

Übung 9 - Parallelplattenleitung

Donnerstag, 12. Januar 2023 11:34

Aufgabe 15:

Wir untersuchen nun eine parallel polarisierte ebene Welle im freien Raum ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) mit

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t) = H_e \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) \mathbf{e}_\perp,$$

die unter einem Winkel α_e auf einen idealen Leiter in der Ebene $y = 0$ trifft (an dem sie vollständig reflektiert wird) und sich in z -Richtung ausbreitet. Für den Fall $\alpha_e \rightarrow \pi/2$ weist die Welle nur

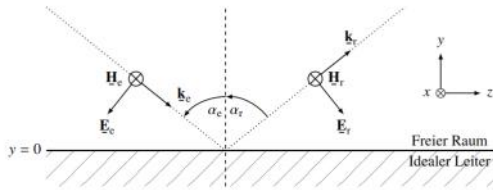


Abbildung 1

transversale Feldkomponenten auf und man spricht auch von einer transversalelektromagnetischen Welle (TEM-Welle). Neben der TEM-Welle, bei der sowohl das Magnetfeld als auch das elektrische Feld nur Transversalkomponenten besitzen, unterscheidet man noch die folgenden zwei Spezialfälle:

- Die parallel polarisierte bzw. transversal-magnetische Welle (TM-Welle): Hier besitzt das magnetische Feld keine Komponenten in Ausbreitungsrichtung, d.h. es gilt $H_z = 0$ und $E_z \neq 0$.
- Die senkrecht polarisierte bzw. transversal-elektrische Welle (TE-Welle): Hier besitzt das elektrische Feld keine Komponenten in Ausbreitungsrichtung, d.h. es gilt $H_z \neq 0$ und $E_z = 0$.

a) Welche Aussagen können Sie über die tangentialen und normalen E- bzw. H-Feldkomponenten an der Grenzfläche zu dem idealen Leiter treffen?

Hinweis: Ziehen Sie die Grenzflächenbeziehungen elektromagnetischer Wellen aus der Vorlesung heran.

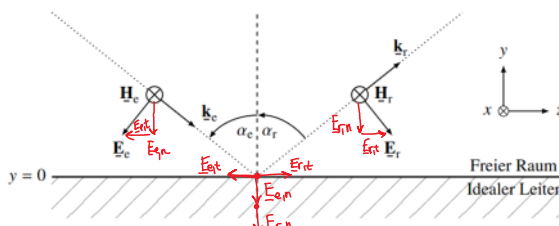
Grenzflächenbedingungen

	E-Feld	H-Feld
Tangential	$E_{t,1} - E_{t,2} = 0$	$H_{t,1} - H_{t,2} = I' \leftarrow \text{Strombeleg } [\frac{A}{m}]$
Normal	$D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma$ $\uparrow$ Flächenladungsdichte $[\frac{As}{m^2}]$	$B_{n,1} - B_{n,2} = 0$

In Formelsammlung

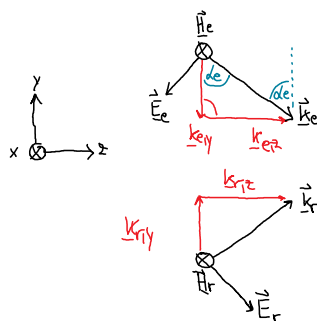
- Idealer Leiter ($\kappa \rightarrow \infty$) $\rightarrow$ Randbedingungen $\rightarrow$ Felder verschwinden im Leiter

	E-Feld	H-Feld
Tangential	$E_{t,1} = 0$	$H_{t,1} = I'$
Normal	$D_{n,1} = \sigma$	$B_{n,1} = 0$



$\rightarrow$ Die Randbedingungen sind erfüllt

b) Stellen Sie mithilfe von Abbildung 1 die Wellenvektoren $\mathbf{k}_e$ und $\mathbf{k}_r$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels α_e bzw. α_r dar. Nehmen Sie dabei an, dass $k_e = k_r = k_0$.



$$\vec{k}_e = k_e \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_e) \\ \sin(\alpha_e) \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_r = k_r \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_r) \\ \sin(\alpha_r) \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie die einfallenden bzw. reflektierten elektrischen und magnetischen Felder an. Verwenden Sie dabei das Durchflutungsgesetz um die elektrischen Felder zu erhalten.

• Magnetische Felder

$$\vec{H}_e(\vec{r}, t) = \underline{H}_e e^{j(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} \vec{e}_x = \underline{H}_e e^{j(\omega t + k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)} \vec{e}_x$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}, t) = \underline{H}_r e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{e}_x = \underline{H}_r e^{j(\omega t - k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)} \vec{e}_x$$

↑ Da Welle vollständig reflektiert wird $\underline{H}_e = \underline{H}_r$

• Elektrische Felder

$$\text{Durchflutungsgesetz} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j \omega \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{j}{\omega \epsilon_0} \nabla \times \vec{H}$$

$$\vec{E}_e(\vec{r}, t) = -\frac{j}{\omega \epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \underline{H}_e e^{j(\omega t + k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)} \\ \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_e e^{j(\omega t + k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{H}_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega \epsilon_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -j k_0 \sin \alpha \\ -j k_0 \cos \alpha \end{pmatrix} \underline{H}_e e^{j(\omega t + k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)} \quad \left| \begin{matrix} \omega \epsilon_0 = \frac{k_0}{\omega \epsilon_0} \end{matrix} \right.$$

$$= -\underline{Z}_0 \underline{H}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} e^{j(\omega t + k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = -\frac{j}{\omega \epsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ -j k_0 \sin \alpha \\ j k_0 \cos \alpha \end{pmatrix} \underline{H}_e e^{j(\omega t - k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)}$$

$$= -\underline{Z}_0 \underline{H}_e \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)}$$

d) Zeigen Sie, dass sich durch Superposition der einfallenden und reflektierten Welle in y-Richtung stehende Wellen ausbilden.

• Das Feld im Halbraum $z > 0$ ergibt sich als Superposition der einfallenden & reflektierten Welle

• Berechnung anhand von H-Welle:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_e + \vec{H}_r$$

$$= \underline{H}_e \left[e^{j(\omega t + k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)} + e^{j(\omega t - k_0 \cos \alpha y - k_0 \sin \alpha z)} \right] \vec{e}_x$$

$$= \underline{H}_e \left[e^{j k_0 \cos \alpha y} + e^{-j k_0 \cos \alpha y} \right] e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \vec{e}_x$$

$$= 2 \underline{H}_e \cos(k_0 \cos \alpha y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} & e^{j k_0 \cos \alpha y} + e^{-j k_0 \cos \alpha y} \\ &= \cos(\dots) + j \sin(\dots) + \cos(\dots) + j \sin(\dots) \\ &= \cos(\dots) + j \sin(\dots) + \cos(\dots) - j \sin(\dots) \\ &= 2 \cos(\dots) \end{aligned}$$

Mit $k_y = k_0 \cos \alpha$ und $k_z = k_0 \sin \alpha$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = 2 \underline{H}_e \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} \vec{e}_x$$

Stehende Welle in y-Richtung
Ändert sich nicht, da keine zeitabhängigkeit drin steckt.
Die stehende Welle entsteht durch Interferenz!

Wellenausbreitung in t & z-Richtung wie immer bisher
Beachte: Die Welle wandert nun in z-Richtung entlang der Grenzfläche.
Die einzelnen Wellen (E & R) sind aber geneigt im Koordinatensystem

Aufgabe 16:

Anstelle einer Herleitung der Feldverteilungen über das Verhalten einer elektromagnetischen Welle an einer ideal leitenden Platte (siehe Vorlesung), können wir die Feldbilder im Parallelplattenleiter auch direkt aus den Maxwellschen Gleichungen herleiten. Dazu müssen wir lediglich geeignete Randbedingungen wählen.

Wir wollen uns im Folgenden mit der sich in z -Richtung ausbreitenden TM-Welle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, y) \exp(j(\omega t - k_z z))$$

beschäftigen, für welche gemäß der Maxwellschen Gleichungen im Allgemeinen gilt, dass

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} & E_y &= \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_x &= \frac{j\omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} & H_y &= \frac{-j\omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) E_z = 0.$$

Ein Wellenleiter bestehe nun aus zwei in x - und z -Richtung unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Platten im Abstand a , wie in Abbildung 2 dargestellt. Der Raum zwischen den Platten sei vakuumiert.

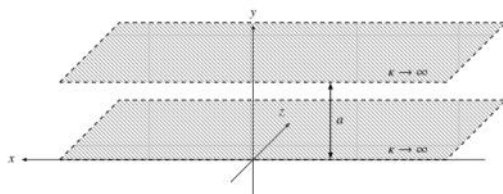


Abbildung 2

- a) Verwenden Sie die Definition der TM-Welle und die Maxwellschen Gleichungen, um das E- und H-Feld einer TM-Welle zu berechnen, welche sich zwischen den Platten in positive z -Richtung ausbreitet. Lösen Sie dazu zunächst die Wellengleichung für E_z .

Hinweis: Beachten Sie, dass die Platten in x -Richtung unendlich ausgedehnt sind, weshalb $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$. Verwenden Sie zudem die Randbedingung $E_z(y=0) = E_z(y=a) = 0$.

- Wellengleichung $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) E_z = 0$
- Definition TM-Welle $H_z = 0$
Randbedingungen $E_z(y=a) = E_z(y=0) = E_x(y=a) = E_x(y=0) = 0$
 x -Ausbreitung $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$
- Wegen $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$ ergibt sich die Wellengleichung zu $\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2) E_z = 0$
- Mit $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ folgt $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon = k_y^2 + k_z^2$ ($k_x = 0$, da Welle nur in yz -Ebene geneigt)
 $\hookrightarrow k_y^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_z^2$
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_y^2 E_z = 0$

- Lösung dieser Wellengleichung ist

$$E_z = \underline{A} \sin(k_y y) + \underline{B} \cos(k_y y) \quad \underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{C}$$

- Um Randbedingung zu erfüllen muss $E_z(y=0) = E_z(y=a) = 0$ sein.

$$E_z(y=0) = \underline{A} \cdot 0 + \underline{B} \cdot 1 = \underline{B} \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ Damit $E_z(y=0) = 0$ ist muss $\underline{B} = 0$ erfüllt sein, d.h. $\underline{A} \neq 0$ gilt

$$E_z(y=a) = \underline{A} \sin(k_y a) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k_y a = n\pi \quad \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{a} \quad n \in \mathbb{N}$$

- Damit erhalten wir im Allgemeinen

$$E_z = \underline{A} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

- Aus E_z lassen sich nun alle transversalen Feldkomponenten ermitteln

- Wegen $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$ sind $E_x = H_y = 0$

- Für E_y und H_x ergibt sich

$$E_y = \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{-jk_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \underline{A} \cos(k_y y)$$

Sowohl nur sin als auch nur cos sind Lösung der Wellengl. Aber für Allgemeinheit wird Superposition beider Lösungen genommen

- Für E_y und H_x ergibt sich

$$E_y = -\frac{j k_z}{k_y} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{j k_z}{k_y} A \cos(k_y y)$$

$$H_x = \frac{j \omega \epsilon}{k_y^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{j \omega \epsilon}{k_y} A \cos(k_y y)$$

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für die magnetischen Feldkomponenten mit denen aus Aufgabe 14 Teil d).

- Einsetzen der jeweiligen Feldkomponenten in Ausdruck für Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$= A \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{j k_z}{k_y} \cos(k_y y) \\ 1 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

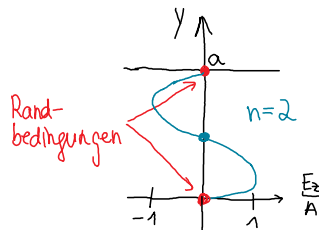
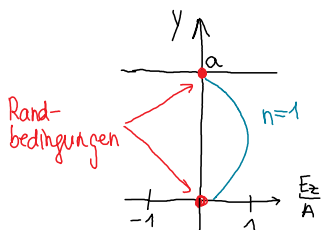
$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{j \omega \epsilon}{k_y} A \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} \vec{e}_x \quad \leftarrow \text{das hier mit 15,d) vergleichen}$$

$\Rightarrow$ Skalierung unterscheidet sich

$$\frac{j \omega \epsilon}{k_y} A = 2 H_e \quad \Rightarrow \quad A = -j \frac{2 k_y}{\omega \epsilon} H_e$$

c) Skizzieren Sie die E_z -Komponenten ($E_z = \Re\{E_z\}$) der ersten zwei Moden des Parallelplattenleiters.

$$E_z = \Re\{E_z\} = \sin(k_y y) \Re\{A\}$$



d) Berechnen Sie die Phasenkonstante in Ausbreitungsrichtung k_z . Ab welcher Frequenz kann sich eine TM-Welle im Wellenleiter ausbreiten?

- Da der Wellenvektor im Koordinatensystem geneigt ist $\rightarrow$ Satz von Pythagoras

$$k_0^2 = k_y^2 + k_z^2$$

1. kein k_x , da wir nur 2D betrachten
2. k_0 ist Vakuum-Wellenzahl, da inneres der Parallelplattenleitung hohl ist.

- Ausbreitung in z -Richtung $\leftarrow$ Abh. von Wellenfrequ.

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} \quad \leftarrow \text{Dimensionierung}$$

$$= k_0 \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k_0^2}}$$

$$= \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k_0^2}}$$

$$= \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k_0^2}}$$

- Solange k_z rein reell ist, breitet sich Welle in $+$ oder $- z$ -Richtung aus.
- Wenn $1 - \frac{k_y^2}{k_0^2} < 0$ wird, dann k_z rein imaginär

↳ Exponent in Exponentialfunktion wird reell $\rightarrow$ Dämpfung in Ausbreitungsrichtung

$$1 - \frac{k_y^2}{k_0^2} = 1 - \left(\frac{n\pi a}{\omega a} \right)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{\cancel{m} \omega}{2\pi \cancel{f_c} a} \right)^2$$

$$\Rightarrow f_c = \frac{n c_0}{2a}$$

n-te Mode
Abhängig von Wellenleiter-Dimensionierung!

! Es handelt sich hier um die untere Grenzfrequenz!

e) Zeigen Sie rechnerisch, dass eine Welle, welche die Grenzfrequenz unterschreitet, im Wellenleiter nicht ausbreitungsfähig ist.

- Wenn $f < f_c$, dann wird k_z rein imaginär, also $k_z = \pm j k_z^{(i)}$, $k_z^{(i)} \in \mathbb{R}$
- Wir erhalten für die Wellenausbreitung in z -Richtung

$$\underline{F}_2 \propto e^{-jk_z z} = e^{-j\left(\frac{1}{j}\right)k_z^{(1)} z} = e^{-k_z^{(1)} z}$$

Exponentieller Abklingen für $k_2 = -j\omega_2$
Exponentieller Anstieg für $k_2 = +j\omega_2$ ⚡

f) Bestimmen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Welle. Erklären Sie außerdem, weshalb die Phasengeschwindigkeit größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 sein kann.

- Phasengeschwindigkeit

$$V_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi f}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_0 c_0}{2fa}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k_0^2}}} > c_0$$

Begründung:



The diagram illustrates the geometry of the double-slit interference experiment. Two horizontal lines represent the slits, both labeled "Platte". A central vertical line is labeled "y". Two diagonal lines represent wave vectors, labeled k_y and k_0 . A coordinate system on the right shows the y -axis pointing up and the z -axis pointing right.

für ausbreitungsfähige Wellen gilt stets $k_y \leq k_0$,
das bedeutet, dass $\frac{k_y}{k_0} < 1$ ist und damit auch
 $\sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2} < 1$

- Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} = \left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right) \right]^{-1} = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}} \cdot 2 \frac{\omega}{c^2} \right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{\frac{\omega}{c^2} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega a} \right)^2}} \right]^{-1}$$

$$= c_0 \sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k_0^2}} < c_0$$

< 1

- Man erkennt, dass $v_{gr} v_{pn} = c^2$ gilt
- Erklärung zu $v_{pn} > c$ und $v_{gr} < c$

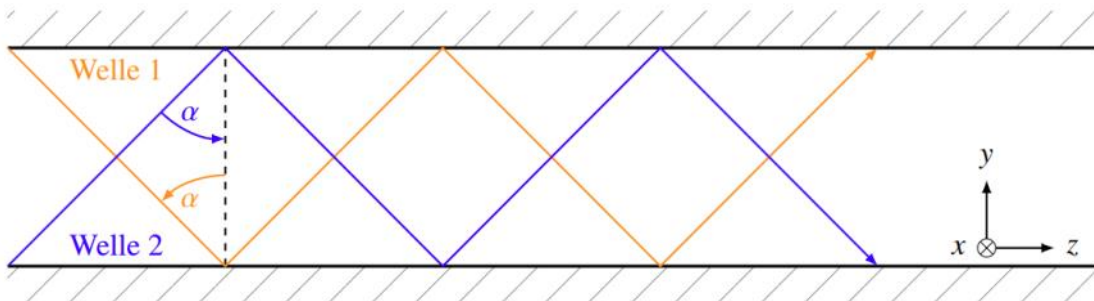


Abbildung 4: Beispielhafte Zickzack-Pfade zur Veranschaulichung der Ausbreitung durch den Wellenleiter, α bezeichnet den Einfallswinkel auf die Leiterplatten.