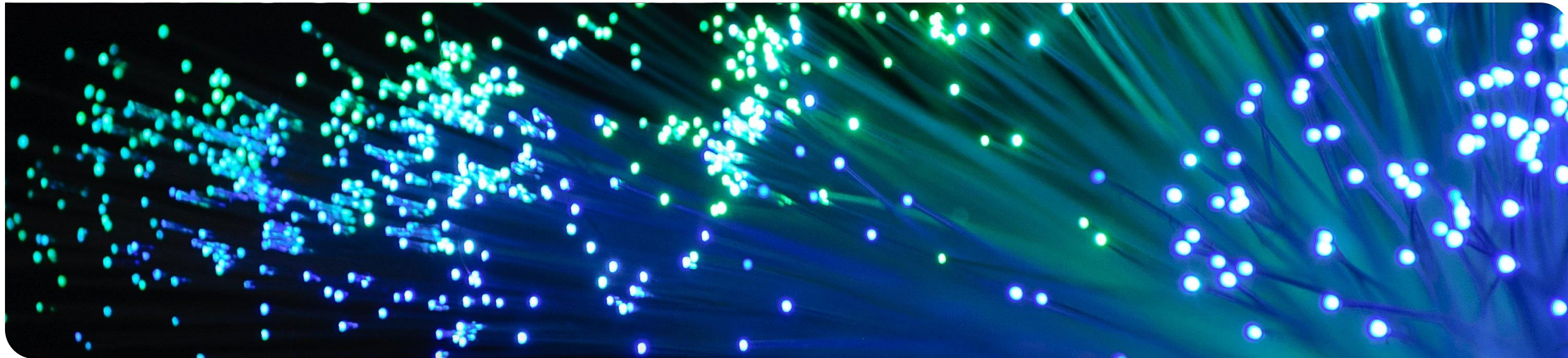


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 9

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 3	A6	Dispersive Medien
Übung 4	A7, A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Reflexion und Brechung
Übung 6	A10, A11	Beugung und Interferenz
Übung 7	A12	Gaußscher Strahl
Übung 8	A13, A14	Optische Systeme
Übung 9	A15, A16	Parallelplattenleiter

Verhalten von EM-Wellen am idealen Leiter

- Das Innere eines idealen Leiters ist stets feldfrei.
- Aus den Grenzflächenbedingungen für die tangentialen und normalen EM-Feldkomponenten erhalten wir die folgenden Randbedingungen der Felder am idealen Leiter:

	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Tangential	$E_t = 0$	$H_t = i'$
Normal	$D_n = \sigma$	$B_n = 0$

- Hier bezeichnet i' den Oberflächenstrom und σ die Oberflächenladung.

Ströme am idealen Leiter (I)

- Durchflutungsgesetz:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Oberflächenstromdichte
Verschiebungsstromdichte

- Die Tangentialkomponente des elektrischen Felds muss auf der Leiteroberfläche stets verschwinden.
- Infolgedessen darf (für lineare & isotrope Medien) auch der Verschiebungsstrom an der Leiteroberfläche keine Tangentialkomponenten aufweisen.
- Das magnetische Feld verläuft entsprechend parallel zur Leiteroberfläche, weshalb i.A. gemäß des Durchflutungsgesetzes ein Oberflächenstrom an der Leiteroberfläche auftreten muss.

Ströme am idealen Leiter (II)

Oberflächenstromdichte J_s

Verschiebungsstromdichte $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$

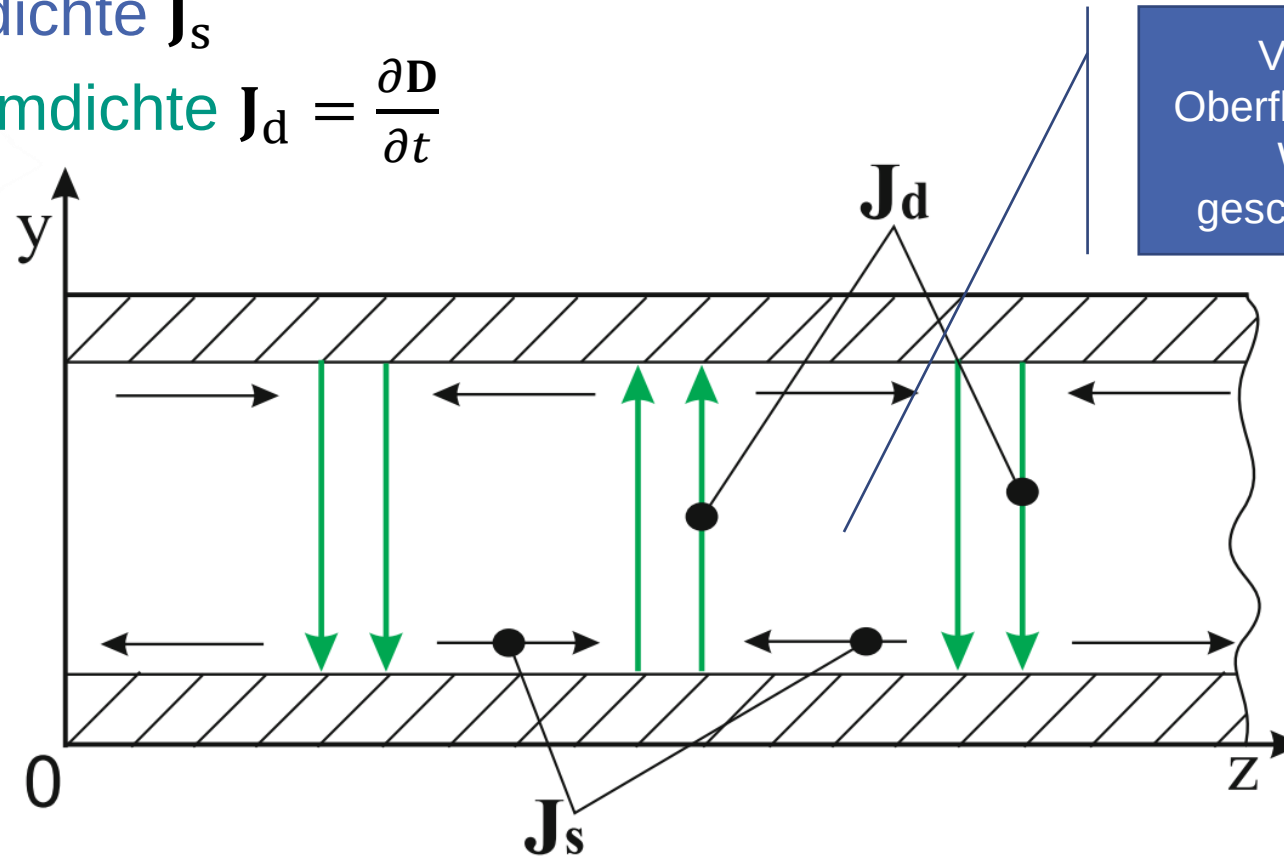


Abbildung aus Nickelson (2019): Electromagnetic Theory and Plasmonics for Engineers, S. 475

Reflexion am idealen Leiter (I)

- Beispiel: Reflexion einer parallel polarisierten Welle (Einfallsebene ist yz -Ebene) an einem idealen Leiter ($\kappa \rightarrow \infty$)
- Was fällt euch an der Abbildung auf?

Antwort: Die Randbedingungen sind nicht erfüllt!

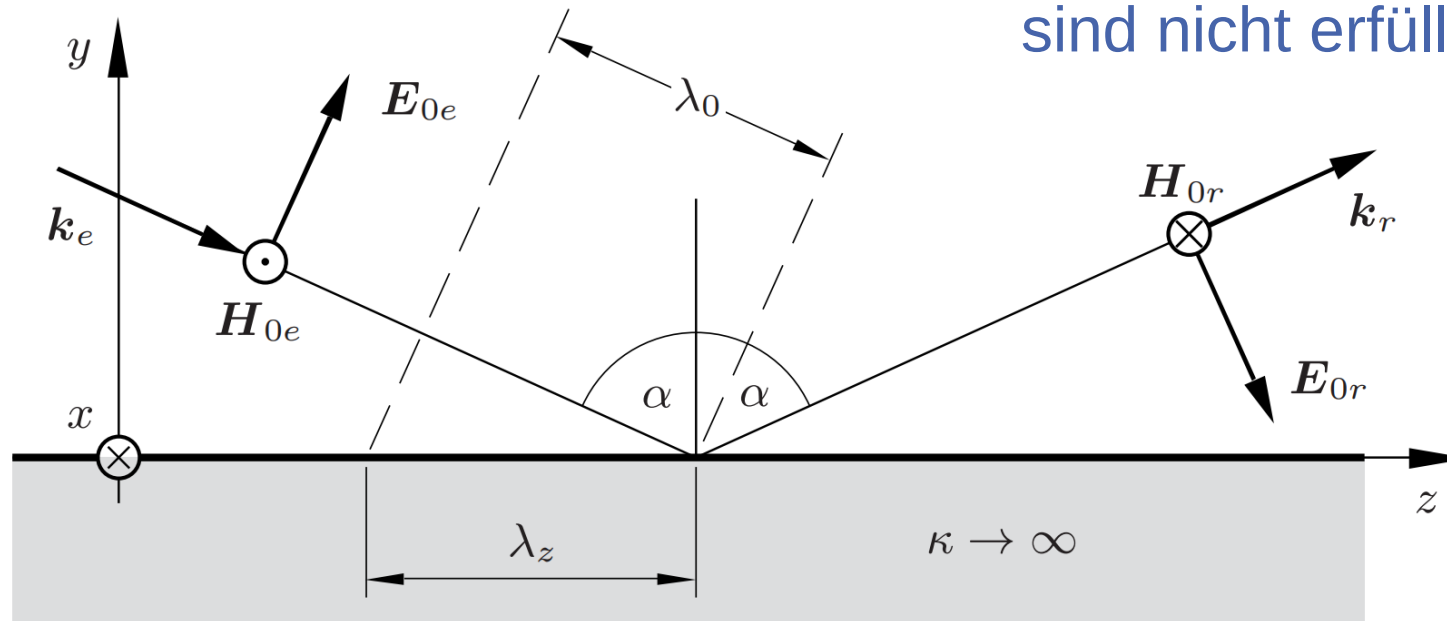


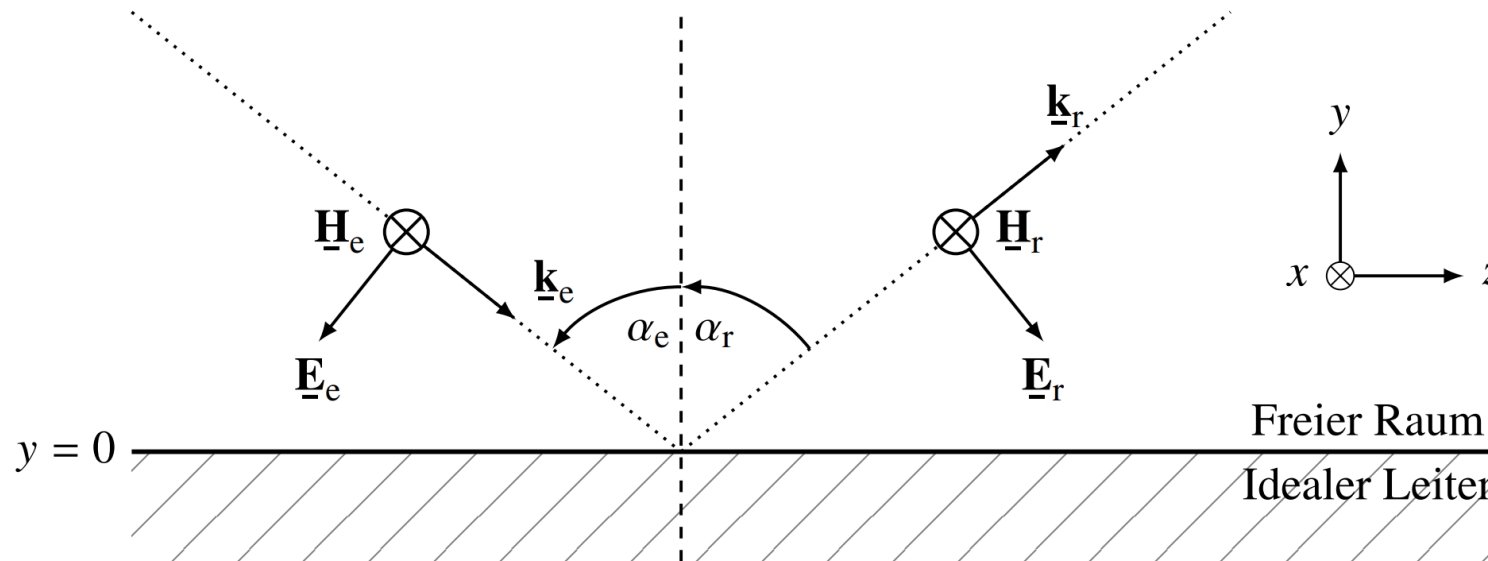
Abbildung aus Henke 2020, S. 325

Reflexion am idealen Leiter (II)

Wir untersuchen nun eine parallel polarisierte ebene Welle im freien Raum ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) mit

$$\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{H}_e \exp(j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{r})) \mathbf{e}_x,$$

die unter einem Winkel α_e auf einen idealen Leiter in der Ebene $y = 0$ trifft (an dem sie vollständig reflektiert wird) und sich in z -Richtung ausbreitet. Für den Fall $\alpha_e \rightarrow \pi/2$ weist die Welle nur



Polarisation

- Bislang haben wir zwischen senkrechter und paralleler Polarisation unterschieden.
- Die beiden Polarisationen unterscheiden sich darin, ob das E- bzw. H-Feld Komponenten in Ausbreitungsrichtung (hier z) aufweist.
- Wir bezeichnen daher die ...
 - ... parallel polarisierte Welle als transversal-magnetische Welle (TM-Welle), bei der nur das elektrische Feld Komponenten in Ausbreitungsrichtung besitzt; es gilt $E_z \neq 0$ und $H_z = 0$.
 - ... senkrecht polarisierte Welle als transversal-elektrische Welle (TE-Welle), bei der nur das magnetische Feld Komponenten in Ausbreitungsrichtung besitzt; es gilt $H_z \neq 0$ und $E_z = 0$.

Aufgabe 15

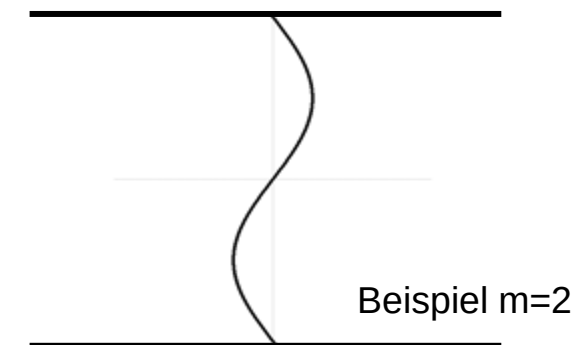
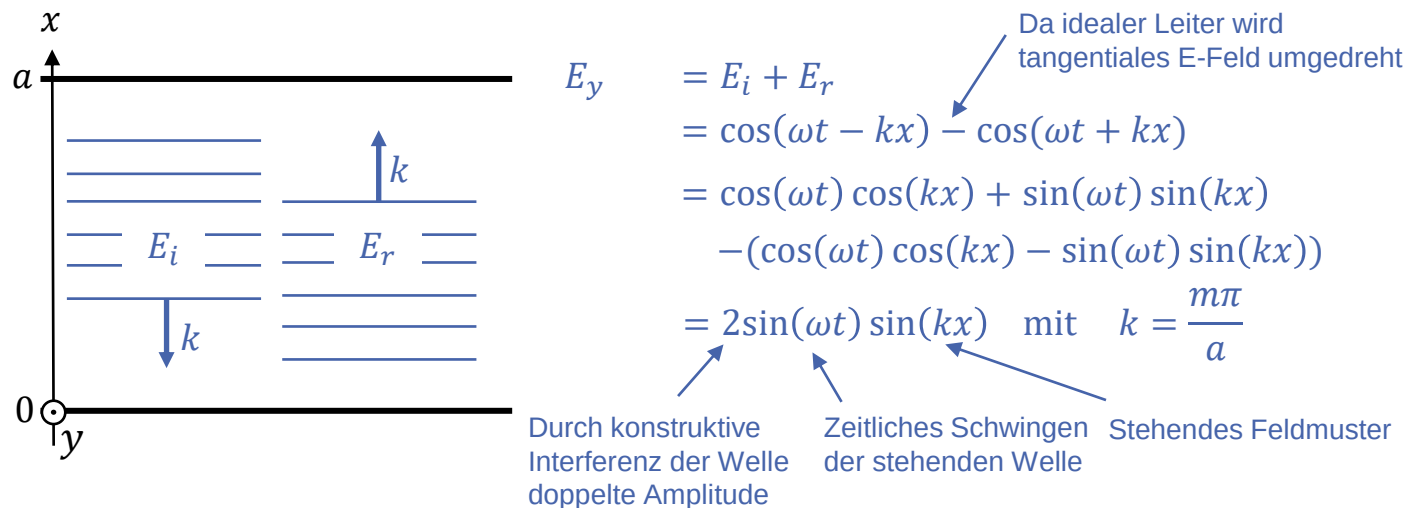
- a) Welche Aussagen können Sie über die tangentialen und normalen E- bzw. H-Feldkomponenten an der Grenzfläche zu dem idealen Leiter treffen?

Hinweis: Ziehen Sie die Stetigkeitsbedingungen am idealen Leiter aus der Vorlesung heran.

- b) Stellen Sie mithilfe von Abbildung 1 die Wellenvektoren $\underline{k}_e$ und $\underline{k}_r$ in Abhängigkeit des Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkels α_e bzw. α_r dar. Nehmen Sie dabei an, dass $k_e = k_r = k_0$.
- c) Geben Sie die einfallenden bzw. reflektieren elektrischen und magnetischen Felder an. Verwenden Sie dabei das Durchflutungsgesetz um die elektrischen Felder zu erhalten.
- d) Zeigen Sie, dass sich durch Superposition der einfallenden und reflektieren Welle in y -Richtung stehende Wellen ausbilden.

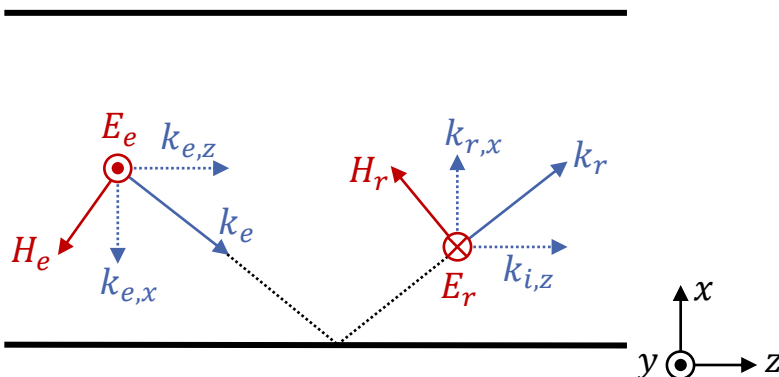
Moden in Hohlleitern

- Immer wenn eine Welle (egal ob EM-Welle, akustische Welle, mechanische Welle) im Raum begrenzt ist, bilden sich durch Interferenz der einfallenden und reflektierten Welle für bestimmte Frequenzen stehende Wellen aus.
- Beispiel Gitarren-Saite: Beim Anschlagen der Saite entsteht eine stehende Wellen, welche einen Ton erzeugen.
- Selbiges passiert bei einem Wellenleiter, welcher in der transversalen Richtung räumlich begrenzt ist.
- Je nach Hohlleiterdimensionierung passen bei entsprechender Frequenz mehrere Wellenbäuche in den Hohlleiter.
- Bei einem idealen Leiter muss das tangential elektrische Feld an den Hohlleiterwänden verschwinden → Knotenpunkte der stehenden Welle.



E- und H-Wellen in Hohlleitern (I)

- Betrachten wir einen schrägen Einfall der einfallenden & reflektierten Welle erhalten wir ebenso stehende Wellen in transversaler Richtung. Durch Interferenz der beiden Wellen entsteht eine resultierende Welle mit transversalem festen Feldbild, welches sich in z-Richtung ausbreitet.
- Die einfallende/reflektierte Wellen sind immer noch ebene Wellen im Vakuum (Rechtshandsystem) und haben daher keine Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung (Richtung des Wellenvektors)!
- Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die z-Achse in Ausbreitungsrichtung der Welle, also in Ausrichtung des Wellenleiters zeigt.
- Betrachten wir die E- bzw. H-Feldkomponenten, stellen wir fest, dass durch den schrägen Einfall der Wellen eine Feldkomponente in z-Richtung vorhanden sein kann. Wir nennen diese Wellen E- und H-Welle.
- Die folgende 2D-Betrachtung gilt für die y- ebenso wie für die x-Richtung.



$$\begin{aligned}
 \underline{E}_y &= \underline{E}_e + \underline{E}_r \\
 &= \underline{E}_0 e^{j(\omega t + k_x x - k_z z)} - \underline{E}_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \\
 &= \underline{E}_0 e^{j(\omega t - k_z z)} 2j \sin(k_x x)
 \end{aligned}$$

Welle, welche in +z-Richtung propagiert. Also entlang dem Wellenleiter.

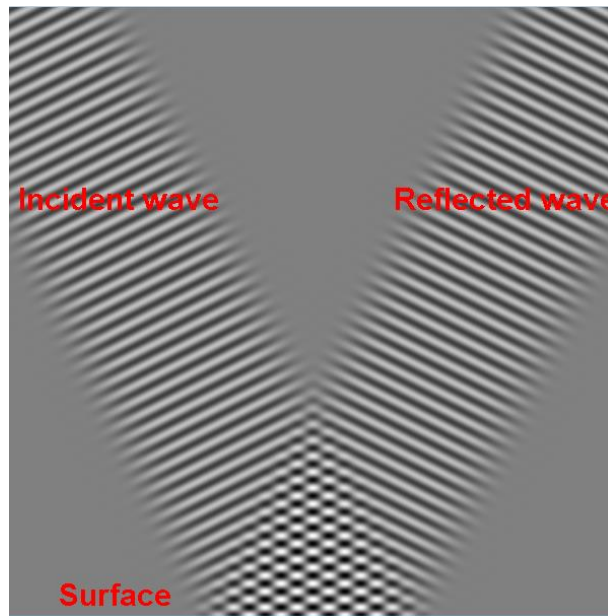
Stehende Welle in transversaler Richtung. Feldbild, welches unabhängig von z ist.

Das H-Feld lässt sich in eine z- und x-Komponente aufteilen.
 → Es handelt sich hier um eine H-Welle

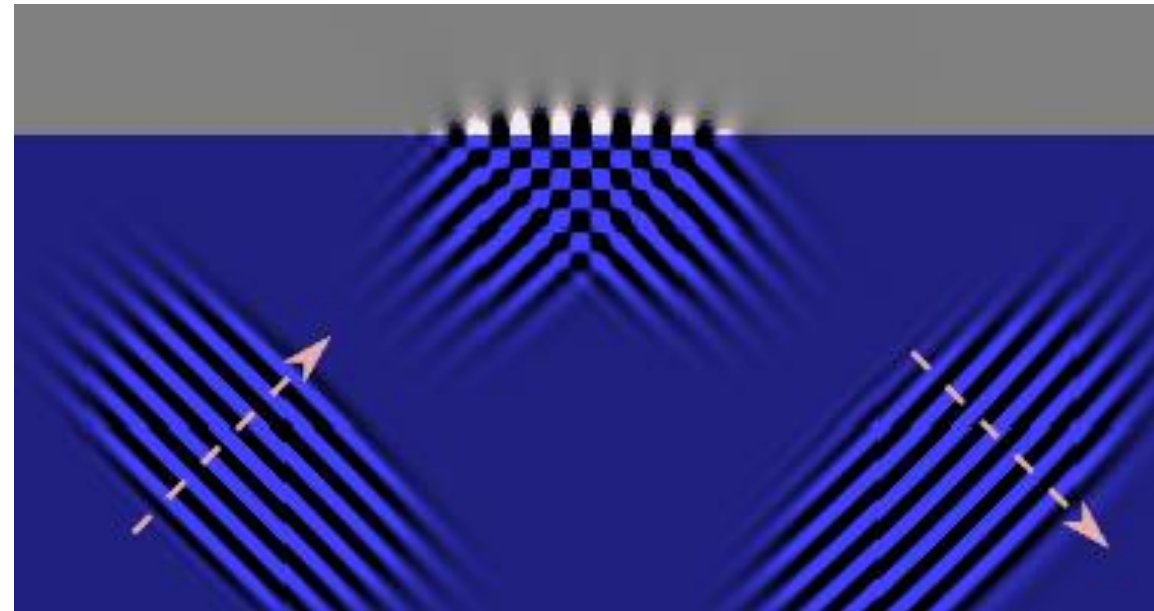
Für eine E-Welle gilt dieselbe Überlegung

E- und H-Wellen in Hohlleitern (II)

- Veranschaulichung der Interferenz einer schräg einfallenden Welle und der schräg reflektierten Welle
- In diesem Beispiel betrachten wir ebene Wellen im Vakuum. Hier gezeigt als ein Wellen-“Streifen“ bzw. als ein Wellen-Puls (Animation). In der Realität sind die ebenen Wellen allerdings unendlich ausgebreitet und so „füllt“ das resultierende Interferenzmuster den gesamten Hohlleiter aus.
- Beachte, dass das Interferenzmuster senkrecht zur Grenzfläche steht. Das Muster ist fix in der vertikalen und wandert in entlang der Horizontalen.



<https://physics.stackexchange.com/questions/555278/do-reflected-and-incident-rays-interfere>



<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Internal-reflection.gif>

Achtung: Die hier gezeigte Animation dient der Veranschaulichung des Interferenzmusters. Man erkennt im grauen Bereich ein evaneszentes Feld, welches wir im **ideal leitenden** Hohlleiter nicht haben! Es handelt sich hier daher um eine dielektrische Grenzfläche bei Totalreflexion. Das erkennt man daran, dass das transmittierte Feld im grauen Medium exponentiell abklingt.

Reflexion am idealen Leiter: Spezialfälle

- Im Allgemeinen: **stehende Welle** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (hier y), **fortlaufende Welle** in Ausbreitungsrichtung (hier z)
- Spezialfälle:
 - Einfall senkrecht zu leitender Platte
 $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{E}_y = 0$: reine stehende Welle in y -Richtung, keine Ausbreitung
 - Einfall parallel zu leitender Platte
 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{E}_z = 0$: TEM-Welle (transversalelektromagnetische) da elektrisches & magnetisches Feld keine Komponenten in Ausbreitungsrichtung aufweisen

Parallelplattenleitung

- In den Ebenen $y = \text{const}$, in denen die Tangentialkomponente des E-Felds verschwindet, können ideal leitende Platten (Abstand a) eingelegt werden ohne das EM-Feld zwischen den Platten zu beeinflussen.
- Resultat: **Parallelplattenleiter**
- Konsequenz: Der Plattenabstand ist mit der Ausbreitungskonstante in y -Richtung verknüpft

$$a = \frac{n\lambda_y}{2} = \frac{n\pi}{k_y}, n \in \mathbb{N}$$

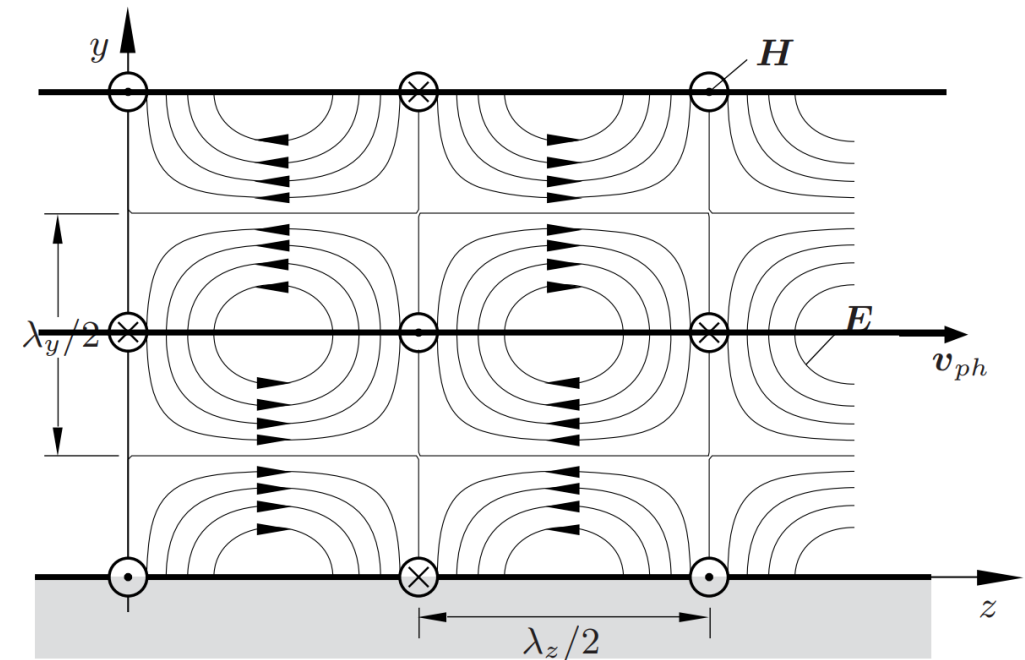


Abbildung aus Henke 2020

Aufgabe 16

Anstelle einer Herleitung der Feldverteilungen über das Verhalten einer elektromagnetischen Welle an einer ideal leitenden Platte (siehe Vorlesung), können wir die Felddarstellungen im Parallelplattenleiter auch direkt aus den Maxwellschen Gleichungen herleiten. Dazu müssen wir lediglich geeignete Randbedingungen wählen.

Wir wollen uns im Folgenden mit der TM-Welle

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}(x, y) \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

beschäftigen, für welche gemäß der Maxwellschen Gleichungen im Allgemein gilt, dass

$$\underline{E}_x = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

$$\underline{H}_x = \frac{j \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{E}_y = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{H}_y = \frac{-j \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

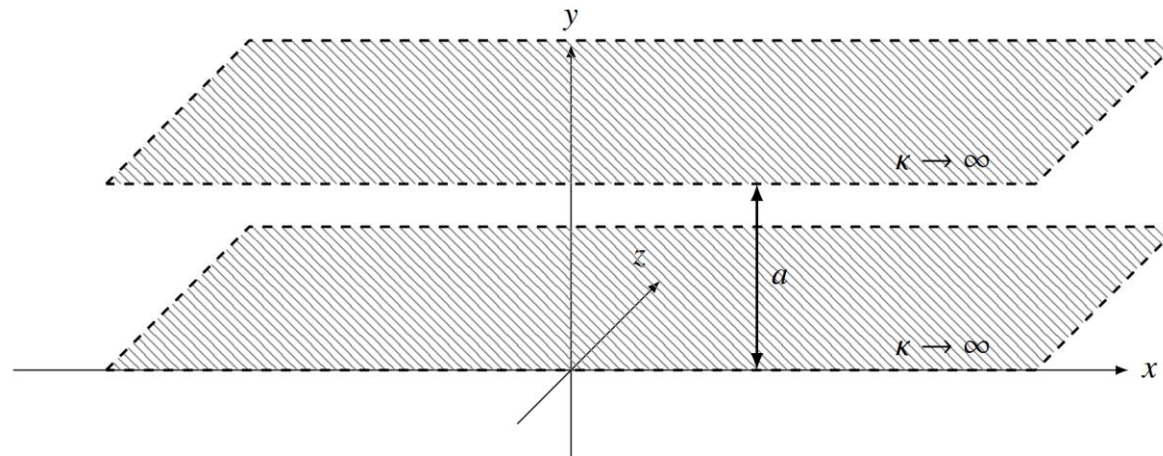
Gute Übung:
Eigenständig
herleiten

und

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2) \underline{E}_z = 0.$$

Aufgabe 16 – Teil a) & b)

Ein Wellenleiter bestehe nun aus zwei in x - und z -Richtung unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Platten im Abstand a , wie in Abbildung 2 dargestellt. Der Raum zwischen den Platten sei vakuumiert.



- a) Verwenden Sie die Definition der TM-Welle und die Maxwell'schen Gleichungen, um das E- und H-Feld einer TM-Welle zu berechnen, welche sich zwischen den Platten ausbreitet. Lösen Sie dazu zunächst die Wellengleichung für $\underline{E}_z$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Platten in x -Richtung unendlich ausgedehnt sind, weshalb $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = 0$. Verwenden Sie zudem die Randbedingung $\underline{E}_z(y = 0) = \underline{E}_z(y = a) = 0$.

- b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für die magnetischen Feldkomponenten mit denen aus Aufgabe 14 Teil d).

Aufgabe 15 – Teil c)

- c) Skizzieren Sie die E_z -Komponenten ($E_z = \Re\{\underline{E}_z\}$) der ersten zwei Moden des Parallelplattenleiters.



Aufgabe 15 – Teil d) & e)

- d) Berechnen Sie die Phasenkonstante in Ausbreitungsrichtung k_z . Ab welcher Frequenz kann sich eine Welle im Wellenleiter ausbreiten?
- e) Zeigen Sie rechnerisch, dass eine Welle, welche die Grenzfrequenz unterschreitet, im Wellenleiter nicht ausbreitungsfähig ist.

Wellenausbreitung im Parallelplattenleiter

- Bei gegebenem Plattenabstand a sind gemäß unserer Überlegungen nur diskrete Ausbreitungskonstanten zulässig:

$$k_y = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

- Gilt $k_y > k_0$, wird k_z imaginär und die Welle in z -Richtung exponentiell gedämpft
- Entsprechend können wir eine Grenzfrequenz $\omega_c = 2\pi c_0/\lambda_c$ definieren, sodass mit $k_0 = \omega/c_0$ gilt

$$k_z = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

- Somit ist nur für Frequenzen $\omega > \omega_c$ ungedämpfte Wellenausbreitung möglich

Aufgabe 15 – Teil f)

- f) Bestimmen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Welle. Erklären Sie außerdem, weshalb die Phasengeschwindigkeit größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 sein kann.

Phasen- & Gruppengeschwindigkeit (I)

- Für die Phasengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter gilt

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} > c_0$$

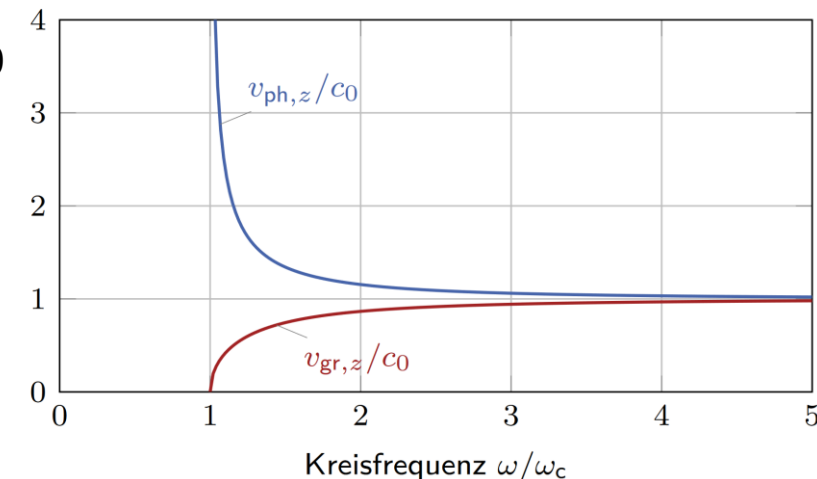
Widerspruch zur
Relativitätstheorie?

- Für die Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter gilt

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk_z} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c_0$$

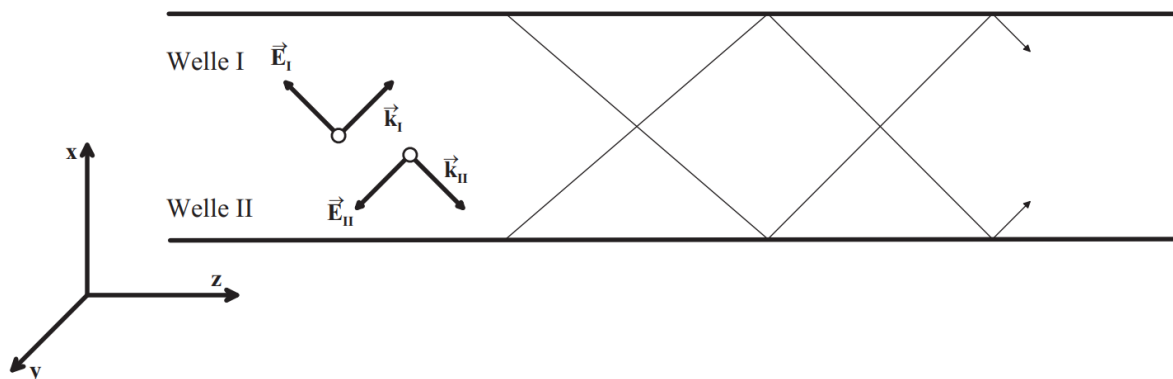
- Folglich gilt hier

$$c_0^2 = v_{\text{ph}} v_{\text{gr}}$$



Phasen- & Gruppengeschwindigkeit (II)

- Steht $v_{ph} > c_0$ tatsächlich im Widerspruch zur Relativitätstheorie? Nein!
- Vereinfachtes Modell der Wellenausbreitung im Parallelplattenleiter:
 - EM-Welle bewegt sich auf Zickzackkurs.
 - Feldverteilung entsteht durch Überlagerung (Interferenz) der hin- und herreflektierten Wellenanteile.
 - Phasengeschwindigkeit beschreibt Ausbreitungsgeschwindigkeit dieses Interferenzmusters jedoch nicht die Signal-/Energiegeschwindigkeit, welche sich auf den Zickzackkurs bezieht.



Animation zur Veranschaulichung:
<https://www.pa3fwm.nl/tools/waveguide.html>