EMW Übungsblatt 08

Abgabe bis zum 09.01.2023 um 11:30 via ILIAS

Einführung: Strahlenoptik und optische Systeme

Die geometrische Optik oder auch Strahlenoptik beschreibt die Ausbreitung von Licht durch Strahlen, welche in homogenen Medien stets entlang Geraden verlaufen. Diese Näherung einer elektromagnetischen Welle durch Strahlen gilt allerdings nur für Wellenlängen $\lambda \to 0$ oder sehr kurze Distanzen, für welche die beugungsbedingte Strahlaufweitung vernachlässigbar ist. Mithilfe dieser vereinfachten Darstellung können optische Systeme wie zB. Linsen, Prismen oder Spiegel mathematisch einfach beschrieben werden.
Betrachten wir nun einen Lichtstrahl, der sich im homogenen Medium ausbreitet. Dann können wir den Lichtstrahl an der axialen Position z durch seinen Abstand $x(z)$ und seine Steigung $\tan(\theta)$ (bzw. den Winkel θ) gegenüber der optischen Achse beschreiben. Zur kompakten Beschreibung eines solchen Strahls verwenden wir die Vektorschreibweise

$$\mathbf{r}(z) = \begin{pmatrix} x(z) \\ \tan\theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x(z) \\ \theta \end{pmatrix} .$$

Unter der paraxialen Näherung ist der Winkel gegenüber der optischen Achse klein und es gilt $\tan\theta \approx \theta$. Mit dieser Beschreibung des Lichtstrahls können wir ein optisches Element (z.B. eine Linse) durch eine Matrix $\mathbf{M}$ beschreiben, welche einen einlaufenden Strahl $\mathbf{r}$ in einen auslaufenden Strahl $\mathbf{r}'$ transformiert (siehe Abbildung 1)

$$\mathbf{r}'(z_2) = \mathbf{M}\mathbf{r}(z_1) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(z_1) \\ \theta \end{pmatrix} .$$

Aufgrund ihrer Form werden solche Matrizen auch als ABCD-Matrizen bezeichnet. Eine Aneinander-

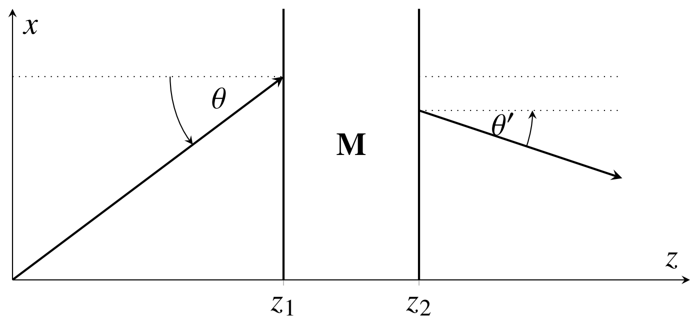

Abbildung 1

reihung von N optischen Systemen lässt sich dann einfach durch eine Linksmultiplikation der einzelnen Matrizen $\mathbf{M}_{\text{total}} = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_N \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_1$ beschreiben. In Tabelle 1 werden die ABCD-Matrizen einiger optischer Elemente eingeführt. Die Verwendung der Matrizenoptik ist nicht nur auf die Strahlenoptik beschränkt, sondern lässt sich auch auf den Gaußschen Strahl aus der Vorlesung 8 anwenden. Hierfür wendet man die Matrizen nicht auf den Strahlenvektor $\mathbf{r}$, sondern nach folgendem Schema auf den Strahlparameter $\underline{q}$ an

$$\underline{q}_2 = \frac{A\underline{q}_1 + B}{C\underline{q}_1 + D} .$$

Optisches Element	**ABCD-Matrix**	**Anmerkungen**
Ausbreitung in homogenem Medium	$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Zurückgelegte Strecke L
Brechung an ebener Grenzfläche	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$	Initiales bzw. finales Medium mit Brechzahl n_1 bzw. n_2
Brechung an sphärischer Grenzfläche	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{R\,n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$	Initiales bzw. finales Medium mit Brechzahl n_1 bzw. n_2, Krümmungsradius R
Reflexion an ebenem Spiegel	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Reflexion an sphärischem Spiegel	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$	Krümmungsradius R
Dünne Linse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$	Brennweite f

Tabelle 1: ABCD-Matrizen ausgewählter optischer Elemente. Es gelte $R > 0$ für konvexe Flächen bei denen der Mittelpunkt des zugehörigen Krümmungskreises hinter der Grenzfläche liegt.

Aufgabe 13:

In Vorlesung 8 haben wir den Gaußschen Strahl als elementaren Vertreter der Strahlwellen kennengelernt. Insbesondere für die Ausbreitung von Licht in homogenen Medien stellt der Gaußsche Strahl ein geeignetes Modell dar. In dieser Aufgabe möchten wir untersuchen, wie wir die Ausbreitung eines Gaußschen Strahls mithilfe von Linsen beeinflussen können.
Im ersten Schritt sollen Sie die ABCD-Matrix der dünnen Linse in Abbildung 2 herleiten.

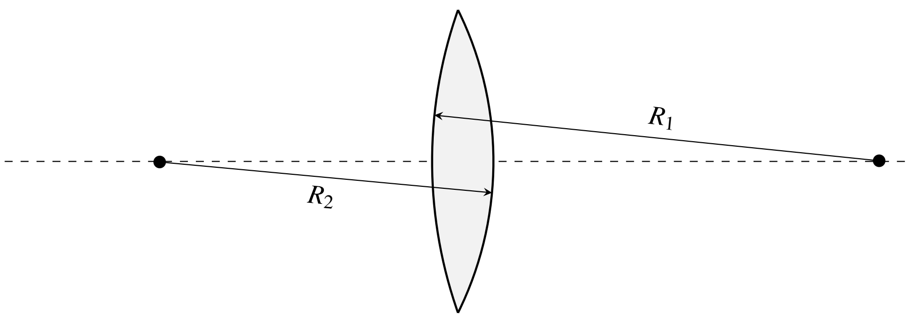

Abbildung 2: Asymmetrische bikonvexe dünne Linse.

a) Nehmen Sie an, dass sich die Linse im Vakuum befinde und ihr Material die Brechzahl n besitze. Geben Sie zunächst mithilfe von Tabelle 1 die ABCD-Matrizen der zwei sphärischen Grenzflächen mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 an.

b) Bestimmen Sie die resultierende ABCD-Matrix der Linse und zeigen Sie, durch Vergleich mit

Tabelle 1, dass für die Brennweite gilt, dass

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Im Folgenden betrachten wir nun die Interaktion des Gaußschen Strahls mit ebendieser dünnen Linse mit Brennweite f.

c) Zeigen Sie mithilfe des Zusammenhangs von ABCD-Matrizen und dem komplexen Strahlparameter $\underline{q}$, dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{1}{\underline{q}_1} - \frac{1}{f},$$

wobei $\underline{q}_1$ bzw $\underline{q}_2$ den komplexen Strahlparameter des Gaußschen Strahls vor bzw. nach der Linse bezeichnen.

d) Zeigen Sie, dass diese Transformation lediglich den Krümmungsradius der Phasenfront, nicht aber den Strahlradius direkt nach der Linse ändert. Leiten Sie dafür folgende Beziehungen für den Strahl direkt hinter der Linse her:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \qquad\qquad w_2 = w_1 .$$

Ein fokussierter Gaußscher Strahl mit Strahlradius w_0 treffe auf eine Linse mit der Brennweite f (siehe Abbildung 3). Der austretende Strahl wird in einem Abstand d fokussiert und weist dort den Strahlradius w_0' auf.

e) Zeigen Sie mit den Beziehungen aus d), dass

$$d = \frac{f}{1 + \frac{4f^2}{k^2 w_0^4}} \qquad\qquad w_0' = \frac{w_0}{\sqrt{1 + \frac{k^2 w_0^4}{4f^2}}} .$$

Hinweis: Drücken Sie zunächst den Strahlradius $w'(-d)$ und den Krümmungsradius $R'(-d)$ jeweils in Abhängigkeit von z_R' aus. Beachten Sie dabei, dass der Strahl vor der Linse im Fokus ist. Leiten Sie aus den gefundenen Beziehungen einen Ausdruck für die Distanz d her. Schließlich muss nur noch w_0' als letzte Unbekannte eliminiert werden.

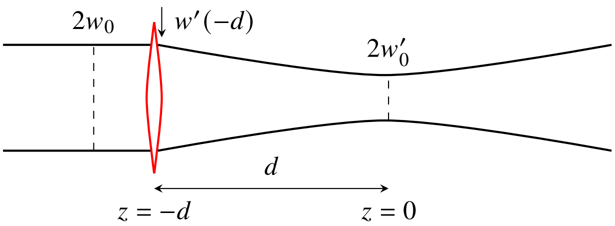

Abbildung 3

Aufgabe 14:

Teleskope aus sphärischen Linsen werden oftmals verwendet, um den Strahlradius von Lichtstrahlen zu vergrößern bzw. zu verkleinern. Der Aufbau eines Keplerschen Teleskops ist in Abbildung 4 gezeigt. Beachten Sie, dass das Licht das System von links nach rechts durchläuft.

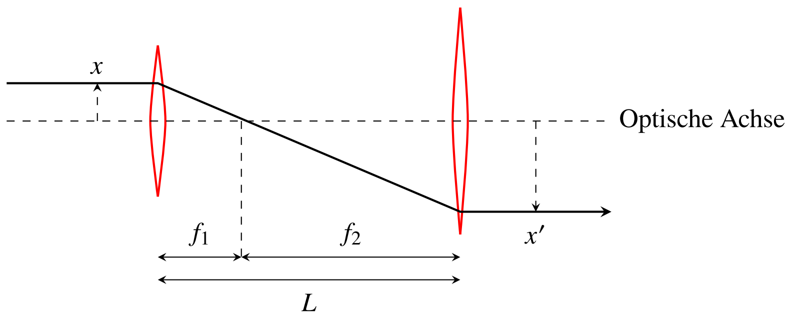

Abbildung 4

a) Stellen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die ABCD-Matrix $\mathbf{M}_{\text{total}}$ des Keplerschen Teleskops aus Abbildung 4 auf. Modellieren Sie das Teleskop durch die beiden dünnen Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2, zwischen denen das Licht eine Strecke L entlang der optischen Achse zurücklegt.

   Hinweis: Der Brechungsindex im freien Raum sei $n = 1$.

b) Vereinfachen Sie die ABCD-Matrix für den Fall $f = f_1 = f_2$ und $L = 2f$. Was stellen Sie fest? Welches Bild würde ein Beobachter hinter der zweiten Linse sehen? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Betrachten Sie nun den Fall $f_1 \neq f_2$ und $L = f_1 + f_2$. Wie wird ein Strahl durch dieses optische System transformiert, der im Abstand x parallel zu der optischen Achse ($\theta = 0°$) einläuft? Geben Sie den Abstand x' und Winkel θ' des austretenden Strahls gegenüber der optischen Achse an.

d) Welchen Vergrößerungsfaktor $m = \left|\frac{x'}{x}\right|$ erhalten Sie mit dem optischen System aus Aufgabenteil c), wenn $f_2 = 2f_1$ gilt?

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu