

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 11

Abgabe bis zum 30.01.2023 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 18:

Gegeben sei ein zylindersymmetrischer Rundhohlleiter mit dem Radius a . Das Innere des Wellenleiter sei vakuumiert und die Wand ideal leitend $\kappa \rightarrow \infty$. In der Ebene $z = 0$ befinde sich nun eine ebenfalls ideal leitende Kreisscheibe infinitesimaler Dicke mit dem Radius b , wie in Abbildung 1 dargestellt. Zwischen dieser Kreisscheibe und der Hohlleiterwand liege eine Wechselspannung an, wodurch in

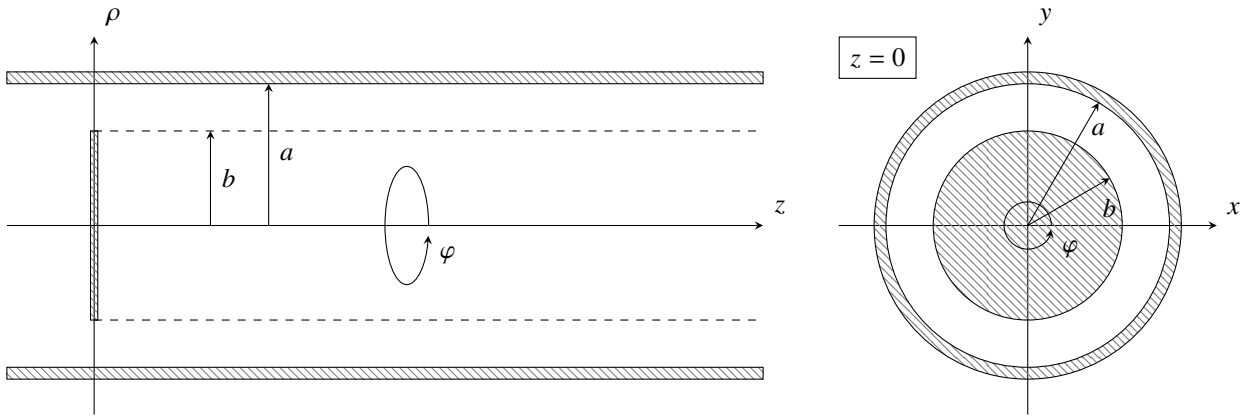


Abbildung 1: Links: Längsschnitt. Rechts: Querschnitt.

$z = 0$ ein elektrisches Feld mit der komplexen Amplitude

$$\underline{\mathbf{E}}^s(\rho, \varphi, z = 0) = \underline{E}_\rho^s(\rho, z = 0) \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho \begin{cases} E_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

anliege, wobei wir die harmonische Zeitabhängigkeit $\exp(j\omega t)$ nicht explizit anführen. Dieses elektrische Feld regt elektromagnetische Wellen im Rundhohlleiter an, die sich in positive z -Richtung ausbreiten. Bemerkung: In Rundhohlleitern können sich keine TEM-Wellen ausbreiten, lediglich E- und H-Wellen sind ausbreitungsfähig.

- a) Weisen Sie mithilfe des Induktionsgesetzes nach, dass das rotationssymmetrische elektrische Feld an der Kreisscheibe ein magnetisches Feld der Form $\underline{\mathbf{H}} = \underline{H}_\varphi(\rho, z) \mathbf{e}_\varphi$ zur Folge hat.

Ges: Aussagen über die tangentialen/normalen E- bzw. H-Feldkomponenten am idealen Leiter

Geg: Grenzflächenbeziehungen

In der Ebene $z = 0$ gilt $\underline{\mathbf{E}}(\rho, \varphi, z = 0) = \underline{E}_\rho(\rho, z = 0) \mathbf{e}_\rho$ und damit insbesondere $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, weshalb das Induktionsgesetz auf folgenden Ausdruck führt

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \underline{E}_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_\rho}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \underline{E}_\rho}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}.$$

Folglich kann das magnetische Feld an der Kreisscheibe ausschließlich eine φ -Komponente besitzen.

- b) Analog zu der Anregung werden auch die ausbreitungsfähigen Wellen im Hohlleiter $\underline{E}_\rho$ - und $\underline{H}_\varphi$ -Komponenten aufweisen. Begründen Sie anhand der folgenden Beziehungen aus der Vorlesung, dass es sich bei den im Rundhohlleiter angeregten, zylindersymmetrischen Wellen um E-Wellen handeln muss. Stellen Sie zudem die nicht verschwindenden Komponenten von $\underline{E}$ und $\underline{H}$ in Abhängigkeit von $\underline{E}_z$ dar.

Hinweis: Wir nehmen an, dass in unserem Fall alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Felds unabhängig von φ sind. Daher gilt stets $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

$$\begin{aligned}\underline{E}_\rho &= -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} \right) & \underline{E}_\varphi &= -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \right) \\ \underline{H}_\rho &= -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} - \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} \right) & \underline{H}_\varphi &= -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} + \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \right).\end{aligned}$$

Ges: Begründung, dass die Kreisscheibe ausschließlich E-Wellen anregt und Ausdrücke für nicht verschwindende Feldkomponenten

Geg: Zylindersymmetrie $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $\underline{E}_\rho$ und $\underline{H}_\varphi$ müssen von null verschieden sein.

Setzen wir $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ in die Gleichungen für $\underline{E}_\rho$, $\underline{E}_\varphi$, $\underline{H}_\rho$ und $\underline{H}_\varphi$ ein, erhalten wir mit $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2$ die vereinfachten Ausdrücke für die Feldkomponenten.

$$\begin{aligned}\underline{E}_\rho &= -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} & \underline{E}_\varphi &= j \frac{\omega \mu}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \\ \underline{H}_\rho &= -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} & \underline{H}_\varphi &= -j \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho}.\end{aligned}$$

In Aufgabenteil a) haben wir gezeigt, dass an der Kreisscheibe in $z = 0$ das elektrische Feld eine ρ - und das magnetische Feld eine φ -Komponente aufweist. Die Felder der Wellen, die durch das Feld an der Kreisscheibe angeregt werden, müssen dementsprechend ebenfalls eine nicht verschwindende $\underline{E}_\rho$ - bzw. $\underline{H}_\varphi$ -Komponente besitzen. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn $\underline{E}_z \neq 0$, also E-Wellen im Rundhohlleiter angeregt werden. Es gilt folglich

$$\begin{aligned}\underline{E}_\rho &= -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} & \underline{E}_\varphi &= 0 \\ \underline{H}_\rho &= 0 & \underline{H}_\varphi &= -j \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho}.\end{aligned}$$

Für die E-Wellen im Rundhohlleiter wählen wir mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ den folgenden Ansatz

$$\underline{E}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z) = A_0^{m,n} J_m(k_t^{m,n} \rho) \exp(j m \varphi) \exp(-j k_z^{m,n} z) .$$

- c) Begründen Sie, dass für die Modenzahl $m = 0$ gelten muss, um die Zylindersymmetrie der Lösungen zu gewährleisten.

Ges: Begründung, dass Zylindersymmetrie nur für $m = 0$ gewährleistet.

Geg: Ansatz für E-Wellen

Sei zunächst $m \in \mathbb{N}_0$. Der Ansatz für $\underline{E}_z^{m,n}$ ist genau dann zylindersymmetrisch, wenn $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{E}_z^{m,n} = 0$. Daher setzen wir an, dass

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{E}_z^{m,n} = A_0^{m,n} J_m(k_t^{m,n} \rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} (\exp(j m \varphi)) \exp(-j k_z^{m,n} z) = 0 ,$$

woraus folgt, dass

$$j m \exp(j m \varphi) = 0 .$$

Da der Exponentialterm immer von null verschieden ist, muss damit $m = 0$ gelten und die $\underline{E}_z$ -Komponente hat die Form

$$\underline{E}_z^{0,n}(\rho, z) = A_0^{0,n} J_0(k_t^{0,n} \rho) \exp(-j k_z^{0,n} z) .$$

- d) Welche Bedingung muss die transversale Wellenzahl $k_t^{m,n}$ erfüllen, um die Randbedingungen des elektrischen Felds an den Hohlleiterwänden zu erfüllen?

Ges: Bedingung für transversale Wellenzahl

Geg: Randbedingungen des elektrischen Felds

Die z -Komponente des elektrischen Felds verläuft tangential zu den Hohlleiterwänden und muss daher an diesen verschwinden. Wir erhalten also die Bedingung

$$\underline{E}_z^{0,n}(\rho = a, z) = A_0^{0,n} J_0(k_t^{0,n} a) \exp(-j k_z^{0,n} z) = 0 ,$$

aus welcher folgt, dass

$$J_0(k_t^{0,n} a) = 0 .$$

Dementsprechend muss

$$k_t^{0,n} a = j_{0,n} \quad \text{bzw.} \quad k_t^{0,n} = \frac{j_{0,n}}{a}$$

sein, wobei $j_{0,n}$ die n -te Nullstelle der Besselfunktion J_0 bezeichnet (es gilt $n \in \mathbb{N}$).

- e) Geben Sie möglichst weit vereinfachte Ausdrücke für die nicht verschwindenden Feldkomponenten aus b) an.

Ges: Ausdrücke für $\underline{E}_\rho^{0,n}$ und $\underline{H}_\varphi^{0,n}$

Geg: E-Welle mit $\underline{E}_z^{0,n}$ wie in c) gegeben

Beide gesuchten Komponenten sind proportional zu $\frac{\partial E_z^{0,n}}{\partial \rho}$, weshalb wir die Komponenten mit (Achtung, Kettenregel)

$$\frac{\partial E_z^{0,n}}{\partial \rho} = A_0^{0,n} k_t^{0,n} J'_0(k_t^{0,n} \rho) \exp(-j k_z^{0,n} z)$$

direkt schreiben können als

$$\begin{aligned} E_\rho^{0,n} &= -j \frac{k_z^{0,n} a}{j_{0,n}} A_0^{0,n} J'_0\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) \exp(-j k_z^{0,n} z) \\ H_\varphi^{0,n} &= -j \frac{\omega \varepsilon a}{j_{0,n}} A_0^{0,n} J'_0\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) \exp(-j k_z^{0,n} z) . \end{aligned}$$

Mithilfe dieses Ansatzes möchten wir nun das magnetische Feld der elektromagnetischen Welle ermitteln, die durch die Kreisscheibe in $z = 0$ im Hohlleiter angeregt wird. Dafür setzen wir mit $i \in \{\rho, z\}$ an, dass (die Gewichtung erfolgt durch die Koeffizienten $A_0^{0,n}$)

$$\underline{E}_i(\rho, z) = \sum_n \underline{E}_i^{0,n}(\rho, z) \quad \text{bzw.} \quad \underline{H}_\varphi(\rho, z) = \sum_n \underline{H}_\varphi^{0,n}(\rho, z) .$$

Mithilfe dieses Ansatzes soll nun das magnetische Feld der resultierenden elektromagnetischen Welle im Rundhohlleiter bestimmt werden. Aufgrund der Anregung durch die Kreisscheibe muss in der Ebene $z = 0$ gelten, dass

$$\underline{E}_\rho(\rho, z = 0) = \begin{cases} \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \stackrel{!}{=} \sum_n \underline{E}_\rho^{0,n}(\rho, z = 0) . \quad (1)$$

f) Ermitteln Sie die Koeffizienten $A_0^{0,n}$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Setzen Sie den in e) erhaltenen Ausdruck für $\underline{E}_\rho^{0,n}$ in die Bedingung (1) ein.
- Multiplizieren Sie auf beiden Seiten mit $\rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a} \rho\right)$ und integrieren Sie anschließend von $\rho = 0$ bis $\rho = a$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$ gilt und verwenden Sie die folgende Beziehung in der $\delta_{\ell,n}$ das Kronecker-Delta bezeichnet:

$$\int_0^a \rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a} \rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) d\rho = \delta_{\ell,n} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} = \begin{cases} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} & \ell = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ges: Koeffizienten $A_0^{0,n}$

Geg: Ansatz aus (1), Orthogonalitätsbeziehung der Besselfunktion $J_1, J'_0(x) = -J_1(x)$.

Einsetzen in den Ansatz (1) resultiert in

$$\begin{cases} \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = -j a \sum_n A_0^{0,n} \frac{k_z^{0,n}}{j_{0,n}} J'_0\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) .$$

Ersetzen wir nun die Ableitung der Besselfunktion gemäß $J'_0(x) = -J_1(x)$

$$\begin{cases} \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = j a \sum_n A_0^{0,n} \frac{k_z^{0,n}}{j_{0,n}} J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho\right) ,$$

können wir im nächsten Schritt die Orthogonalität der Besselfunktionen ausnutzen¹ und so die Koeffizienten ermitteln. Dazu multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $\rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right)$ und integrieren anschließend von $\rho = 0$ bis $\rho = a$. Da die Funktion auf der linken Seite nur für $b < \rho < a$ von null verschieden ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_b^a \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) d\rho &= j a \sum_n \underline{A}_0^{0,n} \frac{k_z^{0,n}}{j_{0,n}} \int_0^a J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a}\rho\right) \rho J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) d\rho \\ \Leftrightarrow \underline{E}_0 \int_b^a J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) d\rho &= j \sum_n \underline{A}_0^{0,n} \frac{k_z^{0,n}}{j_{0,n}} \int_0^a J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a}\rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) \rho d\rho. \quad (2) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun zunächst die rechte Seite. Das Integral können wir mithilfe des Hinweises schreiben als

$$\int_0^a J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a}\rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) \rho d\rho = \delta_{\ell,n} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} = \begin{cases} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2} & \ell = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da ℓ zwar frei wählbar aber fest ist, reduziert sich für gegebenes ℓ die Summe über alle n auf den Summanden mit $n = \ell$. Die rechte Seite von (2) vereinfacht sich folglich gemäß

$$j \sum_n \underline{A}_0^{0,n} \frac{k_z^{0,n}}{j_{0,n}} \int_0^a J_1\left(\frac{j_{0,n}}{a}\rho\right) J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) \rho d\rho = j \underline{A}_0^{0,\ell} \frac{k_z^{0,\ell}}{j_{0,\ell}} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2}.$$

Lösen wir nun auch mithilfe der Kettenregel und $J'_0(x) = -J_1(x)$ das Integral auf der linken Seite von (2)

$$\begin{aligned} \underline{E}_0 \int_b^a J_1\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) d\rho &= \underline{E}_0 \left[-\frac{a}{j_{0,\ell}} J_0\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}\rho\right) \right]_{\rho=b}^{\rho=a} \\ &= -\frac{a}{j_{0,\ell}} \underline{E}_0 \left[J_0\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}b\right) - J_0\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}a\right) \right] \\ &= -\frac{a}{j_{0,\ell}} \underline{E}_0 J_0\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}b\right), \end{aligned}$$

und setzen in (2) ein

$$-\frac{a}{j_{0,\ell}} \underline{E}_0 J_0\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}b\right) = j \underline{A}_0^{0,\ell} \frac{k_z^{0,\ell}}{j_{0,\ell}} \frac{J_1^2(j_{0,\ell})}{2},$$

erhalten wir die gesuchten Koeffizienten

$$\underline{A}_0^{0,\ell} = j \underline{E}_0 \frac{2a}{k_z^{0,\ell}} \frac{J_0\left(\frac{j_{0,\ell}}{a}b\right)}{J_1^2(j_{0,\ell})}.$$

Bemerkung: Da im Allgemeinen keiner der Koeffizienten $\underline{A}_0^{0,\ell}$ identisch null ist, würde die Anregung bei geeigneter Dimensionierung des Hohlleiters unendlich viele E-Wellen anregen.

¹Wichtig: Auch wenn es nicht explizit erwähnt wird gilt $\ell \in \mathbb{N}_0$.

g) Drücken Sie $\underline{H}_\varphi$ mithilfe der Koeffizienten $\underline{A}_0^{0,n}$ aus.

Ges: $\underline{H}_\varphi$

Geg: Koeffizienten aus Teil f)

Einsetzen in das Ergebnis von Aufgabenteil e) liefert mit $\ell = n$

$$\begin{aligned}\underline{H}_\varphi^{0,n} &= j \frac{\omega \underline{\varepsilon} a}{j_{0,n}} \underline{A}_0^{0,n} J_1 \left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho \right) \exp \left(-j \underline{k}_z^{0,n} z \right) \\ &= -\underline{E}_0 \frac{2\omega \underline{\varepsilon} a^2}{j_{0,n} k_z^{0,n}} \frac{J_0 \left(\frac{j_{0,n}}{a} b \right)}{J_1^2(j_{0,n})} J_1 \left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho \right) \exp \left(-j \underline{k}_z^{0,n} z \right).\end{aligned}$$

Da sich $\underline{H}_\varphi$ aus der Summe der $\underline{H}_\varphi^{0,n}$ ergibt, erhalten wir schließlich

$$\underline{H}_\varphi = -2\underline{E}_0 \omega \underline{\varepsilon} a^2 \sum_n \frac{J_0 \left(\frac{j_{0,n}}{a} b \right)}{j_{0,n} k_z^{0,n}} \frac{J_1 \left(\frac{j_{0,n}}{a} \rho \right)}{J_1^2(j_{0,n})} \exp \left(-j \underline{k}_z^{0,n} z \right).$$

h) *Optional:* Welche Bedingung muss für die Betriebsfrequenz des Rundhohlleiters gelten, damit ausschließlich die Fundamentalmode angeregt wird?

Ges: Bedingung für Betriebsfrequenz des Hohlleiters, damit ausschließlich die Fundamentalmode angeregt wird.

Geg: E-Wellen

Die Fundamentalmode der E-Wellen ist die $E^{0,1}$ -Mode, welche sich erst bei einer transversalen Ausbreitungskonstante $\underline{k}_t$ größer gleich $\frac{j_{0,1}}{a}$ ausbreiten kann. Dementsprechend erhalten wir mit $\underline{k}^2 = \underline{k}_z^2 + \underline{k}_t^2$ und $\underline{k}_z^2 \geq 0$ die Bedingung

$$\underline{k}^2 \geq \underline{k}_t^2 = \left(\frac{j_{0,1}}{a} \right)^2 \iff \frac{\omega}{c_0} \geq \frac{j_{0,1}}{a} \iff f \geq \frac{j_{0,1} c_0}{2\pi a}.$$

Sobald $\underline{k}_t$ allerdings größer gleich $\frac{j_{1,1}}{a}$ wird, werden im Allgemeinen auch höhere Moden angeregt. Aufgrund der symmetrischen Anregung können wir jedoch ausschließlich Moden mit $m = 0$ anregen, weshalb die nächsthöhere Mode die $E^{0,2}$ -Mode ist. Wir fordern daher außerdem, dass

$$\underline{k}^2 < \underline{k}_t^2 = \left(\frac{j_{0,2}}{a} \right)^2 \iff f < \frac{j_{0,2} c_0}{2\pi a}.$$

Folglich wird nur für $\frac{j_{0,1} c_0}{2\pi a} \leq f < \frac{j_{0,2} c_0}{2\pi a}$ ausschließlich die Fundamentalmode angeregt.

Was Sie bei der Bearbeitung dieses Übungsblatts gelernt haben sollten

- Wie verschiedene Rundhohlleitermoden mittels der Besselfunktion $J_m(\rho)$ beschrieben werden können.
- Weshalb sich die Lösungen der Wellengleichungen gegenüber dem Rechteckhohlleiter unterscheiden.
- Wieso die Grenzfrequenzen der E- und H-Wellen im Rundhohlleiter verschieden sind.
- Wie wir vorgehen können, um die durch eine gegebene Anregung hervorgerufenen Moden zu bestimmen.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu