &= \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \sqrt{z_R^2 + z^2} e^{j \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)} \\ &= \frac{z_R}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} e^{j\varphi_G} \\ &= \frac{z_R}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}} e^{j\varphi_G} \\ &= \frac{w_0}{w(z)} e^{j\varphi_G} \quad \square \end{aligned}$$

h) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung der Gouy-Phase.

• Exponentialterm mit Gouy-Phase $e^{j\varphi_G} \rightarrow$ Phasendrehung



Intuitive Erklärung:



Phasenfront bei A
Phasenfront bei CD wieder
 $\rightarrow$ müssen in Phase sein, d.h.
der Weg ABC und CD dürfen
sich nur um Vielfache von $2\pi \cdot m$
unterscheiden.
ABC eindeutig kürzer als CD.
Bedingung nur erfüllt wenn
Gouy-Phase vorhanden