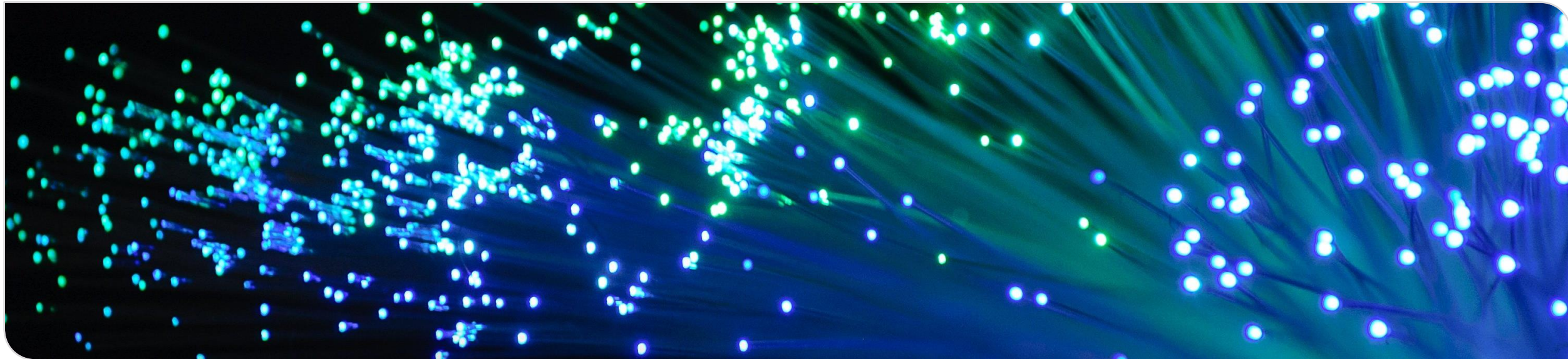


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 12

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Organisatorisches

- Termine des Lerncafé in der vorlesungsfreien Zeit stehen fest
- Besprechung der Inhalte von Vorlesung und Übung mit Prof. Randel und den Übungsleitern in entspannter Atmosphäre
- Termin 1: **21. Februar 15:30 – 16:30**
- Termin 2: **13. März 15:30 – 16:30**

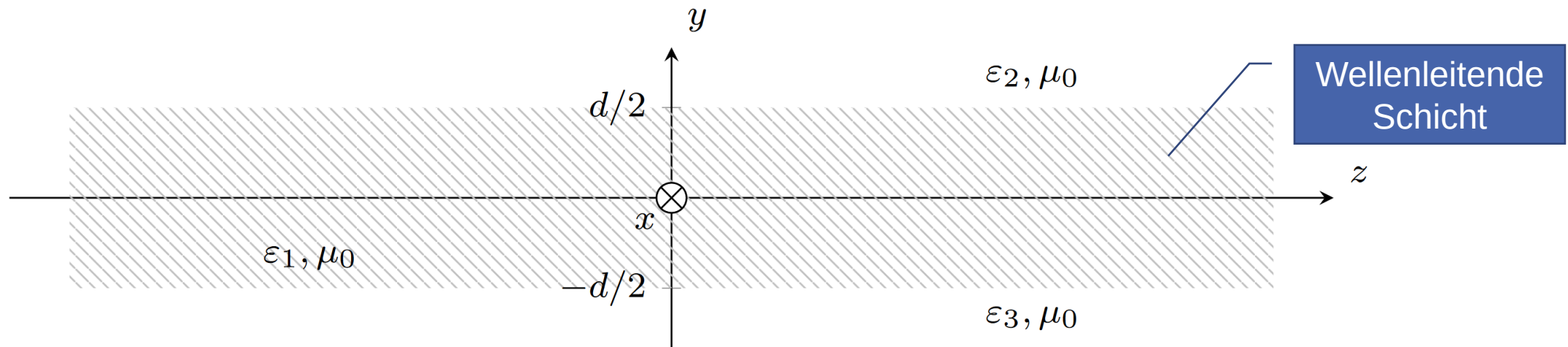
2022			2023		
Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März
1 Sa	1 Di Allerheiligen	1 Do	1 So Neujahr	1 Mi VL13	1 Mi
2 So	2 Mi VL02	2 Fr	2 Mo 1	2 Do	2 Do
3 Mo Tag der Dt. Einheit	3 Do	3 Sa	3 Di	3 Fr	3 Fr
4 Di 40	4 Fr	4 So	4 Mi	4 Sa	4 Sa
5 Mi	5 Sa	5 Mo UE05 49	5 Do	5 So	5 So
6 Do	6 So	6 Di	6 Fr Heilige Drei Könige	6 Mo UE12 8	6 Mo 10
7 Fr	7 Mo UE01 45	7 Mi VL07	7 Sa	7 Di	7 Di
8 Sa	8 Di	8 Do	8 So	8 Mi VL14	8 Mi
9 So	9 Mi VL03	9 Fr	9 Mo UE08 2	9 Do	9 Do
10 Mo 41	10 Do	10 Sa	10 Di	10 Fr	10 Fr
11 Di	11 Fr	11 So	11 Mi VL10	11 Sa	11 Sa
12 Mi	12 Sa	12 Mo UE06 50	12 Do	12 So	12 So
13 Do	13 So	13 Di	13 Fr	13 Mo UE13 7	13 Mo 11
14 Fr	14 Mo UE02 46	14 Mi VL08	14 Sa	14 Di	14 Di
15 Sa	15 Di	15 Do	15 So	15 Mi VL15	15 Mi
16 So	16 Mi VL04	16 Fr	16 Mo UE09 3	16 Do	16 Do Klausur
17 Mo 42	17 Do	17 Sa	17 Di	17 Fr	17 Fr
18 Di	18 Fr	18 So	18 Mi VL11	18 Sa	18 Sa
19 Mi	19 Sa	19 Mo UE07 51	19 Do	19 So	19 So
20 Do	20 So	20 Di	20 Fr	20 Mo Rosenmontag 8	20 Mo 12
21 Fr	21 Mo UE03 47	21 Mi VL09	21 Sa	21 Di	21 Di
22 Sa	22 Di	22 Do	22 So	22 Mi	22 Mi
23 So	23 Mi VL05	23 Fr	23 Mo UE10 4	23 Do	23 Do
24 Mo 43	24 Do	24 Sa Heilabend	24 Di	24 Fr	24 Fr
25 Di	25 Fr	25 So 1. Weihnachtstag	25 Mi VL12	25 Sa	25 Sa
26 Mi VL01	26 Sa	26 Mo 2. Weihnachtstag	26 Do	26 So	26 So Beginn der Sommerzeit
27 Do	27 So 1. Advent	27 Di 52	27 Fr	27 Mo 9	27 Mo 13
28 Fr	28 Mo UE04 48	28 Mi	28 Sa	28 Di	28 Di
29 Sa	29 Di	29 Do	29 So		29 Mi
30 So Ende der Sommerzeit	30 Mi VL06	30 Fr	30 Mo UE11 5		30 Do
31 Mo UE00		31 Sa Silvester	31 Di		31 Fr

Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 6	A10, A11	Beugung und Interferenz
Übung 7	A12	Gaußscher Strahl
Übung 8	A13, A14	Optische Systeme
Übung 9	A15, A16	Parallelplattenleiter
Übung 10	A17	Rechteckhohlleiter
Übung 11	A18	Rundhohlleiter
Übung 12	A19, A20	Dielektrischer Schichtwellenleiter

Dielektrischer Schichtwellenleiter

- Drei in der xz -Ebene unendlich ausgedehnte dielektrische Schichten
- Brechzahl $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ im Kern **größer** als in den umliegenden Schichten
- $\Rightarrow$ Totalreflexion ermöglicht Wellenführung



Motivation



Quelle: <https://www.youtube.com/watch?v=29aTqLvRia8>

Die Wellenleiter auf
photonischen Chips
funktionieren nach
dem gleichen Prinzip
wie dielektrische
Schichtwellenleiter!

Silicon Photonics für Datenübertragung:
<https://www.youtube.com/watch?v=gsTI2qkWnp0>

Verhalten von EM-Wellen an Grenzschichten

- Dielektrische Medien **sind i.A. nicht feldfrei!**
- Dielektrika sind nichtleitend und nicht-magnetisch weshalb wir für die Leitfähigkeit $\kappa = 0$ und für die Permeabilität $\mu = \mu_0$ annehmen
- Aus den Grenzflächenbedingungen für die tangentialen und normalen EM-Feldkomponenten erhalten wir die folgenden Stetigkeitsbedingungen der Felder an der Grenzfläche der Dielektrika:

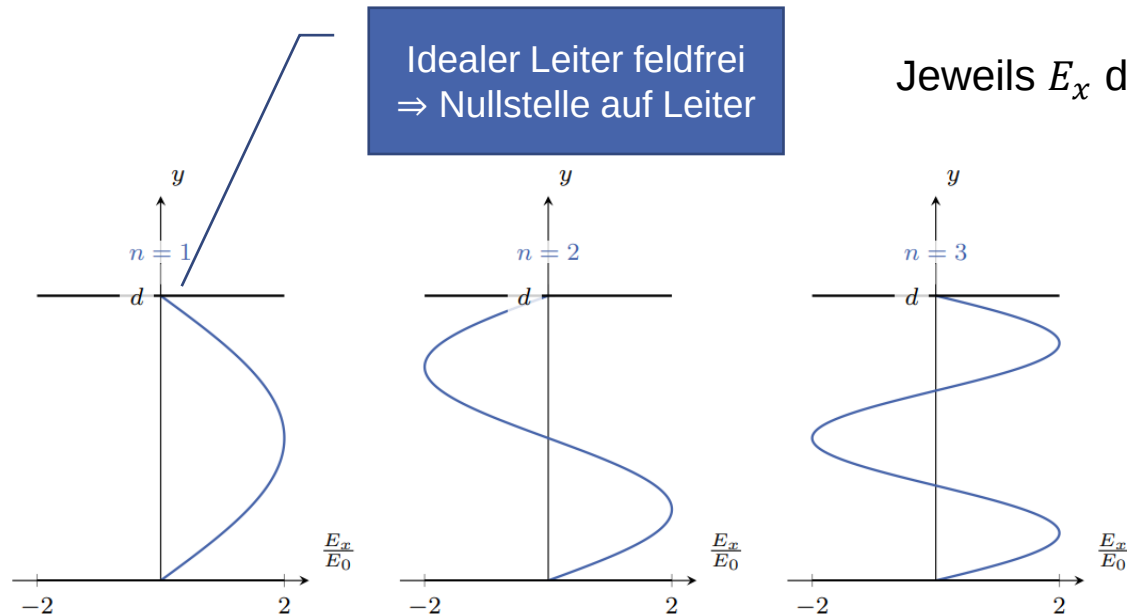
	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Tangential	$E_{t,1} - E_{t,2} = 0$	$H_{t,1} - H_{t,2} = 0$
Normal	$\varepsilon_1 E_{n,1} - \varepsilon_2 E_{n,2} = 0$	$H_{n,1} - H_{n,2} = 0$

Parallelplatten- vs. Schichtwellenleiter (I)

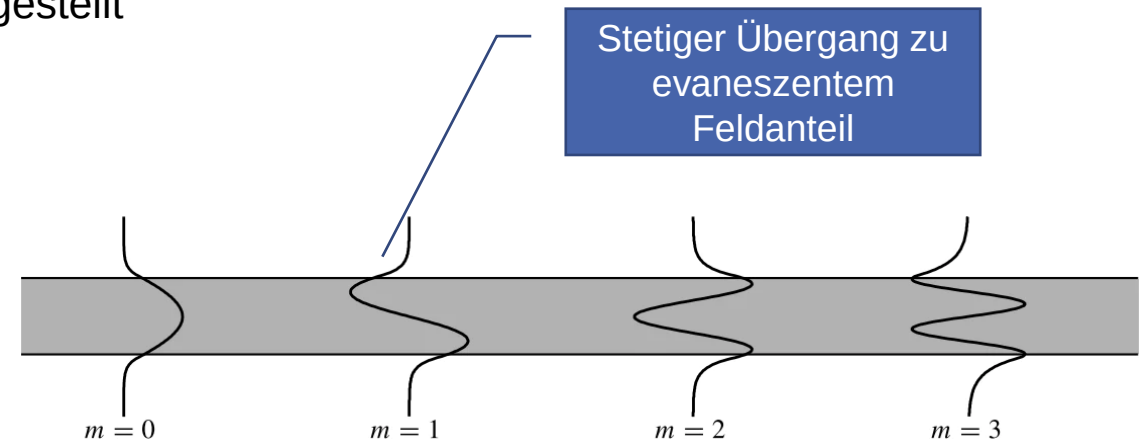
	Parallelplattenleiter	Dielektrischer Schichtwellenleiter
Materialien	Vakuum/Luft oder anderes Dielektrikum umgeben von metallischen Wänden	Schichtsystem aus dielektrischen Materialien, z.B. Siliziumdioxid (Quarz)
Grundprinzip	Reflexion der Welle an den metallischen Grenzflächen aufgrund der hohen (idealen) Leitfähigkeit des Metalls	Totalreflexion an den Materialgrenzen
Grenzflächenbedingungen	Randbedingungen	Stetigkeitsbedingungen
Phasensprung	Senkrechte Polarisation (TE): 180° (Vorzeichenwechsel) Parallele Polarisation (TM): 0°	Komplexe Transmissions- und Reflexionskoeffizienten → wellenleiterabhängige Phasensprünge
Wellenarten	TE- und TM-Moden sowie TEM-Mode	TE- und TM-Moden
Abschirmung	Felder dringen nicht in die metallische Außenhülle des Leiters ein → ideale Abschirmung	Evaneszente (exponentiell abklingende) Felder jenseits der Grenzfläche

Parallelplatten- vs. Schichtwellenleiter (II)

TE-Moden Parallelplattenleiter



TE-Moden Schichtwellenleiter



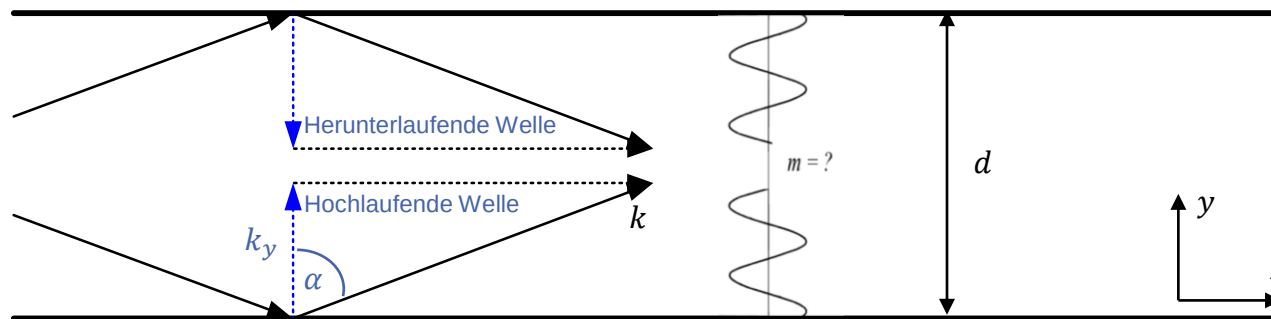
Bildquelle: <https://www.fiberoptics4sale.com/blogs/wave-optics/symmetric-slab-waveguides>

Selbstkonsistenzbedingung (I)

- Vgl. intuitive Erklärung zur Entstehung von transversal stehenden Wellen (Moden) im Parallelplattenleiter
- **Bedingung:** konstruktive Interferenz der auf Mediengrenzfläche einfallende & reflektierte Wellen
- Nur für bestimmte transversale Wellenzahlen erfüllt!
- Analoges Vorgehen für den dielektrischen Schichtwellenleiter, jedoch Berücksichtigung der mathematisch komplexeren Phasenverschiebung bei Totalreflexion $\varphi_{s,p}$ (polarisationsabhängig)
- Die Phasenverschiebung bei Totalreflexion $\varphi_{s,p}$ ergibt sich aus Argument des komplexen Reflexionsfaktors $\underline{r}_{s,p}$ (Herleitung siehe Vorlesung)
- Es kommt genau dann zu konstruktiver Interferenz, wenn die Phasendifferenz von einfallender und reflektierter Welle gerade ein Vielfaches von 2π beträgt
- In anderen Worten: Nach dem Hoch- und Runterlaufen muss die Welle sich selbst reproduzieren

Selbstkonsistenzbedingung (II)

- Die Phasenverschiebung bei Totalreflexion $\varphi_{s,p}$ ergibt sich aus Argument des komplexen Reflexionsfaktors $\underline{r}_{s,p}$ (Herleitung siehe Vorlesung)
- Es kommt genau dann zu konstruktiver Interferenz, wenn die Phasendifferenz von einfallender und reflektierter Welle gerade ein Vielfaches von 2π beträgt



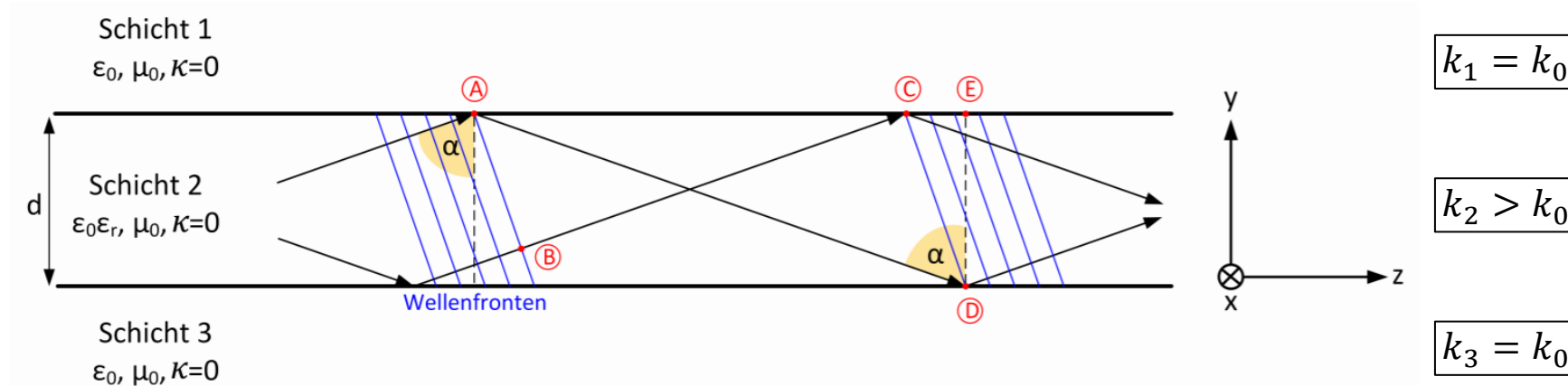
$$k_y d + \varphi_{s,p} = -k_y d - \varphi_{s,p} + m2\pi$$

$$2k_y d = m2\pi - 2\varphi_{s,p}$$

$$k_y d = m\pi - \varphi_{s,p}$$

$$\boxed{k \cos(\alpha) d = m\pi - \varphi_{s,p}}$$

Aufgabe 19 a)



- Die Selbstkonsistenzbedingung für k_y lässt sich auch aus einer geometrischen Überlegung zeigen.
- Da die Moden Eigenfunktionen des Wellenleiters darstellen, wird die Selbstkonsistenzbedingung auch als **Eigenwertgleichung des Wellenleiters** bezeichnet.
- Punkte, die zu einem Zeitpunkt auf einer Wellenfront liegen, müssen dies auch an einem späteren Zeitpunkt noch tun, selbst wenn sie zwischenzeitlich unterschiedliche Wegstrecken zurücklegen. Ihre Phase muss bis auf ein ganzzahliges Vielfaches m von 2π übereinstimmen:

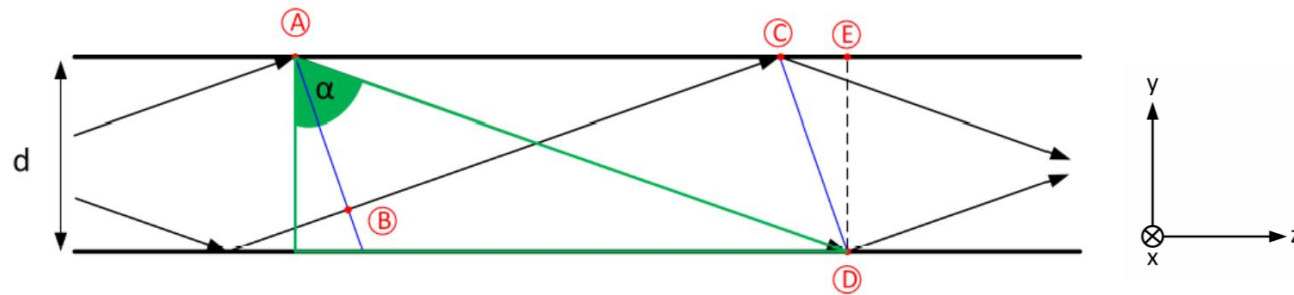
$$-2\varphi_{s,p} - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2$$

Phasensprünge bei Reflexion

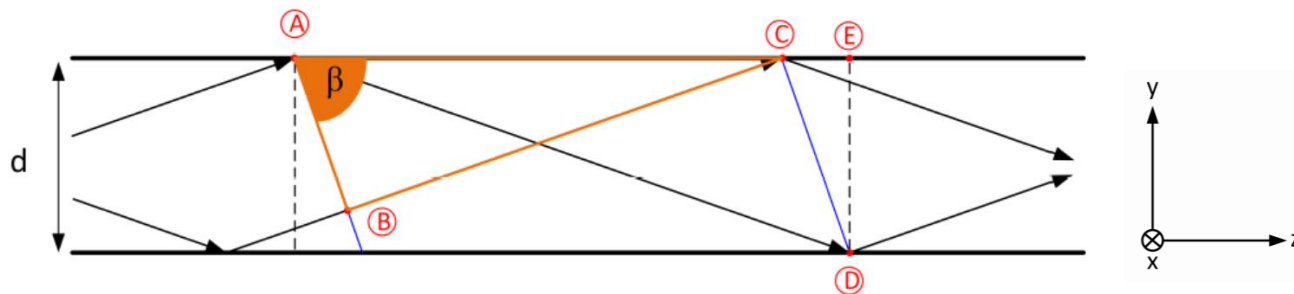
Entlang der Wege akkumulierte Phasendifferenz, da $e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$

Aufgabe 19 a)

■ Bestimmen von $\overline{AD}$



■ Bestimmen von $\overline{BC}$



$$-2\varphi_{s,p} - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{d}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{d}{\cos(\alpha)}$$

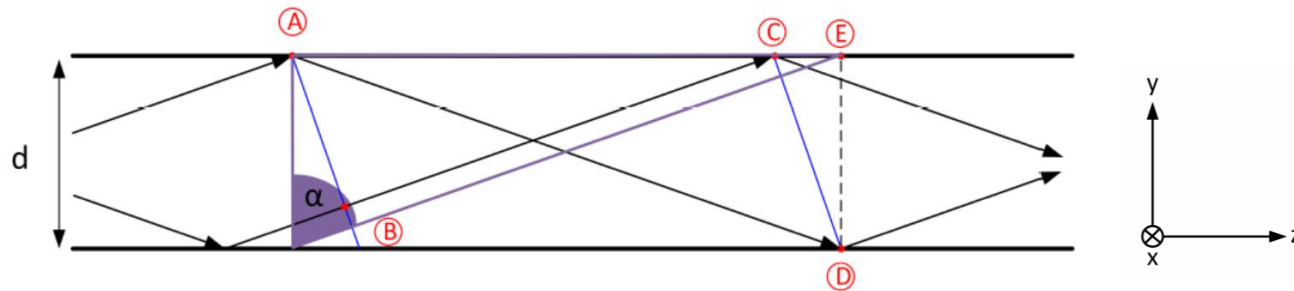
$$\sin(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{BC} = \sin(\beta) \overline{AC} = \sin(\beta) (\overline{AE} - \overline{CE}) = \sin(\alpha) (\overline{AE} - \overline{CE})$$

$\overline{AE}$ und $\overline{CE}$ sind noch unbekannt

Aufgabe 19 a)

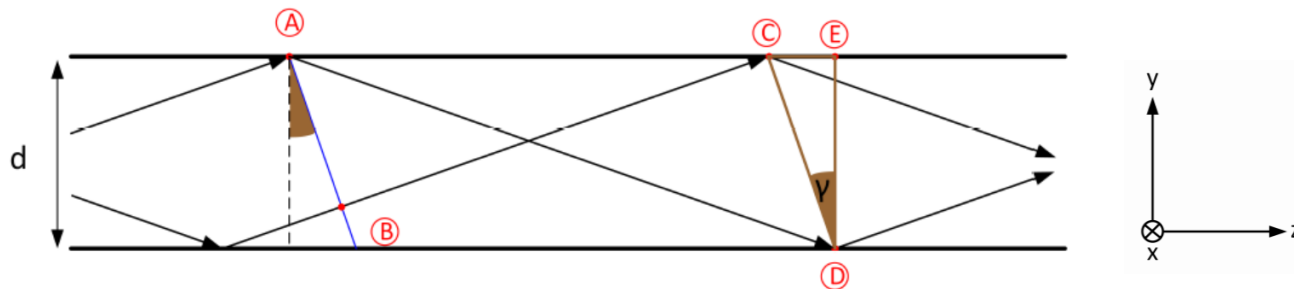
■ Bestimmen von $\overline{AE}$



$$-2\varphi_{s,p} - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{AE}}{d} \Leftrightarrow \overline{AE} = d \tan(\alpha)$$

■ Bestimmen von $\overline{CE}$



$$\tan(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{CE}}{d} \Leftrightarrow$$

$$\overline{CE} = d \tan(\gamma) = d \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{d}{\tan(\alpha)}$$

Aufgabe 19 a)

- Einsetzen in $\overline{BC}$

$$\overline{BC} = \sin(\alpha) (\overline{AE} - \overline{CE}) = \sin(\alpha) \left(d \tan(\alpha) - \frac{d}{\tan(\alpha)} \right) = d \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right)$$

- Einsetzen von $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ in Selbstkonsistenzbedingung

$$-2\varphi_{s,p} - \overline{AD} \cdot k_2 + m2\pi = -\overline{BC} \cdot k_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2\varphi_{s,p} - \frac{dk_2}{\cos(\alpha)} + m2\pi = -dk_2 \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$dk_2 \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) - \frac{1}{\cos(\alpha)} \right) + m2\pi = 2\varphi_{s,p} \quad \Leftrightarrow$$

$$dk_2 \left(\frac{\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) - (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}{\cos(\alpha)} \right) = 2\varphi_{s,p} - m2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$-2dk_2 \cos(\alpha) = 2\varphi_{s,p} - m2\pi \quad \Leftrightarrow$$

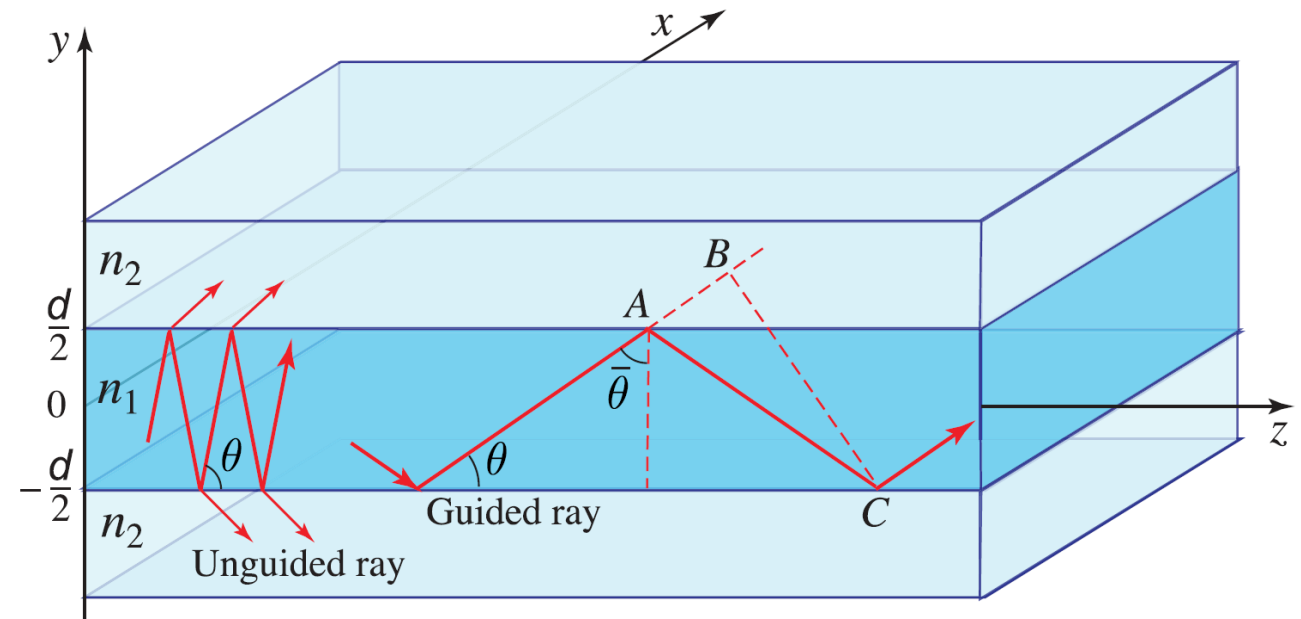
$$dk_2 \cos(\alpha) = m\pi - \varphi_{s,p}$$

Nur für diskrete Winkel α erfüllt die transversale Wellenzahl $k_x = k_2 \cos(\alpha)$ die Bedingung zur transversalen konstruktiven Interferenz. Für andere Winkel herrscht keine konstruktive Interferenz. Die einfallenden und mehrfach reflektierten Wellen löschen sich dann gegenseitig aus.

Geführte / nicht-geführte Moden

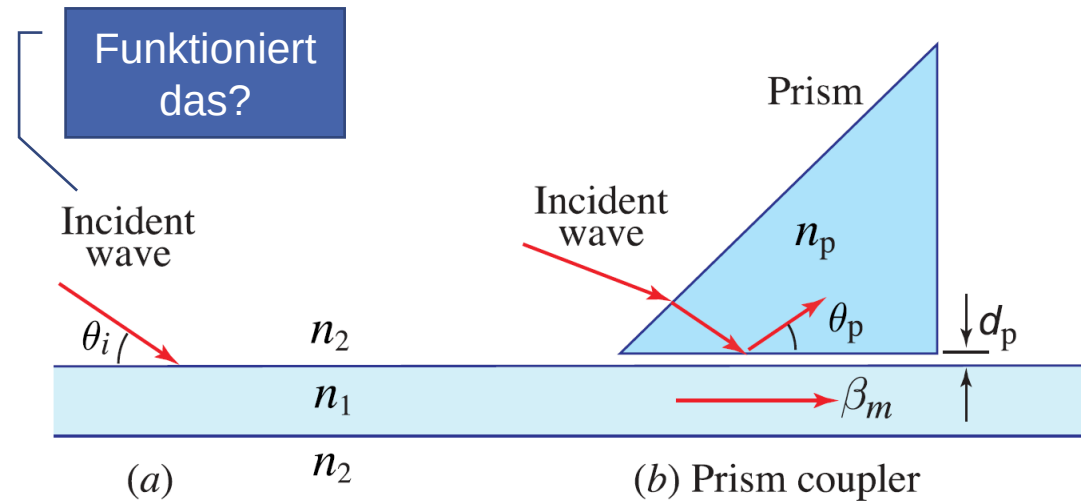
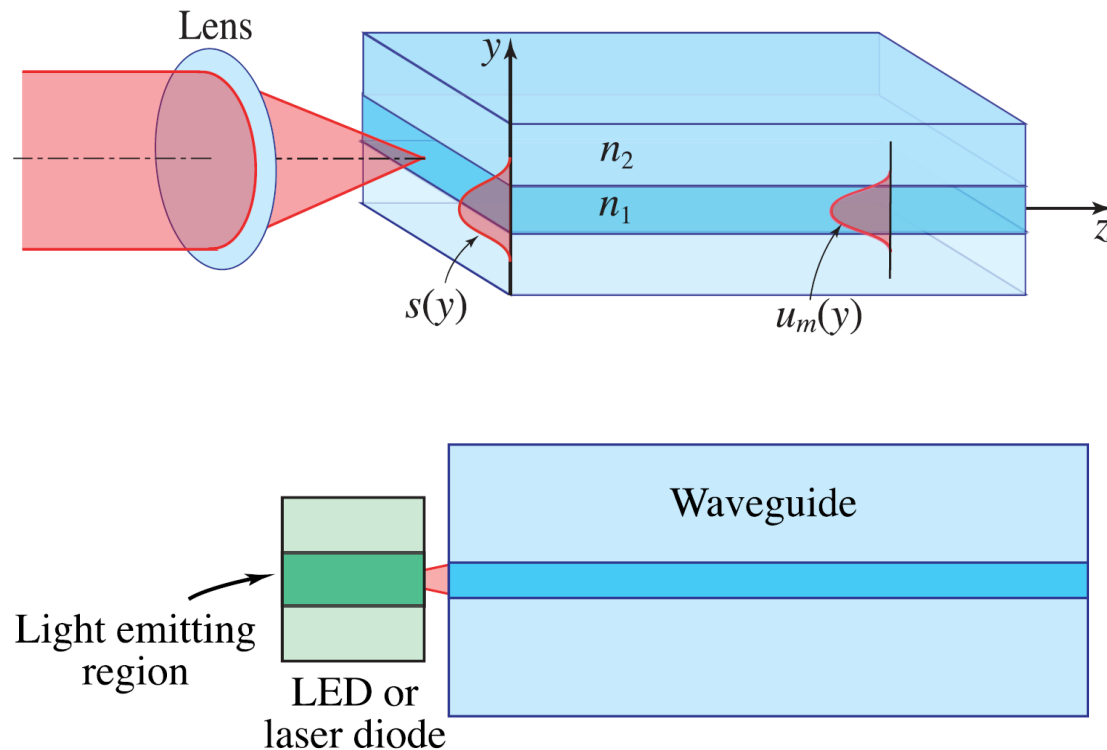
Geometrische Interpretation

- Ist der Einfallswinkel gegenüber den Grenzflächen so klein, dass keine Totalreflexion stattfinden kann, so kann sich keine geführte Mode ausbilden (“unguided ray”)
- Ist der Einfallswinkel hingegen ausreichend groß und die Selbstkonsistenzbedingung erfüllt, bildet sich eine ausbreitungsfähige Mode aus



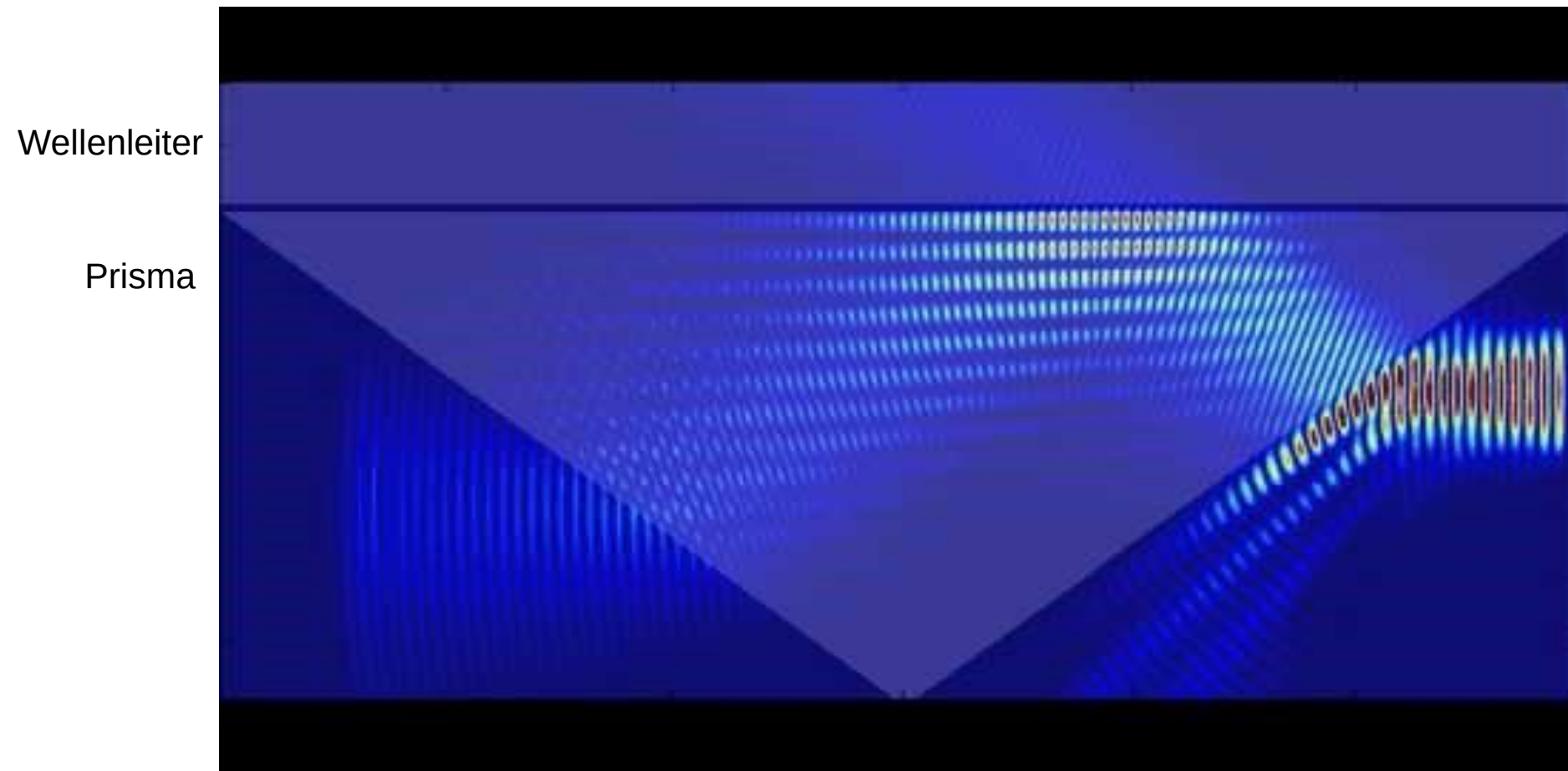
Quelle: Saleh, B. E. A. (2019). Fundamentals of Photonics. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc.

Wellenleiter Einkopplung



Antwort: Nein, da die Ausbreitungskonstante im Wellenleiter größer ist, als es der axiale Anteil des Wellenvektors außerhalb sein kann!

Einkopplung mit Prisma



Referenz: *Prism Tunneling* von MatlabFDTDToolbox, <https://youtu.be/qBL67nl-hpI>

Wellenleiter – Evaneszente Felder

- Stetigkeitsbedingungen → Felder dringen auch in Material jenseits der Grenzfläche ein und klingen exponentiell ab (**evaneszente Felder**)
- Konsequenzen:
 - Wirkleistungstransport (Energie) einzig und allein entlang der Grenzfläche. Ansonsten: Verletzung der Energieerhaltung bei Totalreflexion
 - Blindleistungsaustausch senkrecht zur Grenzfläche, da die Felder in diese Richtung (mit)schwingen. Andernfalls: Verletzung der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche (und damit der Maxwellgleichungen)

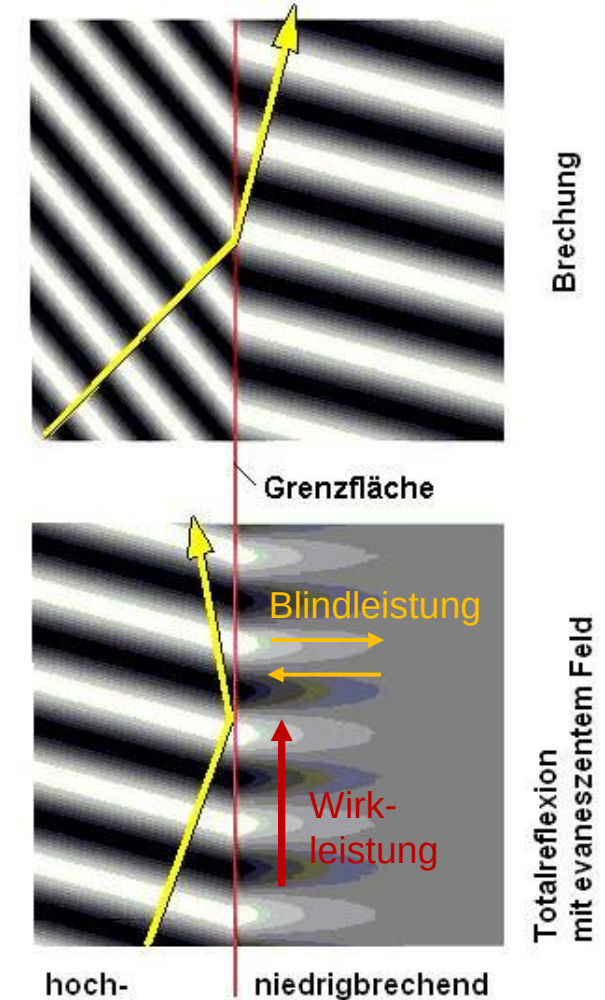


Bild: Wikipedia (Ulfbastel)

Wellenleiter – Evaneszente Felder

- Effekt ähnelt dem Tunneleffekt in der Quantenmechanik.
- Anwendung:
 - Je ähnlicher die verwendeten Dielektrika in Schicht 1, 2 und 3 sind, desto stärker dringt die Mode in das Material hinter der Grenzfläche ein. Für manche Applikationen ist dies vorteilhaft.
 - Beispiel: Kopplung von elektromagnetischen Wellen zwischen zwei Wellenleitern, die nahe genug zusammengebracht werden.
- Folge: evaneszentes Feld enthält Energie...
 - ... jedoch nur im Nahfeld.
 - Kein Energietransport in Bereiche weit weg von der Grenzfläche (Fernfeld)

