

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 07

Abgabe bis zum 19.12.2022 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 12:

In der Vorlesung haben wir den Gaußschen Strahl als Lösung der Helmholtz-Gleichung unter der paraxialen Näherung hergeleitet. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass wir alternativ den Gaußschen Strahl auch aus dem Fresnelschen Beugungsintegral (siehe Vorlesung 7 und Übung 6) herleiten können. Hierzu nehmen wir an, dass eine in $+z$ -Richtung propagierende ebene Welle aus dem Halbraum $z < 0$

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = U_0 \exp(-j k z)$$

in $z = 0$ auf eine gaußförmige „Apertur“ der Form

$$g_A(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right)$$

trifft. Hierbei bezeichnet w_0 den Strahlradius in $z = 0$, welchen wir deutlich größer als die Wellenlänge λ annehmen. Wir betrachten zudem Abstände vergleichbar mit oder groß gegenüber w_0 , sodass die Fresnel-Näherung gültig ist.

- a) Zeigen Sie mithilfe der Fourier-Darstellung des Fresnelschen Beugungsintegrals aus Übung 6, dass mit der betrachteten ebenen Welle und Apertur für die komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ der Welle für $z > 0$ folgende Beziehung gilt:

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j U_0 \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{x'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{y'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \nu y') dy', \quad (1)$$

wobei $\xi = -\frac{x}{\lambda z}$ und $\nu = -\frac{y}{\lambda z}$.

Ges: Nachweis

Geg: $\underline{U}(\mathbf{r})$ für $z < 0$, gaußförmige „Apertur“ $g_A(x, y)$ in $z = 0$

Wir nehmen an, dass eine ebene Welle auf die Apertur trifft, welche die räumliche Verteilung in der $x - y$ -Ebene auf einen Gaußschen Fleck reduziert. Das bedeutet, wir haben in $z = 0$ einen $x - y$ -Querschnitt des Gaußschen Strahls und wir wollen nun die Propagation in dem Raum $z > 0$ ermitteln. Da die betrachteten Abstände vergleichbar oder groß gegenüber w_0 sind, können wir das Fresnelsche Beugungsintegral in der Fourier-Darstellung aus Übung 6, Aufgabe 11,b) verwenden, um die Ausbreitung des Gaußschen Flecks für $z > 0$ zu beschreiben. Es gilt dann

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j \underline{U}_0 \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \mathcal{F} \left\{ g_A(x', y') \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \right\} \bigg|_{\substack{\xi = -x/\lambda z \\ \nu = -y/\lambda z}}$$

Da die Apertur $g_A(x, y)$ bekannt ist, können wir diese in das Integral einsetzen

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j U_0 \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \underbrace{\mathcal{F} \left\{ \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \right\}}_{=: \text{FT}} \bigg|_{\substack{\xi = -x/\lambda z \\ \nu = -y/\lambda z}}$$

Für die Fouriertransformation (FT) erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi(\xi x' + \nu y')) dx' dy' = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{x'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{y'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \nu y') dy'. \end{aligned}$$

Einsetzen der Fouriertransformierten in $\underline{U}(\mathbf{r})$ ergibt schließlich den gesuchten Ausdruck

$$\begin{aligned} \underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j U_0 \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{x'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y'^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-j k \frac{y'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi \nu y') dy'. \end{aligned}$$

b) Verwenden Sie die Fourierkorrespondenz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x'^2) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\alpha} \xi^2\right),$$

um die beiden Integrale in (1) aufzulösen. Substituieren Sie hierfür mit $\alpha = \frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}$.

Ges: Berechnen der Integrale mittels Fourierkorrespondenz

Geg: $\underline{U}(\mathbf{r})$, Fourierkorrespondenz

Die beiden Teilintegrale weisen dieselbe Form auf, weshalb wir uns im Folgenden zunächst auf das Integral über x' konzentrieren. Zusammenfassen der beiden ersten Exponentialterme im Integranden liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\underbrace{\left(\frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}\right)}_{=: \alpha} x'^2\right) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x'^2) \exp(-j 2\pi \xi x') dx'.$$

Dieses Integral entspricht gerade der Fouriertransformation von $\exp(-\alpha x'^2)$, welche wir aus dem Hinweis gegeben haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x'^2) \exp(-j 2\pi \xi x') dx' = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\alpha} \xi^2\right).$$

Bevor wir zu dem Fresnel-Integral zurückkehren, setzen wir noch für $\xi = -\frac{x}{\lambda z}$ ein

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\alpha} \frac{x^2}{\lambda^2 z^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{k^2}{4z^2} \frac{1}{\alpha} x^2\right).$$

Für das Fourierintegral über y' ergibt sich analog

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha y'^2) \exp(-j 2\pi \nu y') dy' = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{k^2}{4z^2} \frac{1}{\alpha} y^2\right),$$

womit das Fresnel-Integral folgende Form annimmt

$$\begin{aligned} \underline{U}(\mathbf{r}) &= \frac{j U_0 \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \frac{\pi}{\alpha} \exp\left(-\frac{k^2}{4z^2} \frac{1}{\alpha} (x^2 + y^2)\right) \\ &= U_0 \frac{j k}{2z} \frac{1}{\alpha} \exp(-j k z) \exp\left(-j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right) \exp\left(-\frac{k^2}{4z^2} \frac{1}{\alpha} (x^2 + y^2)\right). \end{aligned}$$

- c) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung der Rayleigh-Länge $z_R = k w_0^2 / 2$.

Aus der Überlegung in der Vorlesung wurde ersichtlich, dass ein Gauß-Strahl, z.B. ein Laserstrahl, sich bei der Propagation in eine Richtung aufweitet. Diesen Effekt kann man auch im Alltag mit einem Laserpointer beobachten. Strahlt man mit dem Laserpointer gegen eine Wand und vergrößert den Abstand zu der Wand, so vergrößert sich auch der Lichtpunkt an der Wand. Die Rayleighlänge z_R ist die Distanz entlang der optischen Achse, die ein Laserstrahl braucht, bis seine Querschnittsfläche sich, ausgehend von der Strahlteile w_0 bzw. dem Fokus in $z = 0$, verdoppelt. Dementsprechend ist der Strahlradius an dieser Stelle $w(z) = \sqrt{2} w_0$.

- d) Vereinfachen Sie den Ausdruck für $\underline{U}(\mathbf{r})$ weiter, indem Sie nun α resubstituieren und die Rayleigh-Länge einführen.

Ges: Einsetzen von α und z_R in $\underline{U}(\mathbf{r})$

Geg: $\underline{U}(\mathbf{r})$ für $z < 0$, Rayleigh-Länge $z_R = k w_0^2 / 2$, $\alpha = \frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}$

Wir stoßen zweimal auf $1/\alpha$, weshalb wir diesen Term nun näher untersuchen wollen, wobei wir $z_R = \frac{k w_0^2}{2}$ schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\frac{1}{w_0^2} + j \frac{k}{2z}} = \frac{\frac{1}{w_0^2} - j \frac{k}{2z}}{\frac{1}{w_0^4} + \frac{k^2}{4z^2}} = \frac{w_0^2}{1 + \left(\frac{k w_0^2}{2z}\right)^2} - j \frac{w_0^2 \frac{k w_0^2}{2z}}{1 + \left(\frac{k w_0^2}{2z}\right)^2} = w_0^2 \frac{1}{1 + \frac{z_R^2}{z^2}} - j w_0^2 \frac{\frac{z_R}{z}}{1 + \frac{z_R^2}{z^2}} \\ &= w_0^2 \frac{z^2}{z^2 + z_R^2} - j w_0^2 \frac{z_R z}{z^2 + z_R^2} = w_0^2 \frac{z}{z^2 + z_R^2} (z - j z_R) \end{aligned}$$

Nun setzen wir erneut in das Fresnel-Integral ein:

$$\begin{aligned} \underline{U}(\mathbf{r}) &= U_0 \frac{z_R (z_R + j z)}{z^2 + z_R^2} \exp(-j k z) \exp\left(-j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right) \exp\left(-\frac{k^2}{4z^2} w_0^2 \frac{z}{z^2 + z_R^2} (z - j z_R) (x^2 + y^2)\right) \\ &= U_0 \frac{z_R (z_R + j z)}{z^2 + z_R^2} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{k}{2z} \left(\frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (z - j z_R) + j\right) (x^2 + y^2)\right) \\ &= U_0 \frac{z_R (z_R + j z)}{z^2 + z_R^2} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{k}{2} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (x^2 + y^2)\right) \exp\left(-j \frac{k}{2z} \frac{-z_R^2 + z^2 + z_R^2}{z^2 + z_R^2} (x^2 + y^2)\right) \\ &= U_0 \frac{z_R (z_R + j z)}{z^2 + z_R^2} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{k}{2} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (x^2 + y^2)\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \frac{z}{z^2 + z_R^2} (x^2 + y^2)\right) \\ &= U_0 \frac{z_R (z_R + j z)}{z^2 + z_R^2} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{k}{2} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} (x^2 + y^2)\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \frac{z}{z^2 + z_R^2} (x^2 + y^2)\right). \end{aligned}$$

- e) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung des Krümmungsradius $R(z)$ und Strahlradius $w(z)$ des Gaußschen Strahls.

Hinweis: Es gilt

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) = \frac{z^2 + z_R^2}{z} \quad w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right) = \frac{2}{k} \frac{z_R^2 + z^2}{z_R}.$$

Wie bereits oben erwähnt, weitet sich ein Gaußscher Strahl bei der Propagation entlang der optischen Achse auf. Es wäre daher sinnvoll, den Strahl durch seinen Strahlradius zu charakterisieren. Da nun aber der Gaußsche Strahl im Querschnitt zur optischen Achse eine Gaußverteilung besitzt, ist es nicht so trivial eine klare Kante bzw. einen genauen Radius des Flecks zu bestimmen. Man definiert daher den $1/e$ -Strahlradius, als den Radius, bei welchem die Feldamplitude auf einen Faktor $1/e$ abgeklungen ist. Dies wird ersichtlich, wenn man den Term für den Gaußschen Fleck an der Stelle $\rho = w(z)$ näher betrachtet

$$\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) = \exp\left(-\frac{w^2(z)}{w^2(z)}\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e}.$$

Der Krümmungsradius $R(z)$ beschreibt den z -abhängigen Krümmungsradius der Phasenfront. Da $R(z)$ im Argument der Exponentialfunktion im Nenner steht, ist die Krümmung am stärker, je kleiner $R(z)$ ist. In der Strahlentaille $z = 0$ geht der Krümmungsradius gegen unendlich. Daher hat der Gaußsche Strahl an dieser Stelle eine ebene Phasenfront.

- f) Vereinfachen Sie den Ausdruck für $\underline{U}(\mathbf{r})$ weiter, indem Sie nun auch den Krümmungsradius und Strahlradius einführen.

Ges: Krümmungsradius $R(z)$ und Strahlradius $w(z)$ in $\underline{U}(\mathbf{r})$ einsetzen

Geg: $\underline{U}(\mathbf{r})$, Krümmungsradius $R(z)$ und Strahlradius $w(z)$

Führen wir nun den Krümmungs- $R(z)$ und Strahlradius $w(z)$ des Gaußschen Strahls ein, so vereinfacht sich das Fresnel-Integral zu

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = U_0 \frac{z_R (z_R + j z)}{z^2 + z_R^2} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2R(z)} (x^2 + y^2)\right).$$

- g) Führen Sie abschließend die Gouy-Phase $\varphi_G = \arctan(z/z_R)$ ein und vereinfachen Sie Ihre Darstellung von $\underline{U}(\mathbf{r})$ so, dass Sie den Gaußschen Strahl erhalten, wie er in der Vorlesung eingeführt wurde

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = U_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp(-j(kz - \varphi_G)) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2R(z)} (x^2 + y^2)\right).$$

Ges: Gouy-Phase φ_G in $\underline{U}(\mathbf{r})$ einsetzen

Geg: $\underline{U}(\mathbf{r})$, Gouy-Phase $\varphi_G = \arctan(z/z_R)$

Schreiben wir den komplexwertigen Vorfaktor mittels der eulerschen Formel um

$$\frac{z_R (z_R + j z)}{z^2 + z_R^2} = \frac{z_R}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \exp\left(j \arg \frac{z}{z_R}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}} \exp\left(j \arg \frac{z}{z_R}\right) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(j \arg \frac{z}{z_R}\right),$$

und führen die Gouy-Phase $\varphi_G = \arctan \frac{z}{z_R}$ ein (wegen $z_R > 0$ gilt $\arg \frac{z}{z_R} = \arctan \frac{z}{z_R}$), erhalten wir den Gaußschen Strahl, wie wir ihn in der Vorlesung hergeleitet haben:

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = U_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp(-j(kz - \varphi_G)) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2R(z)} (x^2 + y^2)\right).$$

h) Erklären Sie anschaulich die physikalische Bedeutung der Gouy-Phase.

Betrachtet man den Term, welcher die Gouy Phase beinhaltet

$$\exp(j \varphi_G),$$

so stellt man fest, dass die physikalische Bedeutung der Gouy-Phase einer Phasendrehung entspricht. Eine anschauliche, physikalische Erklärung der Gouy-Phase ist nicht trivial und auch einige Physiker haben sich dazu bereits den Kopf zerbrochen. Daher soll uns an dieser Stelle nur die Bedeutung der Gouy-Phase, nicht aber die physikalische Erklärung interessieren. Wir unternehmen aber trotzdem einen einfachen Erklärungsversuch:

Wir betrachten die zwei Phasenfronten AB und DE (siehe Abbildung 1). Die Definition der Phasenfronten besagt, dass die elektromagnetische Welle an dieser Stelle immer dieselbe Phase, z.B. das Maximum des Feldes, besitzt. Daraus folgt, dass die Phase der Welle von Phasenfront AB bis DE ein Vielfaches von 2π zurückgelegt hat. Betrachtet man nun die optischen Wege von ACD und AE (der optische Weg steht hier rechtwinklig zur Phasenfront im Punkt A), so fällt auf, dass diese verschiedene Weglängen haben. Der Phasenunterschied zwischen ACD und AE darf aber ebenso nur ein Vielfaches von 2π betragen. Aus diesem Grund muss um $z = 0$ zu einer Phasen-anomalie kommen, damit für $z > 0$ die Phasen an den Phasenfronten wieder übereinstimmen.

In dem Paper „Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams“ von Robert W. Boyd, welches 1980 im Journal of the Optical Society of America (Volume 70, Issue 7, pp. 877-880) erschienen ist, wird dieser Zusammenhalt mathematisch ausführlicher beschrieben.

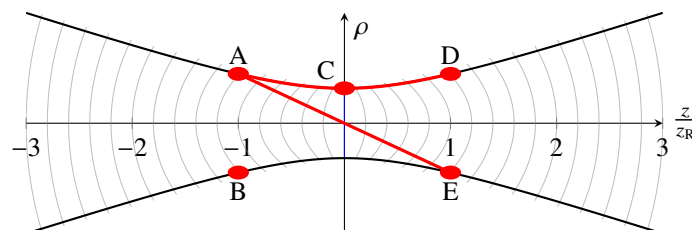


Abbildung 1: Darstellung des Gaußschen Strahls mit verschiedenen Weglängen ACD und AE.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu