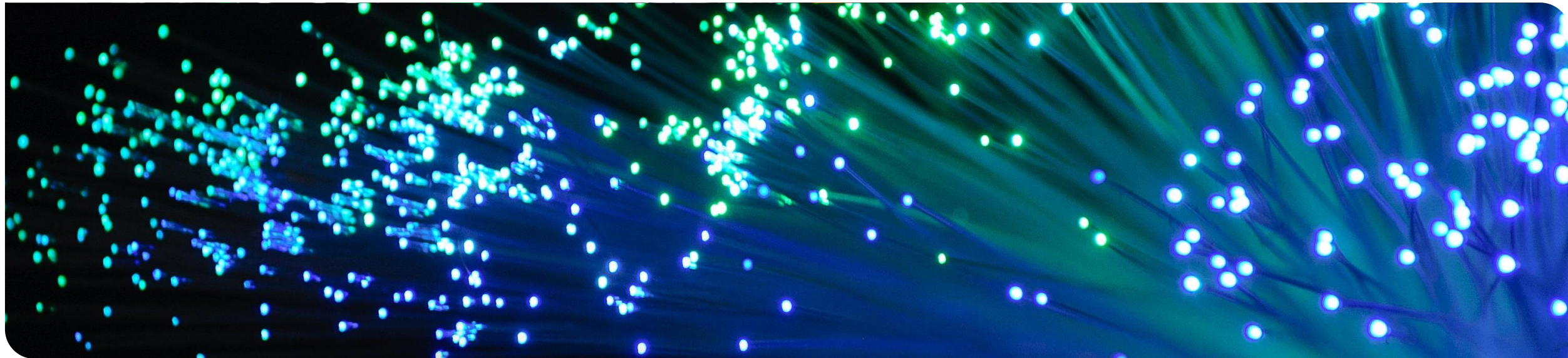


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 11

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 5	A9	Reflexion und Brechung
Übung 6	A10, A11	Beugung und Interferenz
Übung 7	A12	Gaußscher Strahl
Übung 8	A13, A14	Optische Systeme
Übung 9	A15, A16	Parallelplattenleiter
Übung 10	A17	Rechteckhohlleiter
Übung 11	A18	Rundhohlleiter

Verhalten von EM-Wellen am idealen Leiter

- Das Innere eines idealen Leiters ist stets feldfrei.
- Aus den Grenzflächenbedingungen für die tangentialen und normalen EM-Feldkomponenten erhalten wir die folgenden Randbedingungen der Felder am idealen Leiter:

	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Tangential	$E_t = 0$	$H_t = i'$
Normal	$D_n = \sigma$	$B_n = 0$

- Hier bezeichnet i' den Oberflächenstrom und σ die Oberflächenladung.

Rundhohlleiter

- Auch im Rundhohlleiter unterscheiden wir zwischen E- und H-Wellen
- Annahme: Hohlleiterwand ideal leitend
- Die **longitudinalen** Feldkomponenten E_z bzw. H_z müssen die skalare Helmholtzgleichung erfüllen.
- Außerdem: Randbedingungen an den Hohlleiterwänden, u.a. $E_z(\rho = a) = 0$.
- **Wichtig:** In Zylinderkoordinaten muss für die transversalen Feldkomponenten der vektorielle Laplace-Operator verwendet werden

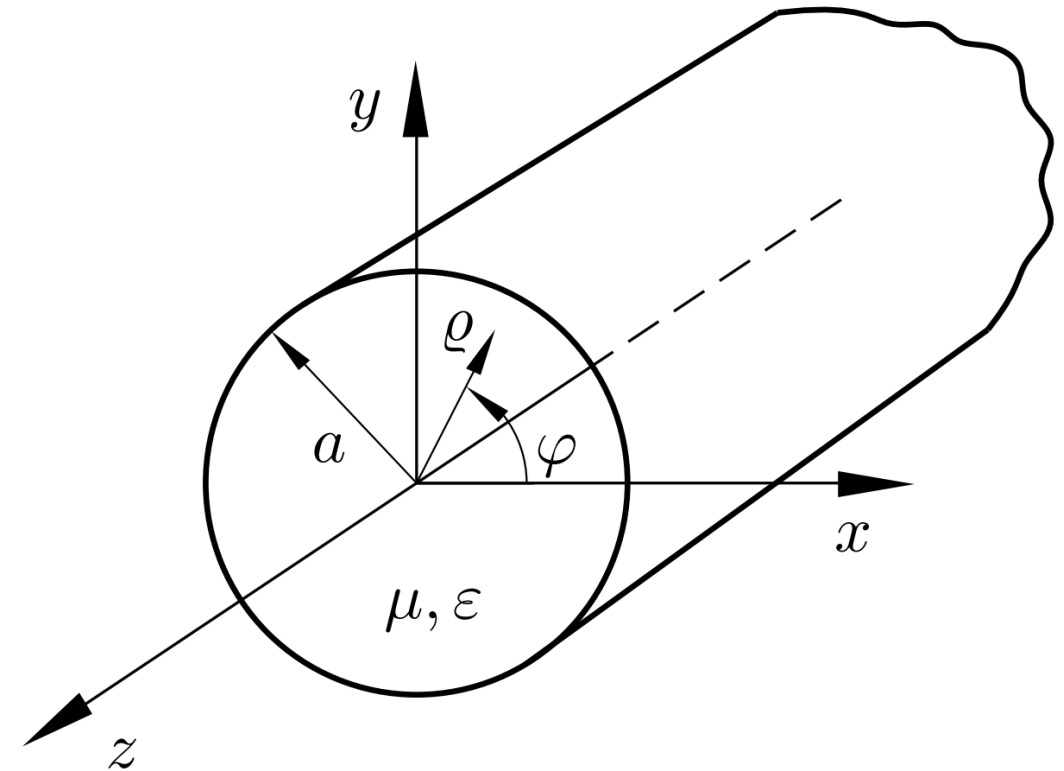


Abbildung aus Henke 2020

Für Interessierte: <https://mathworld.wolfram.com/VectorLaplacian.html>

E- & H-Wellen im Rundhohlleiter

Aus den longitudinalen Feldkomponenten erhalten wir die transversalen Komponenten...

■ ... für E-Wellen:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\rho &= -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \\ \underline{E}_\varphi &= -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} \\ \underline{H}_\rho &= +j \frac{\omega \varepsilon}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} \\ \underline{H}_\varphi &= -j \frac{\omega \varepsilon}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho}\end{aligned}$$

■ ... für H-Wellen:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\rho &= -j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} \\ \underline{E}_\varphi &= +j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \\ \underline{H}_\rho &= -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \\ \underline{H}_\varphi &= -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Lösung der Helmholtzgleichung

- Gemäß dem Produktansatz von Bernoulli setzen für E- bzw. H-Wellen an, dass $\underline{F}(\rho, \varphi) = R(\rho) \underline{\Phi}(\varphi)$.
- Setzen wir den obigen Ansatz für die longitudinalen Feldkomponenten geführter Wellen in Zylinderkoordinaten in die Helmholtzgleichung ein, so erhalten wir Gleichungen der Form

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{\underline{\Phi}} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \varphi^2} + (\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2) \rho^2 = 0$$

Zuhause herleiten
empfehlenswert

- Diese lässt sich mit der Separationskonstante $\underline{m}$ und der transversalen Wellenzahl $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2$ separieren in die beiden Differentialgleichungen

Variablenseparation:

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \varphi^2} + \underline{m}^2 \underline{\Phi} = 0$$

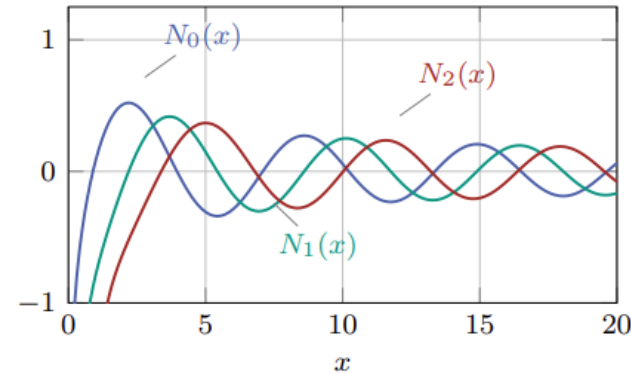
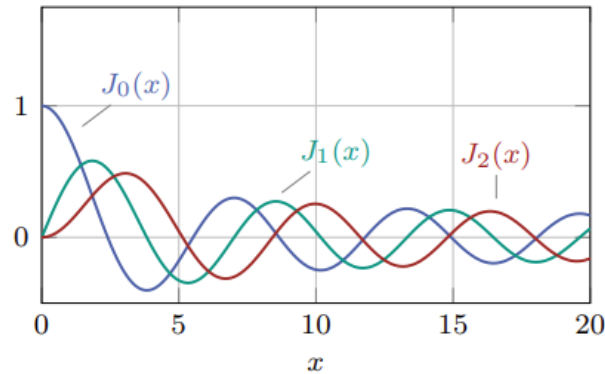
Hier: Lösung sin/cos

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + [\underline{k}_t^2 \rho^2 - \underline{m}^2] R = 0 .$$

Hier: Lösung
Besselfunktionen

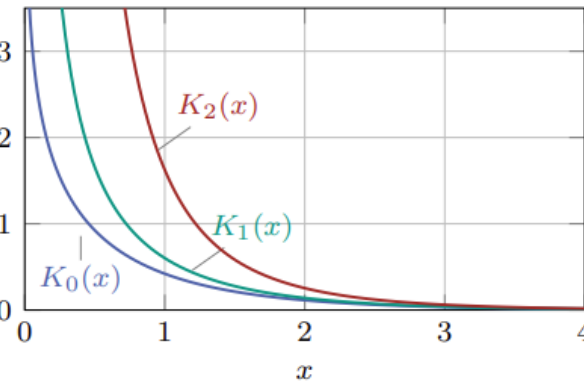
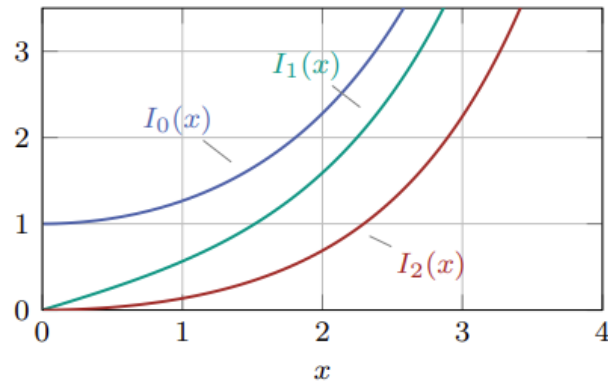
Lösung der Helmholtzgleichung

- Besselfunktionen erster Gattung: $J_m(x)$
- Besselfunktionen zweiter Gattung: $N_m(x)$ (auch Neumann oder Weber Funktionen)



Neumann-Funktion hat in $x=0$ eine Singularität, das bedeutet, hier wäre eine unendlich hohe physikalische Größe (hier: ein unendlich hohes el. Feld). Das ist unmöglich.

- Modifizierte Besselfunktionen erster Gattung: $I_m(x)$
- Modifizierte Besselfunktionen zweiter Gattung: $K_m(x)$ (auch MacDonald-Funktionen)

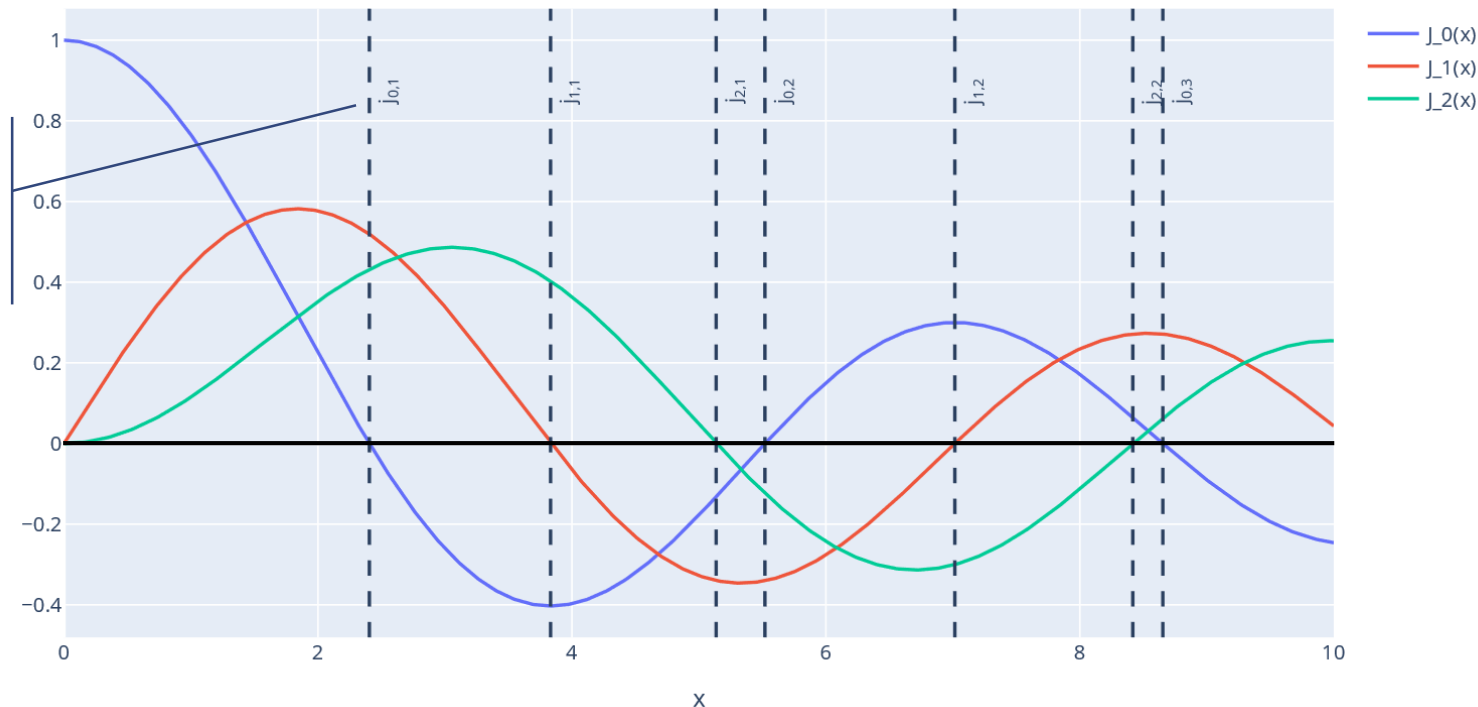


Die modifizierten Besselfunktionen treten auf, sobald k_t^2 negativ, bzw. k_t imaginär wird.
 Spoiler Alarm: Dielektrische Wellenleiter

Besselfunktionen & E-Wellen

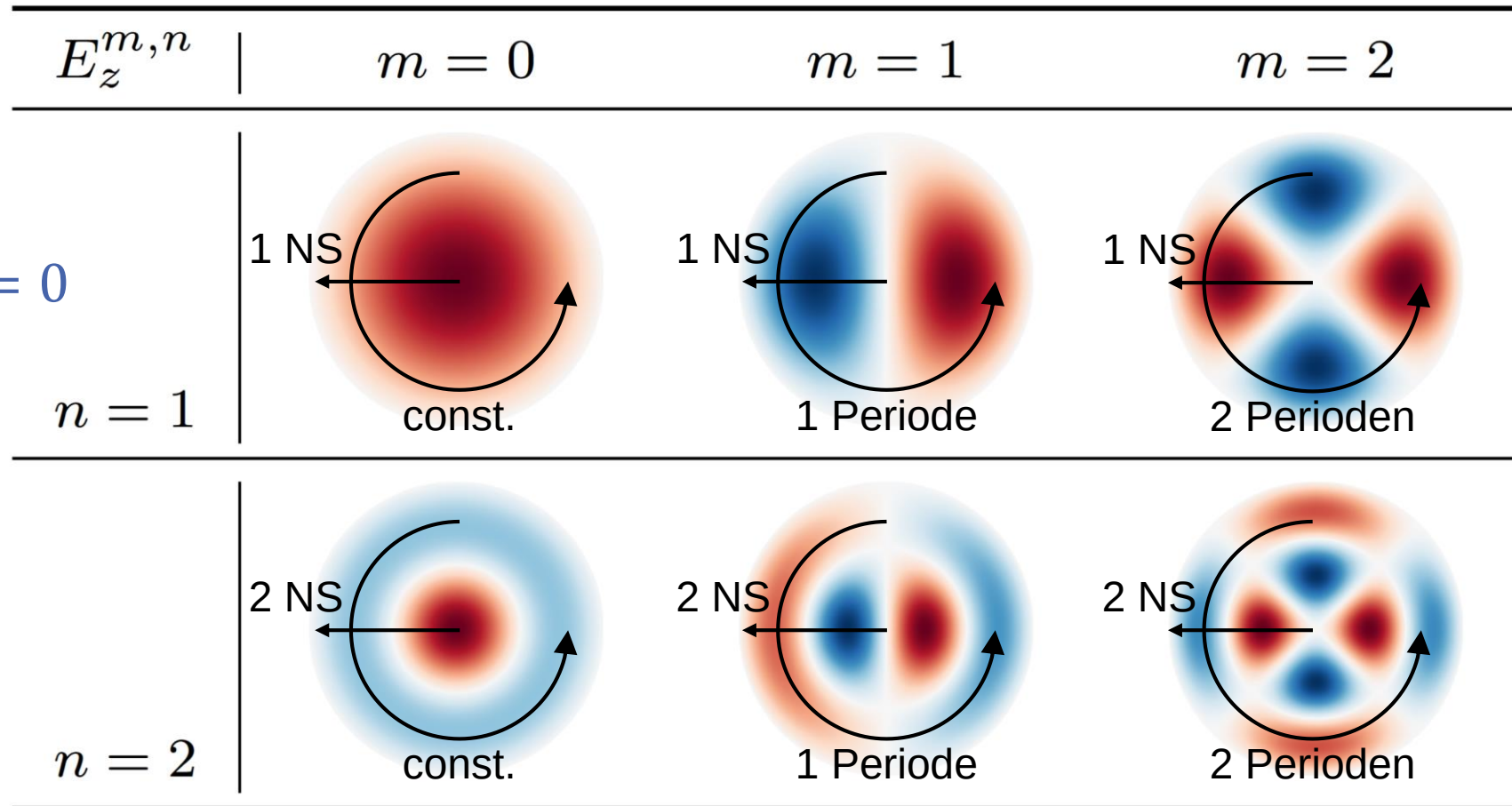
- Aus der Vorlesung wissen wir, dass Besselfunktionen die radiale Abhängigkeit der Moden im Rundhohlleiter beschreiben.
- Die Nullstellen $j_{m,n}$ bestimmen die normierten Grenzfrequenzen der $E^{m,n}$ -Moden.

Erste
Ausbreitungsfähige E-
Mode: $E^{0,1}$



Moden der E-Welle im Rundhohlleiter

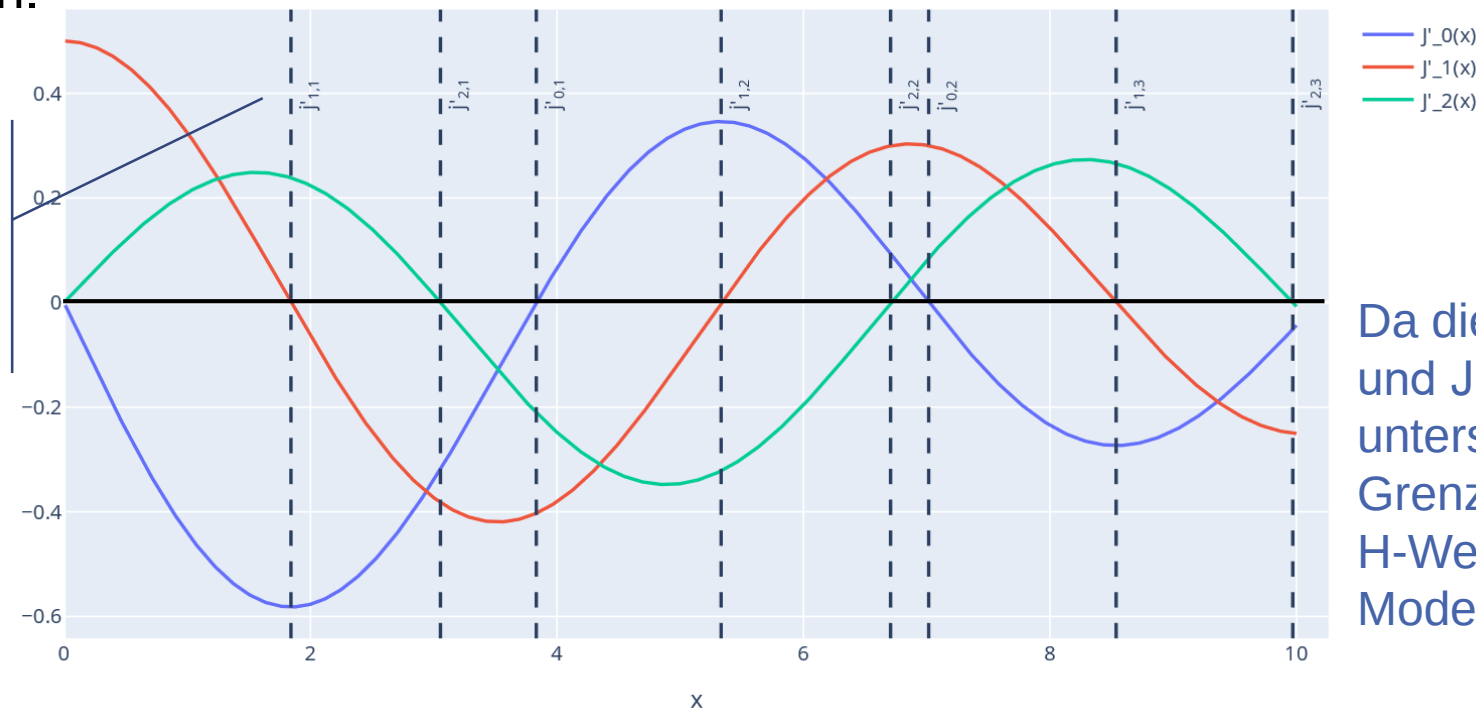
Achtung:
 $E_z(\rho = a) = 0$



Besselfunktionen & H-Wellen

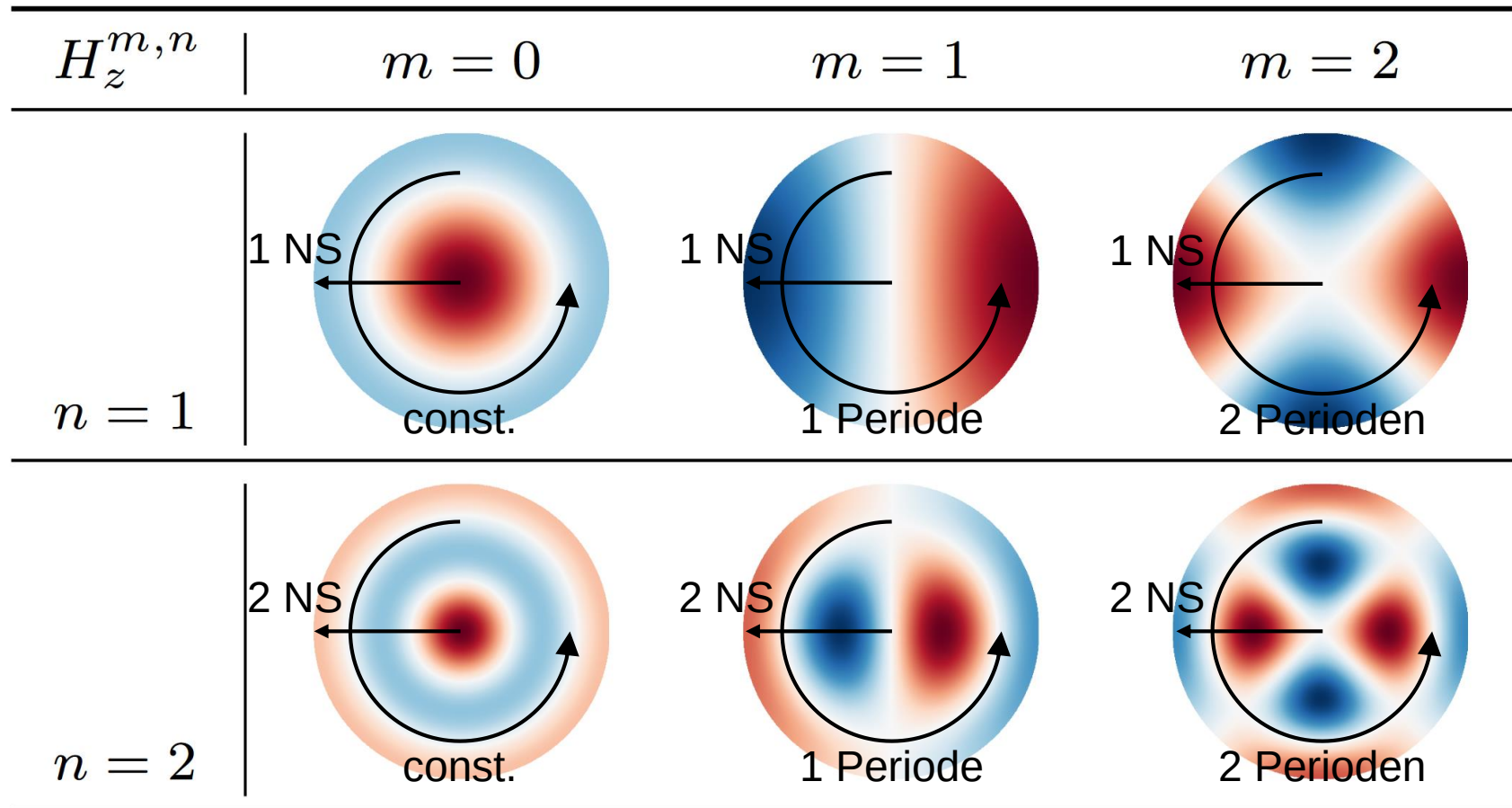
- Aus der Vorlesung wissen wir, dass Besselfunktionen die radiale Abhängigkeit der Moden im Rundhohlleiter beschreiben.
- Die Nullstellen ihrer Ableitungen $j'_{m,n}$ bestimmen die normierten Grenzfrequenzen der $H^{m,n}$ -Moden.

Erste
Ausbreitungsfähige
H-Mode: $H^{1,1}$
Grundmode! – Wieso?

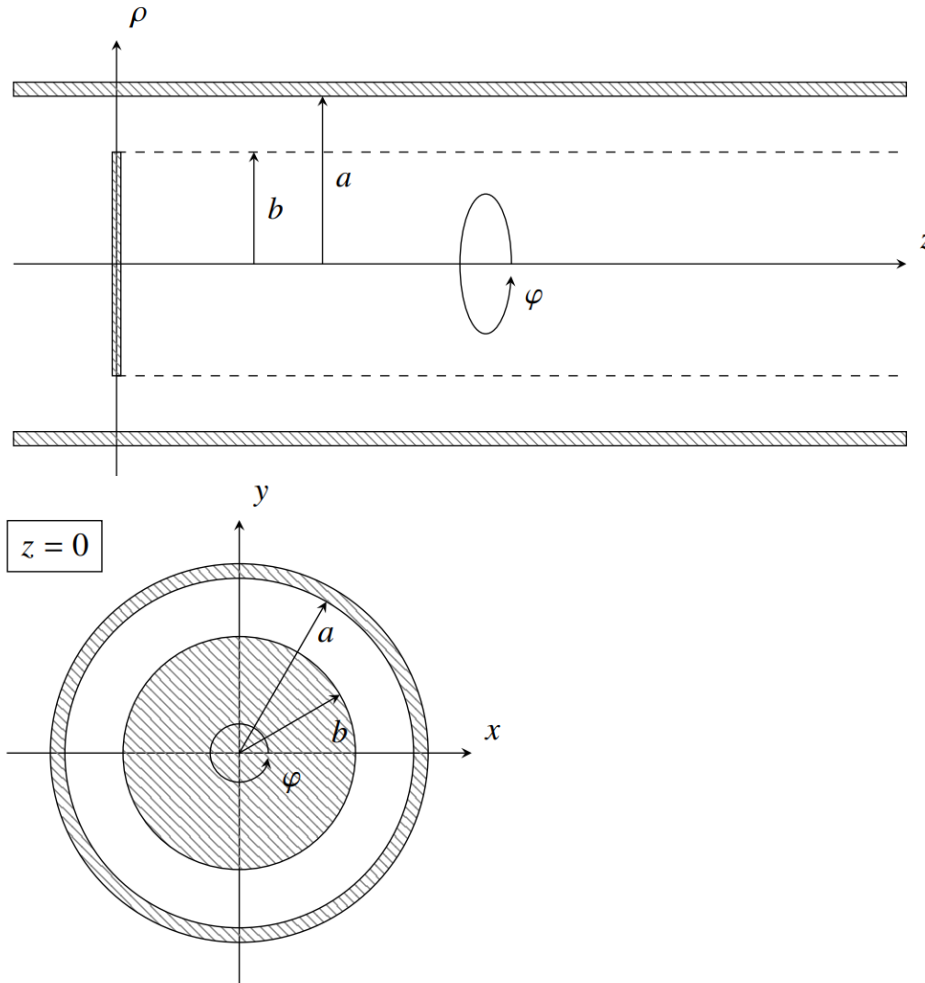


Da die Nullstellen von $J(x)$ und $J'(x)$ verschieden sind, unterscheiden sich die Grenzfrequenzen der E- & H-Wellen (bei gegebenen Modenzahlen)!

Moden der H-Welle im Rundhohlleiter



Aufgabe 17 – Teil a) & b)



Gegeben sei ein zylindersymmetrischer Rundhohlleiter mit dem Radius a . Das Innere des Wellenleiter sei vakuumiert und die Wand ideal leitend $\kappa \rightarrow \infty$. In der Ebene $z = 0$ befinde sich nun eine ebenfalls ideal leitende Kreisscheibe infinitesimaler Dicke mit dem Radius b , wie in Abbildung 1 dargestellt. Zwischen dieser Kreisscheibe und der Hohlleiterwand liege eine Wechselspannung an, wodurch in $z = 0$ ein elektrisches Feld mit der komplexen Amplitude

$$\underline{\mathbf{E}}^s(\rho, \varphi, z = 0) = \underline{E}_\rho^s(\rho, z = 0) \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho \begin{cases} E_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

anliege, wobei wir die harmonische Zeitabhängigkeit $\exp(j\omega t)$ nicht explizit anführen. Dieses elektrische Feld rege elektromagnetische Wellen im Rundhohlleiter an, die sich in positive z -Richtung ausbreiten. Bemerkung: In Rundhohlleitern können sich keine TEM-Wellen ausbreiten, lediglich E- und H-Wellen sind ausbreitungsfähig.

- Weisen Sie mithilfe des Induktionsgesetzes nach, dass das rotationssymmetrische elektrische Feld an der Kreisscheibe ein magnetisches Feld der Form $\underline{\mathbf{H}} = H_\varphi(\rho, z) \mathbf{e}_\varphi$ zur Folge hat.
- Analog zu der Anregung werden auch die ausbreitungsfähigen Wellen im Hohlleiter $\underline{E}_\rho$ - und H_φ -Komponenten aufweisen. Begründen Sie anhand der folgenden Beziehungen aus der Vorlesung, dass es sich bei den im Rundhohlleiter angeregten, zylindersymmetrischen Wellen um E-Wellen handeln muss. Stellen Sie zudem die nicht verschwindenden Komponenten von $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ in Abhängigkeit von $\underline{E}_z$ dar.

Hinweis: Wir nehmen an, dass in unserem Fall alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Felds unabhängig von φ sind. Daher gilt stets $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

E-Wellen im Rundhohlleiter

- Aus den longitudinalen Feldkomponenten erhalten wir die transversalen Komponenten
- Für E-Wellen:

Zylindersymmetrie,
d.h. $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

$$\underline{E}_\rho = -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho}$$

$$\underline{E}_\varphi = -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\underline{H}_\rho = +j \frac{\omega \varepsilon}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\underline{H}_\varphi = -j \frac{\omega \varepsilon}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho}$$

H-Wellen im Rundhohlleiter

- Aus den longitudinalen Feldkomponenten erhalten wir die transversalen Komponenten
- Für H-Wellen:

Zylindersymmetrie,
d.h. $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

$$\underline{E}_\rho = -j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\underline{E}_\varphi = +j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho}$$

$$\underline{H}_\rho = -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho}$$

$$\underline{H}_\varphi = -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} = 0$$

Zylindersymmetrische H-Wellen
können keine E_ρ - bzw. H_φ -
Komponente besitzen!

Aufgabe 17 – Teil c) - e)

Für die E-Wellen im Rundhohlleiter wählen wir mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ den folgenden Ansatz

$$\underline{E}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z) = \underline{A}_0^{m,n} J_m(\underline{k}_t^{m,n} \rho) \exp(j m \varphi) \exp(-j \underline{k}_z^{m,n} z) .$$

- c) Begründen Sie, dass für die Modenzahl $m = 0$ gelten muss, um die Zylindersymmetrie der Lösungen zu gewährleisten.
- d) Welche Bedingung muss die transversale Wellenzahl $\underline{k}_t^{m,n}$ erfüllen, um die Randbedingungen des elektrischen Felds an den Hohlleiterwänden zu erfüllen?
- e) Geben Sie möglichst weit vereinfachte Ausdrücke für die nicht verschwindenden Feldkomponenten aus b) an.

Aufgabe 17 – Teil f) – h)

$$\underline{E}_\rho(\rho, z=0) = \begin{cases} \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \stackrel{!}{=} \sum_n \underline{E}_\rho^{0,n}(\rho, z=0). \quad (1)$$

f) Ermitteln Sie die Koeffizienten $\underline{A}_0^{0,n}$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- i) Setzen Sie den in e) erhaltenen Ausdruck für $\underline{E}_\rho^{0,n}$ in die Bedingung (1) ein.
- ii) Multiplizieren Sie auf beiden Seiten mit $\rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right)$ und integrieren Sie anschließend von $\rho = 0$ bis $\rho = a$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $J_0(cx) = -cJ_1(cx)$ gilt und verwenden Sie die folgende Beziehung in der $\delta_{\ell,n}$ das Kronecker-Delta bezeichnet:

$$\int_0^a \rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a}\rho\right) d\rho = \delta_{\ell,n} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} = \begin{cases} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} & \ell = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- g) Drücken Sie $\underline{H}_\varphi$ mithilfe der Koeffizienten $\underline{A}_0^{0,n}$ aus.
- h) *Optional:* Welche Bedingung muss für die Betriebsfrequenz des Rundhohlleiters gelten, damit ausschließlich die Fundamentalmode angeregt wird?