

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 10

Abgabe bis zum 23.01.2023 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 17:

Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt und den Kantenlängen a und b , siehe Abbildung 1. Das Innere des Hohlleiters ist mit Vakuum gefüllt und seine Randflächen bestehen aus einem Material mit unendlich hoher Leitfähigkeit. Im Inneren des Hohlleiters breitet sich eine E-Welle (oder TM-Welle) in positive z -Richtung aus.

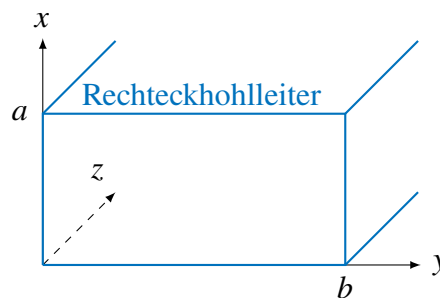


Abbildung 1

In Vorlesung 11 haben Sie gelernt, dass aus den Maxwellschen Gleichungen die folgenden Beziehungen zwischen den komplexen Amplituden der transversalen und longitudinalen Feldkomponenten hergeleitet werden können.

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + j \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right) \\ \underline{E}_y &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - j \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right) \\ \underline{H}_x &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} - j \omega \varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right) \\ \underline{H}_y &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + j \omega \varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

- a) Geben Sie die Randbedingungen für das elektrische Feld $\underline{E}(x, y, z, t)$ auf den Leiterflächen an.

Ges: Randbedingungen für das elektrische an den Grenzflächen

Geg: Stetigkeitsbedingungen, Leitfähigkeit der Leiterwände

Die Randbedingungen für den Hohlleiter ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld $\underline{E}(x, y, z, t)$ und das magnetische Feld $\underline{H}(x, y, z, t)$ an den Hohlleiterwänden. Für das elektrische Feld gilt, dass die Tangentialkomponenten entlang der Grenzfläche stetig sein müssen ($E_{\text{tan},1} = E_{\text{tan},2}$). An diesen Grenzflächen kann aufgrund der unendlich großen Leitfähigkeit der Außenhülle ($\kappa \rightarrow \infty$) jedoch kein elektrisches Feld existieren ($E_{\text{tan},2} = 0$),

sodass das Feld am Grenzübergang verschwinden muss.

$$\begin{aligned}\underline{E}_x(x, y=0, z, t) &= 0, & \underline{E}_x(x, y=b, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_y(x=0, y, z, t) &= 0, & \underline{E}_y(x=a, y, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_z(x=0, y, z, t) &= 0, & \underline{E}_z(x=a, y, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_z(x, y=0, z, t) &= 0, & \underline{E}_z(x, y=b, z, t) &= 0\end{aligned}$$

- b) Welcher der beiden folgenden Ansätze für $\underline{E}_z(x, y, z, t)$ genügt den Randbedingungen? Begründen Sie durch Rechnung. Welche Bedingungen müssen demnach die transversalen Wellenzahlen k_x und k_y erfüllen? Bezeichnen Sie die Modenzahlen in x - bzw. y -Richtung mit m bzw. n .

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(x, y, z, t) &= E_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ \underline{E}_z(x, y, z, t) &= E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \exp(j(\omega t - k_z z))\end{aligned}$$

Ges: Prüfen der Lösungsansätze, Bedingungen für k_x und k_y

Geg: Lösungsansätze und Randbedingungen aus a)

Es kann gezeigt werden, dass nur die Gleichung $\underline{E}_z(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \exp(j(\omega t - k_z z))$ die Randbedingungen für das elektrische Feld erfüllt.

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(x=0, y, z, t) &= E_0 \underbrace{\sin(k_x 0)}_{=0} \sin(k_y y) \exp(j(\omega t - k_z z)) = 0 & \square \\ \underline{E}_z(x=a, y, z, t) &= E_0 \underbrace{\sin(k_x a)}_{\neq 0} \sin(k_y y) \exp(j(\omega t - k_z z)) = 0 \\ \underline{E}_z(x, y=0, z, t) &= E_0 \sin(k_x x) \underbrace{\sin(k_y 0)}_{=0} \exp(j(\omega t - k_z z)) = 0 & \square \\ \underline{E}_z(x, y=b, z, t) &= E_0 \sin(k_x x) \underbrace{\sin(k_y b)}_{\neq 0} \exp(j(\omega t - k_z z)) = 0\end{aligned}$$

Die Randbedingung an den Stellen $x=a$ und $y=b$ sind erfüllt sofern

$$\begin{aligned}k_x \cdot a &= m \cdot \pi & \implies & k_x = \frac{m\pi}{a}, & m &\in \mathbb{N}_0, \\ k_y \cdot b &= n \cdot \pi & \implies & k_y = \frac{n\pi}{b}, & n &\in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass der harmonische Lösungsansatz nur für diskrete Werte m bzw. n die Randbedingungen erfüllt, spiegelt die Selbstkonsistenzbedingung wider. Für den Rechteckhohlleiter ist im Unterschied zur Parallelplattenleitung Selbstkonsistenz in beiden transversalen Richtungen erforderlich. Nur für bestimmte Wellenzahlen und die damit einhergehenden Winkel entsteht in x - bzw. in y -Richtung ein festes Feldmuster zwischen den Leiterplatten, das sich als Mode in z -Richtung unverändert ausbreitet.

Anmerkungen:

- Für die trivialen Lösungen $m=0$ und/oder $n=0$ ergibt sich bei der E-Welle, zusätzlich zu $\underline{H}_z=0$ auch $\underline{E}_z=0$. Folglich verschwinden auch alle transversalen Feldkomponenten und es resultiert ein Nullfeld, welches im gesamten Hohlleiter verschwindet.

- Mithilfe der Randbedingungen für das magnetische Feld könnten wir analog zeigen, dass wir für die H-Welle Lösungen der Form

$$\underline{H}_z(x, y, z, t) = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(j(\omega t - k_z z))$$

erhalten. Dementsprechend führen hier auch die Fälle $m = 0$ und $n \neq 0$ oder $m \neq 0$ und $n = 0$ zu sinnvollen Lösungen. Der Fall $m = 0$ und $n = 0$ liefert allerdings weiterhin keine sinnvolle Lösung. Diese H_{00} -Mode ist keine echte Welle, sondern ein in x und y homogenes Magnetfeld, welches nur am Ort der Welleneinspeisung existieren kann.

Nachweis: Ein solches homogenes Magnetfeld erfüllt nur dann die Maxwellschen Gleichung, insbesondere das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder $\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = \nabla \cdot \mu \underline{\mathbf{H}} = 0$, wenn keine Wellenausbreitung möglich ist: Durch Einsetzen der Definition der Divergenz folgt $\nabla \cdot \mu \underline{\mathbf{H}} = \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial z} = \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial z} = 0$, wobei das vorletzte Gleichheitszeichen aus der Tatsache folgt, dass sowohl $\underline{H}_x$ als auch $\underline{H}_y$ für $m = n = 0$ verschwinden ($\cos(0) = 1$). Offenbar kann das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder lediglich für $k_z = 0$ oder $H_0 = 0$ erfüllt sein:

$$\left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial z} \right|_{m=n=0} = -jk_z H_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \neq 0.$$

In beiden Fällen findet allerdings keine Wellenausbreitung mehr statt, da die Wellenzahl oder die Feldamplitude verschwindet.

- c) Bestimmen Sie für eine gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ die Wellenzahl k_z mit dem größtmöglichen Betrag unter Berücksichtigung Ihrer bisherigen Ergebnisse. Wählen Sie als Ausgangspunkt die allgemeine Wellengleichung für homogene Materialien.

Ges: Allgemeine Gleichung für die Ausbreitungskonstante k_z und dann ihr größtmöglicher Wert

Geg: Allgemeine Wellengleichung, gültiger Lösungsansatz für $\underline{H}_z$

Die allgemeine Wellengleichung für homogene Materialien und elektrische Felder lautet

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$$

Der Laplace-Operator ist für ein Vektorfeld in kartesischen Basisvektoren so definiert, dass er unabhängig auf alle Feldkomponenten anzuwenden ist, d.h. $\Delta \underline{\mathbf{E}} = \Delta \underline{E}_x \mathbf{e}_x + \Delta \underline{E}_y \mathbf{e}_y + \Delta \underline{E}_z \mathbf{e}_z$. Damit lässt sich die Wellengleichung nach den einzelnen Komponenten separieren; anders ausgedrückt muss jede einzelne Feldkomponente die Wellengleichung erfüllen. Damit erhalten wir für die z -Komponente

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial t^2} = 0$$

Für harmonische Anregung vereinfachen sich die zeitliche Ableitung zu einer Multiplikation mit $j\omega$ und die zweifache räumliche Ableitung zu einer Multiplikation mit $-k_i^2$ für die Ableitung nach $i \in \{x, y, z\}$. Daraus folgt mit der Wellenzahl $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$

$$\begin{aligned} -k_x^2 \underline{E}_z - k_y^2 \underline{E}_z - k_z^2 \underline{E}_z + \mu \varepsilon \omega^2 \underline{E}_z &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung stimmt mit der Definition der Wellenzahl $|\mathbf{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ überein und bestätigt daher, dass der gewählte Lösungsansatz die Wellengleichung erfüllt. Durch Einsetzen der Randbedingungen für die Wellenzahlen k_x sowie k_y und Wurzelziehen resultiert für die Ausbreitungskonstante (Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung)

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Die Lösung für die Wellenzahl k_z wird maximal, wenn die Subtrahenden und damit die Modenzahlen m und n minimal werden. Dies ist (hier bei der E-Welle!) für $m = n = 1$ der Fall:

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad (m = 1, n = 1)$$

Wir sehen, dass unter allen Moden die Grundmode stets die größte Ausbreitungskonstante aufweist.

- d) Ermitteln Sie die Grenzfrequenz $f_{c,m,n}$ aller Moden (m, n) indem Sie $k_z = 0$ setzen. Erklären Sie was für Frequenzen $f < f_{c,m,n}$ gilt.

Ges: Cut-off-Frequenz für die E_{mn} -Mode

Geg: Allgemeine Gleichung für die Ausbreitungskonstante k_z aus c)

Die Cut-off-Frequenz $f_{c,mn}$ erhält man durch Nullsetzen der Ausbreitungskonstante k_z :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{c,mn}^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \omega_{c,mn} &= \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \Leftrightarrow \\ f_{c,mn} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

Eine gegebene Mode mit Modenzahlen m und n kann sich unterhalb der Cut-off-Frequenz ($f < f_{c,mn}$) nicht im Wellenleiter ausbreiten, da die Ausbreitungskonstante k_z in diesem Fall rein imaginär wird. Somit würden die Felder in z -Richtung exponentiell abklingen, was nicht mit einer sich ausbreitenden Welle vereinbar ist. Oberhalb der Cut-off-Frequenz ist sie dagegen rein reell.

Hinweis: Die Ausbreitungskonstante wird unterhalb der Cut-off-Frequenz selbst dann rein imaginär, wenn Materialverluste im Wellenleiter vollständig vernachlässigt werden ($k_z = \beta - j\alpha$ mit $\alpha = 0$).

- e) Im Folgenden sei für die Abmaße des Hohlleiters $b = 2a$ gegeben. In welchem Bereich $f_l < f < f_h$ muss die Frequenz der E-Wellen liegen, damit ausschließlich die niedrigste Mode (Grundmode) im Wellenleiter angeregt wird?

Ges: Frequenzbereich, in dem einzig und allein die Grundmode ausbreitungsfähig ist

Geg: Hohlleitergeometrie mit $b = 2a$ und allgemeine Formel für die Cut-off-Frequenz aus d)

Wie bereits in der vorherigen Teilaufgabe gezeigt ist die E_{11} -Mode die Grundmode der E-Welle im Rechteckhohlleiter. Um einzig und allein die Grundmode anzuregen, muss die gewählte

Frequenz der Welle größer gleich der Cut-off-Frequenz der Grundmode, jedoch kleiner als die Cut-off-Frequenz der nächsthöheren Mode sein. Es gilt nun zu ermitteln, welche Mode sich mit steigender Frequenz als nächstes ausbreitet. Hierzu setzen wir $b = 2a$ in Gleichung für die Grenzfrequenz ein

$$\begin{aligned} f_{c,mn} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 (4m^2 + n^2)} \\ &= \frac{1}{4a\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{4m^2 + n^2} = \frac{c}{4a} \sqrt{4m^2 + n^2}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Grenzfrequenz minimal, wenn der Term $4m^2 + n^2$ minimal ist. Dies ist für die Grundmode mit $m = n = 1$ der Fall. Den nächstgrößeren Wert von $4m^2 + n^2$ findet man für $m = 1$ und $n = 2$, welches der E_{12} -Mode entspricht. Die Grundmode E_{11} ist die sich ausbreitende Mode im Frequenzbereich zwischen $(f_l = f_{c,11}) < f < (f_h = f_{c,12})$:

$$\frac{c}{4a} \sqrt{5} < f < \frac{c}{4a} \sqrt{8}$$

f) Geben Sie alle Feldkomponenten $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{E}_z$, $\underline{H}_x$, $\underline{H}_y$ und $\underline{H}_z$ der E-Grundmode an.

Ges: Transversale Feldkomponenten der Grundmode

Geg: Lösungsansatz aus der Aufgabenstellung sowie $m = 1$ und $n = 1$

Die $\underline{E}_z$ -Komponente ist gemäß b) gegeben durch

$$\underline{E}_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)).$$

Mit $\underline{H}_z = 0$ und den Hinweisen aus dem Aufgabentext können die fehlenden Feldkomponenten berechnet werden.

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ \underline{E}_y &= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{2a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ \underline{H}_x &= \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{2a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ \underline{H}_y &= -\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \end{aligned}$$

g) Abbildung 2 zeigt die Feldlinien des elektrischen (durchgezogene Linien) und des magnetischen (gestrichelte Linien) Feldes eines Hohlleiters. Erklären Sie, ob und warum es sich um eine E- oder H-Welle handelt. Begründen Sie zudem, welche Mode (m, n) dargestellt ist.

Ges: Bestimmung der Mode, d.h. von m und n

Geg: Skizze der Feldlinien über verschiedenen Wellenleiterquerschnitten

Da nur das magnetische Feld einen Anteil in Ausbreitungsrichtung, d.h. in z -Richtung, aufweist, muss es sich um eine H-Welle handeln. Des Weiteren erkennen wir, dass

$$\left. \begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y \neq 0 \\ H_x \neq 0 \\ H_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{k_x \neq 0}_{E_y \text{ weist in der Schnittebene c für alle } x \text{ in die gleiche Richtung} \Rightarrow m=1} \quad \text{und} \quad \underbrace{k_y = 0}_{\Rightarrow n=0}$$

Es muss sich folglich um die Grundmode H_{10} der H-Wellen bzw. TE-Wellen handeln.

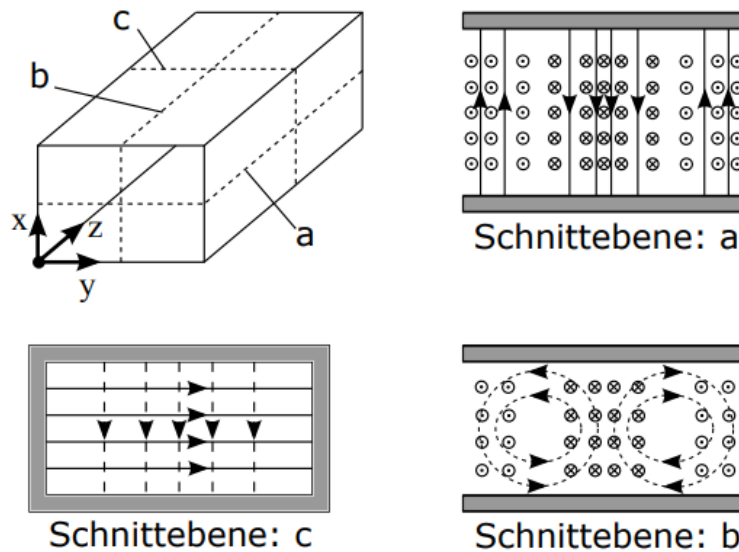


Abbildung 2

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu