

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 08

Abgabe bis zum 09.01.2023 um 11:30 via ILIAS

Optisches Element	ABCD-Matrix	Anmerkungen
Ausbreitung in homogenem Medium	$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Zurückgelegte Strecke L
Brechung an ebener Grenzfläche	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$	Initiales bzw. finales Medium mit Brechzahl n_1 bzw. n_2
Brechung an sphärischer Grenzfläche	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$	Initiales bzw. finales Medium mit Brechzahl n_1 bzw. n_2 , Krümmungsradius R
Reflexion an ebenem Spiegel	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Reflexion an sphärischem Spiegel	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$	Krümmungsradius R
Dünne Linse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$	Brennweite f

Tabelle 1: ABCD-Matrizen ausgewählter optischer Elemente. Es gelte $R > 0$ für konvexe Flächen bei denen der Mittelpunkt des zugehörigen Krümmungskreises hinter der Grenzfläche liegt.

Lösung zu Aufgabe 13:

In Vorlesung 8 haben wir den Gaußschen Strahl als elementaren Vertreter der Strahlwellen kennengelernt. Insbesondere für die Ausbreitung von Licht in homogenen Medien stellt der Gaußsche Strahl ein geeignetes Modell dar. In dieser Aufgabe möchten wir untersuchen, wie wir die Ausbreitung eines Gaußschen Strahls mithilfe von Linsen beeinflussen können.

Im ersten Schritt sollen Sie die ABCD-Matrix der dünnen Linse in Abbildung 1 herleiten.

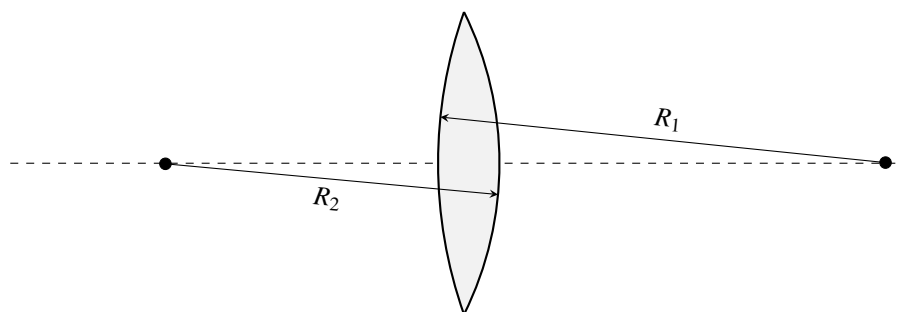


Abbildung 1: Asymmetrische bikonvexe dünne Linse.

- a) Nehmen Sie an, dass sich die Linse im Vakuum befinde und ihr Material die Brechzahl n besitze. Geben Sie zunächst mithilfe von Tabelle 1 die ABCD-Matrizen der zwei sphärischen Grenzflächen mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 an.

Ges: ABCD-Matrizen der sphärischen Grenzflächen

Geg: Krümmungsradien R_1 und R_2 , Brechzahl Linse n , Brechzahl Umgebung $n = 1$

Tabelle 1 entnehmen wir, dass die ABCD-Matrix der ersten Grenzfläche

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1 n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

und die der zweiten Grenzfläche

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix}$$

lautet.

- b) Bestimmen Sie die resultierende ABCD-Matrix der Linse und zeigen Sie, durch Vergleich mit Tabelle 1, dass für die Brennweite gilt, dass

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Ges: Resultierende ABCD-Matrix, Nachweis Beziehung Brennweite

Geg: ABCD-Matrizen $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$

Die resultierende ABCD-Matrix erhalten wir durch Linksmultiplikation der Teilmatrizen, d.h. durch

$$\mathbf{M}_{\text{Linse}} = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1 n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} - \frac{n-1}{R_1} & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vergleich mit der ABCD-Matrix der dünnen Linse liefert den gesuchten Nachweis, dass

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Im Folgenden betrachten wir nun die Interaktion des Gaußschen Strahls mit ebendieser dünnen Linse mit Brennweite f .

- c) Zeigen Sie mithilfe des Zusammenhangs von ABCD-Matrizen und dem komplexen Strahlparameter q , dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f},$$

wobei q_1 bzw q_2 den komplexen Strahlparameter des Gaußschen Strahls vor bzw. nach der Linse bezeichnen.

Ges: Nachweis Beziehung komplexer Strahlparameter bei dünner Linse

Geg: ABCD-Matrix dünne Linse, Vorschrift für Rechnung mit ABCD-Matrizen

Laut Vorlesung gilt

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D \frac{1}{q_1}}{A + B \frac{1}{q_1}}.$$

Einsetzen der ABCD-Matrix der dünnen Linse, d.h. $A = 1, B = 0, C = -\frac{1}{f}, D = 1$ liefert die gesuchte Beziehung

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}}{1} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}.$$

- d) Zeigen Sie, dass diese Transformation lediglich den Krümmungsradius der Phasenfront, nicht aber den Strahlradius direkt nach der Linse ändert. Leiten Sie dafür folgende Beziehungen für den Strahl direkt hinter der Linse her:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \quad w_2 = w_1.$$

Ges: Nachweis der Zusammenhänge von R_1 und R_2 bzw. w_1 und w_2

Geg: Zusammenhang zwischen komplexen Strahlparametern q_1 und q_2

Der komplexe Strahlparameter vor und nach der dünnen Linse lässt sich berechnen durch

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - j \frac{2}{k w_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - j \frac{2}{k_0 w_2^2}.$$

Einsetzen von $\frac{1}{q_1}$ bzw. $\frac{1}{q_2}$ in die Gleichung aus c) führt auf (vgl. Vorlesung 08 zum Gaußschen Strahl)

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{R_2} - j \frac{2}{k w_2^2} = \frac{1}{R_1} - j \frac{2}{k w_1^2} - \frac{1}{f}.$$

Vergleichen wir nun die Real- und Imaginärteile miteinander, so erhalten wir die zu zeigenden Beziehungen:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \quad \text{und} \quad \frac{2}{k w_1^2} = \frac{2}{k w_2^2} \quad \Longrightarrow \quad w_2 = w_1.$$

Ein fokussierter Gaußscher Strahl mit Strahlradius w_0 treffe auf eine Linse mit der Brennweite f (siehe Abbildung 2). Der austretende Strahl wird in einem Abstand d fokussiert und weist dort den Strahlradius w'_0 auf.

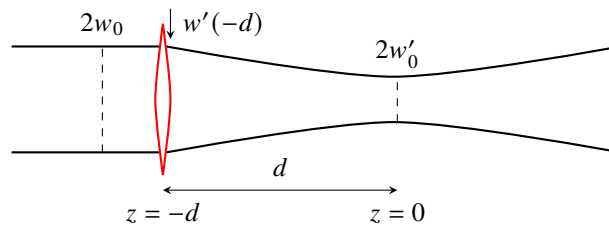


Abbildung 2

e) Zeigen Sie mit den Beziehungen aus d), dass

$$d = \frac{f}{1 + \frac{4f^2}{k^2 w_0^4}} \quad w'_0 = \frac{w_0}{\sqrt{1 + \frac{k^2 w_0^4}{4f^2}}}.$$

Hinweis: Drücken Sie zunächst den Strahlradius $w'(-d)$ und den Krümmungsradius $R'(-d)$ jeweils in Abhängigkeit von z'_R aus. Beachten Sie dabei, dass der Strahl vor der Linse im Fokus ist. Leiten Sie aus den gefundenen Beziehungen einen Ausdruck für die Distanz d her. Schließlich muss nur noch w'_0 als letzte Unbekannte eliminiert werden.

Ges: Nachweis der Beziehungen

Geg: Einfallender Strahl im Fokus mit Radius w_0 , Brennweite f , Entwicklung Strahlradius und Krümmungsradius beim Gaußschen Strahl

Kurze Wiederholung: Für den Strahl- und Krümmungsradius des Gaußschen Strahls gilt im Allgemeinen

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad \text{und} \quad R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}.$$

Aus Abbildung 2 lässt sich aus dem Strahlradius $w'(-d)$ folgendes z'_R herleiten

$$w'(-d) = w_0 = w'_0 \sqrt{1 + \frac{d^2}{z_R'^2}} \quad \Rightarrow \quad z_R'^2 = \frac{d^2 w_0'^2}{w_0^2 - w_0'^2}. \quad (1)$$

Da wir annehmen, dass der Strahl vor der Linse fokussiert war, lässt sich durch Betrachten des Krümmungsradius $R'(-d)$ außerdem zeigen, dass (verwende Beziehung aus d))

$$\frac{1}{R'(-d)} = \frac{1}{R(-d)} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{f}$$

bzw.

$$R'(-d) = -d + \frac{z_R'^2}{-d} = -f \quad \Rightarrow \quad z_R'^2 = d(f - d).$$

Mit der Definition der Rayleigh-Länge

$$z'_R = k \frac{w_0'^2}{2},$$

erhalten wir schließlich

$$\frac{k^2 w_0'^4}{4} = \frac{d^2 w_0'^2}{w_0^2 - w_0'^2} \quad (2)$$

bzw.

$$\frac{k^2 w_0'^4}{4} = d(f - d). \quad (3)$$

Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w_0'^2}{w_0^2 - w_0'^2} = d(f - d) \\ \iff & \frac{w_0'^2}{w_0^2 - w_0'^2} = \frac{f}{d} - 1 \\ \iff & \frac{f}{d} = \frac{w_0'^2}{w_0^2 - w_0'^2} \\ \iff & d = f \left(1 - \frac{w_0'^2}{w_0^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Nun eliminieren wir noch $w_0'^2$ indem wir (3) umstellen

$$k^2 \frac{w_0'^4}{4} = fd - d^2 \iff w_0'^4 = \frac{4}{k^2} (fd - d^2)$$

und anschließend in (4) einsetzen:

$$\begin{aligned} & d = f \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{4}{k^2} d(f - d)}}{w_0^2} \right) \\ \iff & (f - d)^2 = f^2 \frac{4d(f - d)}{k^2 w_0^4} \\ \iff & f = d \left(\frac{4f^2}{k^2 w_0^4} + 1 \right) \\ \iff & d = \frac{f}{1 + \frac{4f^2}{k^2 w_0^4}} \quad \square \end{aligned} \quad (5)$$

Zuletzt erhalten wir den gesuchten Ausdruck für w_0' indem wir (5) in (4) einsetzen und dabei d

eliminieren:

$$\begin{aligned}
 \frac{f}{1 + \frac{4f^2}{k^2 w_0^4}} &= f \left(1 - \frac{w_0'^2}{w_0^2} \right) \\
 \Leftrightarrow 1 - \frac{w_0'^2}{w_0^2} &= \frac{k^2 w_0^4}{w_0^4 k^2 + 4f^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{w_0'^2}{w_0^2} &= \frac{k^2 w_0^4 + 4f^2 - k^2 w_0^4}{k^2 w_0^4 + 4f^2} \\
 \Leftrightarrow w_0'^2 &= \frac{4w_0^2 f^2}{k^2 w_0^4 + 4f^2} \\
 \Leftrightarrow w_0' &= \frac{w_0}{\sqrt{1 + \frac{k^2 w_0^4}{4f^2}}} \quad \square
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 14:

Teleskope aus sphärischen Linsen werden oftmals verwendet, um den Strahlradius von Lichtstrahlen zu vergrößern bzw. zu verkleinern. Der Aufbau eines Keplerschen Teleskops ist in Abbildung 3 gezeigt. Beachten Sie, dass das Licht das System von links nach rechts durchläuft.

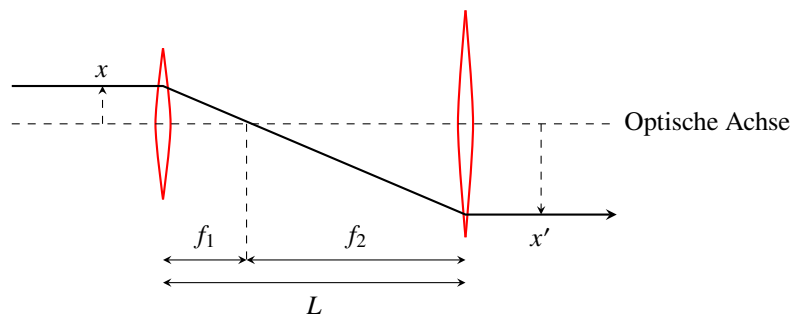


Abbildung 3

- a) Stellen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die ABCD-Matrix $\mathbf{M}_{\text{total}}$ des Keplerschen Teleskops aus Abbildung 3 auf. Modellieren Sie das Teleskop durch die beiden dünnen Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 , zwischen denen das Licht eine Strecke L entlang der optischen Achse zurücklegt.

Hinweis: Der Brechungsindex im freien Raum sei $n = 1$.

Ges: ABCD-Matrix des Teleskops

Geg: Teilmatrizen gemäß Tabelle 1

Die Gesamtmatrix resultiert aus der Linksmultiplikation einer dünnen Linse, einer Translation im freien Raum (Brechzahl $n = 1$, wir müssen also keine Brechung berücksichtigen) sowie einer

zweiten dünnen Linse:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\text{total}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_1} & L \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_1} & L \\ \frac{L}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{L}{f_2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- b) Vereinfachen Sie die ABCD-Matrix für den Fall $f = f_1 = f_2$ und $L = 2f$. Was stellen Sie fest? Welches Bild würde ein Beobachter hinter der zweiten Linse sehen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ges: Vereinfachung und Interpretation

Geg: $f_1 = f_2 = f$, $L = 2f$, $\mathbf{M}_{\text{total}}$

Mit $f = f_1 = f_2$ und $L = 2f$ vereinfacht sich die ABCD-Matrix aus dem vorherigem Aufgabenteil zu

$$\mathbf{M}_{\text{total}} = \begin{pmatrix} -1 & L \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

An der ABCD-Matrix lässt sich direkt ablesen, dass der Austrittswinkel nach der zweiten Linse einen Vorzeichenwechsel gegenüber dem Eintrittswinkel vor der ersten Linse aufweist. Des Weiteren erhalten wir für einen Einfall parallel zur optischen Achse auch das umgekehrte Vorzeichen für die axiale Position; in diesem Fall würde ein Beobachter hinter der zweiten Linse also gerade ein gespiegeltes Bild sehen. Bei schrägem Einfall unter einem Winkel θ kommt es zusätzlich zu einer axialen Verschiebung, die von θ und L abhängt.

- c) Betrachten Sie nun den Fall $f_1 \neq f_2$ und $L = f_1 + f_2$. Wie wird ein Strahl durch dieses optische System transformiert, der im Abstand x parallel zu der optischen Achse ($\theta = 0^\circ$) einläuft? Geben Sie den Abstand x' und Winkel θ' des austretenden Strahls gegenüber der optischen Achse an.

Ges: Transformation eines einfallenden Strahls

Geg: $f_1 \neq f_2$ und $L = f_1 + f_2$, $\mathbf{M}_{\text{total}}$

Mit $f_1 \neq f_2$ und $L = f_1 + f_2$ erhalten wir die ABCD-Matrix eines Strahlaufweiters

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\text{total}} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{f_1+f_2}{f_1} & f_1 + f_2 \\ \frac{f_1+f_2}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{f_1+f_2}{f_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & f_1 + f_2 \\ 0 & -\frac{f_1}{f_2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ein senkrecht einfallender Strahl $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ wird daher zu einem Strahl

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & f_1 + f_2 \\ 0 & -\frac{f_1}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{f_1} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Austrittsabstand beträgt also gerade $x' = -\frac{f_2}{f_1}x$ und der Austrittswinkel $\theta' = 0^\circ$.

- d) Welchen Vergrößerungsfaktor $m = \left| \frac{x'}{x} \right|$ erhalten Sie mit dem optischen System aus Aufgabenteil c), wenn $f_2 = 2f_1$ gilt?

Ges: Vergrößerungsfaktor m

Geg: $f_2 = 2f_1$, M_{total}

Der Abstand des Strahls zur optischen Achse ist nun

$$-\frac{f_2}{f_1} = -\frac{2f_1}{1f_1} = -2$$

Ein Beobachter sieht folglich ein gespiegeltes und um den Faktor zwei vergrößertes Bild. Es gilt also $m = 2$.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu