

Übung 11 - Rundhohlleiter

Sonntag, 22. Januar 2023 11:49

Lösung zu Aufgabe 18:

Gegeben sei ein zylindersymmetrischer Rundhohlleiter mit dem Radius a . Das Innere des Wellenleiter sei vakuumiert und die Wand ideal leitend $\kappa \rightarrow \infty$. In der Ebene $z = 0$ befindet sich nun eine ebenfalls ideal leitende Kreisscheibe infinitesimaler Dicke mit dem Radius b , wie in Abbildung 1 dargestellt. Zwischen dieser Kreisscheibe und der Hohlleiterwand liegt eine Wechselspannung an, wodurch in

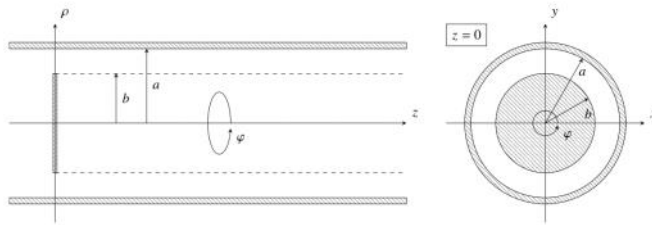


Abbildung 1: Links: Längsschnitt. Rechts: Querschnitt.

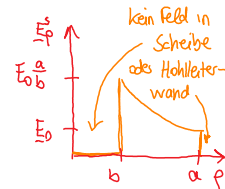
$z = 0$ ein elektrisches Feld mit der komplexen Amplitude

$$\vec{E}^s(\rho, \varphi, z=0) = E_\rho^s(\rho, z=0) \vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho \begin{cases} E_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

anliegen, wobei wir die harmonische Zeitabhängigkeit $\exp(j\omega t)$ nicht explizit anführen. Dieses elektrische Feld regt elektromagnetische Wellen im Rundhohlleiter an, die sich in positive z -Richtung ausbreiten. Bemerkung: In Rundhohlleitern können sich keine TEM-Wellen ausbreiten, lediglich E- und H-Wellen sind ausbreitungsfähig.

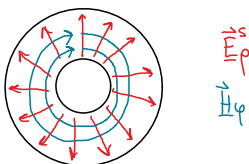
- Wechselspannung (zeitlich änderndes Feld) zur Feldanregung innerhalb eines Rundhohlleiters

- Allgemein $\vec{E}^s(\rho, \varphi, z=0, t) = \vec{E}^s(\rho, \varphi, z=0) e^{j\omega t}$ zeitliche Änderung der Wechselspannung
- Feldverteilung $\vec{E}^s(\rho, \varphi, z=0) = \vec{E}_\rho^s(\rho, z=0) \vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho \begin{cases} E_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
 Feld wird nur in $z=0$ angeregt
 Rotationssymmetrie $\rightarrow$ keine φ -Abhängigkeit
 in der leitfähigen Scheibe existieren keine Felder
 Feld hängt mit $\frac{1}{\rho}$ ab
 • $\rho=b \cdot E_0 \frac{a}{b} > E_0$ da $b < a$
 • $\rho=a \cdot E_0$



- Weisen Sie mithilfe des Induktionsgesetzes nach, dass das rotationssymmetrische elektrische Feld an der Kreisscheibe ein magnetisches Feld der Form $\vec{H} = H_\varphi(\rho, z) \vec{e}_\varphi$ zur Folge hat.

- Querschnitt des Rundhohlleiters bei $z=0$ (also mit Scheibe)



- Induktionsgesetz $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$
- Es gilt in $z=0$ $\vec{E}(\rho, \varphi, z=0) = \vec{E}_\rho(\rho, z=0) \vec{e}_\rho \rightarrow$ Rotationssymmetrie $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$
- Mit Induktionsgesetz $\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{H} \text{ hat nur eine } \varphi\text{-Komponente}$
 $E_z = E_\varphi = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

- b) Analog zu der Anregung werden auch die ausbreitungsfähigen Wellen im Hohlleiter E_ρ - und H_φ -Komponenten aufweisen. Begründen Sie anhand der folgenden Beziehungen aus der Vorlesung, dass es sich bei den im Rundhohlleiter angeregten, zylindersymmetrischen Wellen um E-Wellen handeln muss. Stellen Sie zudem die nicht verschwindenden Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ in Abhängigkeit von E_z dar.

Hinweis: Wir nehmen an, dass in unserem Fall alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Felds unabhängig von φ sind. Daher gilt stets $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

$$\begin{aligned} E_\rho &= -j \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{k_z \rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) & E_\varphi &= -j \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{k_z} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\ H_\rho &= -j \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{\omega \epsilon}{k_z \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) & H_\varphi &= -j \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \frac{\omega \epsilon}{k_z} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right). \end{aligned}$$

Tipp Herleiten der Beziehungen
Zuhause

- Nutzen der Rotationssymmetrie $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

$$\begin{aligned} E_\rho &= -j \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} & E_\varphi &= j \frac{\omega \mu}{k^2 - k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \\ H_\rho &= -j \frac{k_z}{k^2 - k_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} & H_\varphi &= -j \frac{\omega \epsilon}{k^2 - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \end{aligned}$$

$k_t^2 = k^2 - k_z^2$ ist der
transversale Wellenvektor



- Laut Aufgabenstellung und Teilaufgabe b) sind E_ρ und H_φ ungleich Null $\rightarrow E_z \neq 0$
- Wenn $E_z \neq 0$, dann E-Welle. Entsprechend ist dann $H_z = 0$, denn es können nicht E_z & H_z gleichzeitig $\neq 0$ sein.

$$\begin{aligned} E_\rho &= -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} & E_\varphi &= 0 \\ H_\rho &= 0 & H_\varphi &= -j \frac{\omega \epsilon}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \end{aligned}$$

- Merke: Aus der Vorlesung kennen wir die möglichen Hohlleiter-Moden. In der Praxis müssen diese Moden irgendwie mit einem el-mag Feld angeregt werden. Typischerweise oft an einem der Hohlleiterenden, da man nicht durch einen metallischen Leiter ein Feld in das Innere des Hohlleiters induzieren kann. Um bestimmte Moden anzuregen müssen folgende Kriterien erfüllt sein:

- Die Frequenz des anregenden Feldes (z.B. eine Antenne/Wednesdayspannungsquelle) muss über der unteren Grenzfrequenz der Wellenleitermoden sein.
- Das anregende Feld und die Wellenleitermoden-Felder müssen sich möglichst gut überlappen. Nur so kann das anregende Feld effektiv Energie in die Wellenleitermode koppeln. Aus diesem Grund schauen wir uns in dieser Aufgabe zuerst das Feld der Anregung und danach die möglichen Wellenleitermoden an.

Für die E-Wellen im Rundhohlleiter wählen wir mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ den folgenden Ansatz

$$E_z^{m,n}(\rho, \varphi, z) = A_0^{m,n} J_m(k_t^{m,n} \rho) \exp(j m \varphi) \exp(-j k_z^{m,n} z).$$

- c) Begründen Sie, dass für die Modenzahl $m = 0$ gelten muss, um die Zylindersymmetrie der Lösungen zu gewährleisten.

- Allgemein gilt $m \in \mathbb{N}$
- Zylindersymmetrie gilt wenn E-Feld nicht in azimutaler Richtung ändert $\rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z^{m,n}(\rho, \varphi, z) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z^{m,n} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow A_0^{m,n} J_m(k_t^{m,n} \rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{j m \varphi} e^{-j k_z^{m,n} z} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow A_0^{m,n} J_m(k_t^{m,n} \rho) j m e^{j m \varphi} e^{-j k_z^{m,n} z} &\stackrel{!}{=} 0 \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad m=0 \end{aligned}$$

- Damit resultiert

$$E_z^{0,n}(\rho, z) = A_0^{0,n} J_0(k_t^{0,n} \rho) e^{-j k_z^{0,n} z}$$

- d) Welche Bedingung muss die transversale Wellenzahl $k_t^{m,n}$ erfüllen, um die Randbedingungen des elektrischen Felds an den Hohlleiterwänden zu erfüllen?

- E_z ist tangential zu Hohlleiterwänden und muss daher bei $\rho = a$ verschwinden

$$A_0^{0,n} J_0(k_t^{0,n} a) e^{-j k_z^{0,n} z} = 0$$

- E_z ist tangential zu Hohlleiterwänden und muss daher bei $\rho=a$ verschwinden

$$E_z^{0,n}(\rho=a,z) = \underbrace{A_0^{0,n}}_{\text{konstante Amplitude} \neq 0} \underbrace{J_0\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right)}_{\text{Phasenänderung in } z\text{-Ausbreitung}} e^{-j k_z^{0,n} z} \stackrel{!}{=} 0$$

konstante
Amplitude $\neq 0$

Phasenänderung in z -Ausbreitung
 $|e^{-j k_z z}| = 1 \neq 0$ für alle z
Daher wird dieser Teil auch nicht zu 0 bei $\rho=a$

- Es verbleibt daher $J_0\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) \stackrel{!}{=} 0$
- Nes ist für alle Nullstellen von der Besselfunktion erfüllt

$$k_t^{0,n} a = j_{0,n} \quad \text{bzw.} \quad k_t^{0,n} = \frac{j_{0,n}}{a}$$

e) Geben Sie möglichst weit vereinfachte Ausdrücke für die nicht verschwindenden Feldkomponenten aus b) an.

$$\begin{aligned} E_z^{0,n}(\rho,z) &= A_0^{0,n} J_0\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) e^{-j k_z^{0,n} z} \\ E_\rho^{0,n}(\rho,z) &= -\frac{k_z^{0,n}}{j(k_t^{0,n})^2} \frac{\partial E_z^{0,n}(\rho,z)}{\partial \rho} \\ &= -j \frac{k_z^{0,n} a}{j_{0,n}} A_0^{0,n} J_0'\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) e^{-j k_z^{0,n} z} \\ H_\varphi^{0,n}(\rho,z) &= -\frac{\omega \epsilon}{j(k_t^{0,n})^2} \frac{\partial E_z^{0,n}(\rho,z)}{\partial \rho} \\ &= -j \frac{\omega \epsilon a}{j_{0,n}} A_0^{0,n} J_0'\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) e^{-j k_z^{0,n} z} \end{aligned}$$

Achtung Kettenregel

Mithilfe dieses Ansatzes möchten wir nun das magnetische Feld der elektromagnetischen Welle ermitteln, die durch die Kreisscheibe in $z=0$ im Hohlleiter angeregt wird. Dafür setzen wir mit $i \in \{0, z\}$ an, dass (die Gewichtung erfolgt durch die Koeffizienten $A_0^{0,n}$)

$$E_i(\rho, z) = \sum_n E_i^{0,n}(\rho, z) \quad \text{bzw.} \quad H_\varphi(\rho, z) = \sum_n H_\varphi^{0,n}(\rho, z).$$

Mithilfe dieses Ansatzes soll nun das magnetische Feld der resultierenden elektromagnetischen Welle im Rundhohlleiter bestimmt werden. Aufgrund der Anregung durch die Kreisscheibe muss in der Ebene $z=0$ gelten, dass

$$E_\rho(\rho, z=0) = \begin{cases} E_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \stackrel{!}{=} \sum_n E_\rho^{0,n}(\rho, z=0). \quad (1)$$

Wir schauen $E_\rho^{0,n}$ an da in

f) Ermitteln Sie die Koeffizienten $A_0^{0,n}$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: die Kreisscheibe in $z=0$ nur ein E_ρ -Feld besitzt

i) Setzen Sie den in e) erhaltenen Ausdruck für $E_\rho^{0,n}$ in die Bedingung (1) ein.

ii) Multiplizieren Sie auf beiden Seiten mit $\rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a} \rho\right)$ und integrieren Sie anschließend von $\rho=0$ bis $\rho=a$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$ gilt und verwenden Sie die folgende Beziehung in der $\delta_{\ell,n}$ das Kronecker-Delta bezeichnet:

$$\int_0^a \rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a} \rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) d\rho = \delta_{\ell,n} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} = \begin{cases} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} & \ell = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- In den vorherigen Aufgabenteilen haben wir uns angeschaut wie

- das Feld der Anregung bei $z=0$ aussieht
- wie eine potentielle erlaubte (zylindersymmetrische) Mode aussieht

- Wir wissen aus den vorherigen Vorlesungen, dass nicht nur einzelne Mode angeregt werden muss, sondern dass auch viele Moden gleichzeitig angeregt werden können. Wir beschreiben daher nun die Gesamtheit aller Moden als Superposition mittels der Summation.
Die Gewichtung der einzelnen Moden (je besser die Mode mit ihrem Feld der Anregung ähnelt, desto höher die Gewichtung) können wir mit den Amplituden $A_0^{0,n}$ festlegen.

$$E_\rho^{0,n} \text{ einsetzen} \quad \begin{cases} E_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = -j a \sum_n A_0^{0,n} \frac{k_z^{0,n}}{j_{0,n}} J_0'\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right)$$

Da wir die Moden & Anregung in $z=0$ anschauen, gilt $e^{j k_z z} = e^{j k_z 0} = 1$

- Ersetzen der Ableitung der Besselfunktion $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$\begin{cases} E_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = j a \sum_n A_0^{0,n} \frac{k_z^{0,n}}{j_{0,n}} J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right)$$

- Orthogonalität der Besselfunktionen nutzen um so Koeffizienten zu bestimmen
→ Beachte, genau dasselbe machen wir auch bei der Fourierreihe / Fouriertransformation

- Multiplikation mit $\rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a} \rho\right)$ und Integration von $\rho=0$ bis $\rho=a$

$$\int_0^a \rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a} \rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) d\rho = \delta_{\ell,n} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2}$$

- Multiplikation mit $\rho J_1\left(\frac{j\omega e}{a}\rho\right)$ und Integration von $\rho=0$ bis $\rho=a$

$$\int_0^a E_0 \frac{a}{\rho} \rho J_1\left(\frac{j\omega e}{a}\rho\right) d\rho = j a \sum_n \frac{A_0^{an}}{A_0} \frac{k_z^{an}}{j_{0n}} \int_0^a J_1\left(\frac{j\omega n}{a}\rho\right) \rho J_1\left(\frac{j\omega e}{a}\rho\right) d\rho$$

da Feld (Anregung) nur in $b < \rho < a$

$$\Leftrightarrow E_0 \int_b^a J_1\left(\frac{j\omega e}{a}\rho\right) d\rho = j \sum_n \frac{A_0^{an}}{A_0} \frac{k_z^{an}}{j_{0n}} \underbrace{\int_0^a J_1\left(\frac{j\omega n}{a}\rho\right) J_1\left(\frac{j\omega e}{a}\rho\right) \rho d\rho}_{\text{Hinweis: } = \delta_{en} \frac{j_1^2(j\omega e)}{2} = \begin{cases} \frac{j_1^2(j\omega e)}{2} & n=e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

da festes $e \rightarrow n=e$ nur möglich

$$j \frac{A_0^{0e}}{A_0} \frac{k_z^{0e}}{j_{0e}} \frac{j_1^2(j\omega e)}{2}$$

- Linke Seite integrieren (beachte Kettenregel)

$$E_0 \int_b^a J_1\left(\frac{j\omega e}{a}\rho\right) d\rho = E_0 \left[-\frac{a}{j\omega e} J_0\left(\frac{j\omega e}{a}\rho\right) \right]_{\rho=a}^b$$

$$= -\frac{a}{j\omega e} E_0 \left[J_0\left(\frac{j\omega e}{a}b\right) - \underbrace{J_0\left(\frac{j\omega e}{a}a\right)}_{=0} \right]$$

$$= -\frac{a}{j\omega e} E_0 J_0\left(\frac{j\omega e}{a}b\right)$$

- Beide Seiten einsetzen

$$-\frac{a}{j\omega e} E_0 J_0\left(\frac{j\omega e}{a}b\right) = j \frac{A_0^{0e}}{A_0} \frac{k_z^{0e}}{j_{0e}} \frac{j_1^2(j\omega e)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A_0^{0e}}{A_0} = j \frac{2a}{k_z^{0e}} E_0 \frac{J_0\left(\frac{j\omega e}{a}b\right)}{j_1^2(j\omega e)}$$

g) Drücken Sie H_φ mithilfe der Koeffizienten $A_0^{0,n}$ aus.

- Abschreiben Aufgabenteil e)

$$H_\varphi^{0n} = j \frac{\omega \epsilon a}{j_{0n}} \frac{A_0^{0n}}{A_0} J_1\left(\frac{j\omega n}{a}\rho\right) e^{-j k_z^{0n} z}$$

$$= -E_0 \frac{2\omega \epsilon a^2}{j_{0n} k_z^{0n}} \frac{J_0\left(\frac{j\omega n}{a}b\right)}{j_1^2(j\omega n)} J_1\left(\frac{j\omega n}{a}\rho\right) e^{-j k_z^{0n} z}$$

- H_φ ist Summe aller H_φ^{0n} -Moden

$$H_\varphi = \sum_n H_\varphi^{0n}$$

$$= -2E_0 \omega \epsilon a^2 \sum_n \frac{J_0\left(\frac{j\omega n}{a}b\right)}{j_{0n} k_z^{0n}} \frac{J_1\left(\frac{j\omega n}{a}\rho\right)}{j_1^2(j\omega n)} e^{-j k_z^{0n} z}$$

h) Optional: Welche Bedingung muss für die Betriebsfrequenz des Rundhohlleiters gelten, damit ausschließlich die Fundamentalmode angeregt wird?

- Fundamentalmode der E-Wellen ist $E^{01} \rightarrow$ breitet sich erst aus ab $k_z \geq \frac{j\omega a}{c}$
- Mit $k^2 = k_t^2 + k_z^2$ (Pythagoras) und $k_z \geq 0$ (damit Welle reellwertiges $k_z \rightarrow e^{-j k_z z}$ hat und sich in z-Richtung ausbreiten kann)

$$k^2 \geq k_t^2 = \left(\frac{j\omega a}{c}\right)^2$$

↑ Grenze, dass Grundmode gerade so ausbreitet ist $k_t = \frac{j\omega a}{c}$ und Grenze, dass diese Mode sich auch in z-Richtung ausbreitet ist $k_z = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \geq \frac{j\omega a}{c}$$

$$\Leftrightarrow f \geq \frac{\sqrt{0.1} c_0}{2\pi a}$$

- Achtung: Sobald $k_z = \frac{\omega}{a}$, wird auch die zweite Mode zusätzlich angeregt.

- Hier: Auch die zyklensymmetrische Anregung der Moden gilt $m=0$.
Nun ist erst E_{02} die nächsthöhere Mode.

- Wir fordern daher als obere Grenze für die Betriebsfrequenz

$$k^2 < k_t^2 = \left(\frac{\omega_t}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f < \frac{\sqrt{0.2} c_0}{2\pi a}$$

- Mit $\frac{\sqrt{0.1} c_0}{2\pi a} \leq f < \frac{\sqrt{0.2} c_0}{2\pi a}$ regen wir also nur die Fundamentalmode an