

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 12

Abgabe bis zum 06.02.2023 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 19:

Gegeben sei ein dielektrischer Schichtwellenleiter, welcher sich aus drei übereinander geschichteten Dielektrika (Vakuum-Schicht 2-Vakuum) zusammensetzt und somit die einfachste Form eines solchen Wellenleiters darstellt. Längs dieses Wellenleiters, d.h. in z -Richtung, breitet sich eine elektromagnetische Welle aus. Die Wellenausbreitung kann anhand ebener Wellen veranschaulicht werden, die an den Grenzflächen wiederholt vollständig reflektiert werden und somit entlang eines Zick-Zack-Pfades den Wellenleiter durchlaufen.

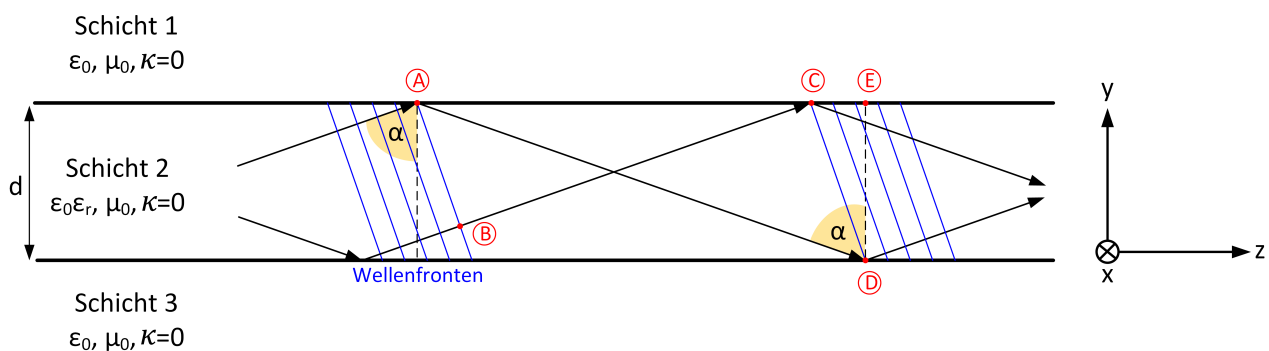


Abbildung 1

- a) Stellen Sie mit Hilfe von Abbildung 1 die Bedingung dafür auf, dass sich ein konstantes in z -Richtung laufendes Wellenbild/Feldmuster ergibt. Geben Sie zunächst die Bedingung in Abhängigkeit der (optischen) Weglängen sowie dem Verhalten an den Grenzflächen an. Überlegen Sie anschließend, wie Sie diese Weglängen durch die gegebenen Parameter (Winkel α , Wellenleiterdicke d , Brechzahl n_2 und Wellenzahl k_0) ausdrücken können.

Hinweis: Sie können annehmen, dass der in der Abbildung gegebene Winkel α größer als der kritische Winkel der Totalreflexion ist.

Hinweis 2: Die Reflexion an einer der Grenzflächen führt für senkrechte/parallele Polarisation zu einem Phasensprung $\varphi_{s,p}$.

Ges: Darstellung der Selbstkonsistenzbedingung durch Wellen- bzw. Wellenleitergrößen

Geg: Brechzahlen des Wellenleiters, Einfallswinkel α , Wellenleiterdicke d , Wellenzahl k_0

Liegen zwei Punkte (A) und (B) zu einem beliebigen Zeitpunkt auf einer gemeinsamen Wellenfront (in blau), d.h. sind sie identisch in Phase, so müssen sie auch zu jedem beliebigen späteren Zeitpunkt auf einer gemeinsamen Wellenfront liegen. Andernfalls würde sich die Überlagerung der ebenen Wellen und damit das Feldmuster zwischen den Grenzflächen verändern womit keine ausbreitungsfähige Lösung der Wellengleichung vorliegen würde. Die Bedingung der Gleichphasigkeit ist auch dann zu erfüllen, wenn die beiden Punkte gemäß dem strahlenoptischen Modell verschiedene Wege zurücklegen und dementsprechend unterschiedlich oft an den Materialgrenzflächen reflektiert werden. Anschaulich bedeutet dies, dass auch die Punkte (C)

und (D) auf einer gemeinsamen Wellenfront liegen müssen. Folglich darf sich die akkumulierte Phasenveränderung entlang der Strecken (A)-(D) und (B)-(C) nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden.

- Entlang des Weges (A)-(D) ergibt sich die Phasenveränderung durch zwei polarisationsabhängige Phasensprünge $\varphi_{s,p}$ bei der Reflexion in (A) und (D) sowie dem Zurücklegen der Strecke $\overline{AD}$. Die Phase einer ebenen Welle mit Wellenzahl k_0 in einem Medium mit Brechzahl n_2 ändert sich bei dem Zurücklegen der Strecke $\overline{AD}$ gerade um $k_0 n_2 \overline{AD} = k_2 \overline{AD}$.
- Entlang des Weges (B)-(C) muss nur die Wellenzahl des Mediums mit der Distanz $\overline{BC}$ multipliziert werden, da keine Reflexion stattfindet.
- Das negative Vorzeichen vor den Wellenzahlen ergibt sich aus der Ausbreitung in positive z -Richtung, wie in $\exp(j(\omega t - kz))$.

Somit erhalten wir die Gleichung

$$-k_2 \overline{AD} - 2\varphi_{s,p} + m2\pi = -k_2 \overline{BC}.$$

Anmerkung: Zwischen (A) und (D) berücksichtigen wir zwei Reflexionen, da die in der Abbildungen eingezeichneten Wellenfronten jeweils nach links verkippt sind. Demzufolge sind sie in (A) dem Zeitpunkt unmittelbar vor, in (D) dagegen dem Zeitpunkt unmittelbar nach der Reflexion zuzuordnen.

Mit den Darstellungen in Abbildung 2 bestimmen wir im Folgenden die bislang unbekannten Weglängen $\overline{AD}$ sowie $\overline{BC}$.

- Unter Ausnutzung des Reflexionsgesetzes („Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“), erkennen wir mit Abbildung 2 (1), dass die Distanz $\overline{AD}$ gerade durch den Kosinus von α ausgedrückt werden kann:

$$\overline{AD} = \frac{d}{\cos(\alpha)}.$$

- Für die Distanz $\overline{BC}$ gilt gemäß Abbildung 2 (2), dass $\overline{BC} = \sin(\beta) \overline{AC}$.
- Die unbekannte Strecke $\overline{AC}$ können wir ausdrücken durch $\overline{AC} = \overline{AE} - \overline{CE}$, wobei $\overline{AE} = d \tan(\alpha)$ gemäß Abbildung 2 (3) und $\overline{CE} = d \tan(\gamma)$ gemäß Abbildung 2 (4)

$$\overline{BC} = d \sin(\beta) (\tan(\alpha) - \tan(\gamma)).$$

- Betrachten wir Abbildung 2 (5) stellen wir zunächst fest, dass $\delta = 90^\circ - \alpha$ gelten muss.
- Zudem schließen wir aus Abbildung 2 (3) und Abbildung 2 (4), dass auch $\gamma = 90^\circ - \alpha$, weshalb $\delta = \gamma$.
- Abschließend erkennen wir in Abbildung 2 (6), dass neben $\alpha + \delta = 90^\circ$ auch $\beta + \delta = 90^\circ$ gelten muss, weshalb wir $\beta = \alpha$ schlussfolgern. Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= d \sin(\alpha) (\tan(\alpha) - \tan(90^\circ - \alpha)) = d \sin(\alpha) (\tan(\alpha) - \cot(\alpha)) \\ &= d \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) = d \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right) \\ &= d \frac{\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

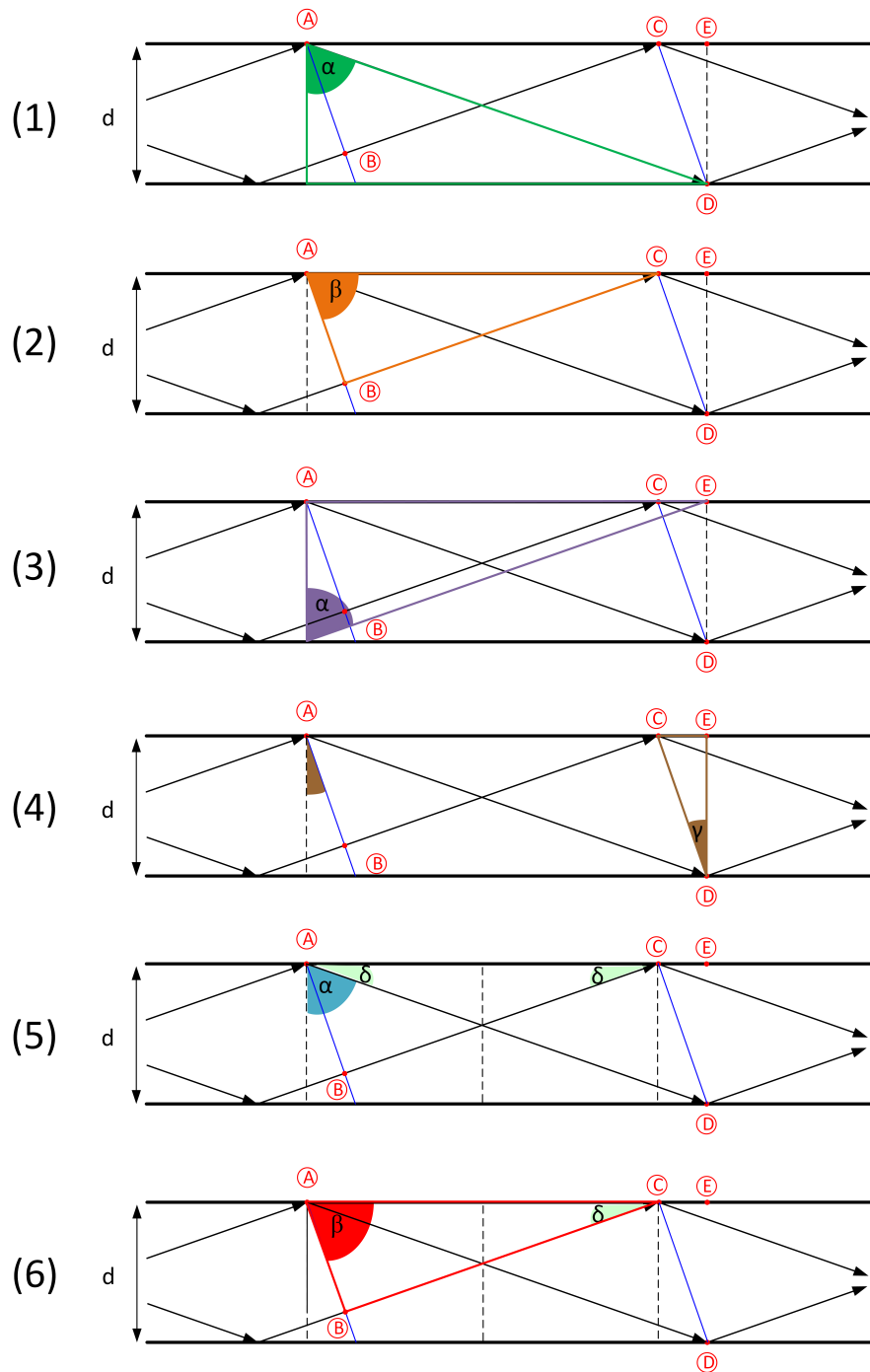


Abbildung 2: Geometrische Überlegungen zur Selbstkonsistenzbedingung

Durch Einsetzen der Weglängen in die Selbstkonsistenzbedingung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & -k_2 \overline{AD} - 2\varphi_{s,p} + m2\pi = -k_2 \overline{BC} \\
 \Leftrightarrow & -k_2 \frac{d}{\cos(\alpha)} - 2\varphi_{s,p} + m2\pi = -k_2 d \frac{\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\
 \Leftrightarrow & -k_2 d \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right) = 2\varphi_{s,p} - m2\pi \\
 \Leftrightarrow & -k_2 d \left(\frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right) = 2\varphi_{s,p} - m2\pi \\
 \Leftrightarrow & dk_2 \cos(\alpha) = m\pi - \varphi_{s,p} .
 \end{aligned}$$

Ergänzung: Es ergeben sich also vier Freiheitsgrade, die die Erfüllung der Selbstkonsistenzbedingung beeinflussen (der Phasensprung bei der Reflexion hängt nur von den Brechzahlen und dem Einfallswinkel ab): die Geometrie des Wellenleiters (Höhe d), die Brechzahlen der verschiedenen dielektrischen Schichten, die Wellenlänge der Welle (Wellenzahl im Vakuum $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$) und der Einfallswinkel (α). Sind also Wellenleiter und Wellenlänge fest, so erfüllt nur eine diskrete Zahl an Einfallswinkeln die Selbstkonsistenzbedingung. Demzufolge sind auch nur genau so viele Moden ausbreitungsfähig.

Aus den Überlegungen in a) wird ersichtlich, dass eine elektromagnetische Welle in der dielektrischen Platte nur dann ausbreitungsfähig ist, wenn sich die einfallenden und reflektierten Wellen auf ihrem Zick-Zack-Pfad derart überlagern, dass sich eine stehende Welle zwischen den Grenzflächen ausbildet. Diese stehende Welle verändert ihre Form bei der Ausbreitung nicht und wird als Mode bezeichnet. Da sich jede ausbreitungsfähige elektromagnetische Welle in dem Schichtwellenleiter aus diesen Moden zusammensetzt, betrachten wir nun beispielhaft die transversale Verteilung der Moden mit $\underline{E}_x^m$.

- b) Gehen Sie vom Durchflutungs- und Induktionsgesetz aus und zeigen Sie, dass es zwei Modenfamilien (TE- und TM- bzw. H- und E-Wellen bzw. senkrecht und parallel polarisierte Wellen) gibt, die sich unabhängig voneinander im Wellenleiter ausbreiten können. Nutzen Sie dabei aus, dass der Wellenleiter in x -Richtung unendlich ausgedehnt ist.

Ges: Separation der Maxwell'schen Gleichungen in zwei unabhängige Sätze von Gleichungen

Geg: Induktionsgesetz und Durchflutungsgesetz

Für ein homogenes, nichtleitendes und raumladungsfreies Medium lauten das Durchflutungs- und Induktionsgesetz in komplexer Zeigerschreibweise

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t} \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t}.$$

Aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Schichtwellenleiters/der Wellenfronten der einfallenden und reflektierten Wellen in x -Richtung, erstreckt sich auch das resultierende Wellenbild (die Mode) unendlich weit in dieser Dimension. Wir können also annehmen, dass die Wellen invariant entlang x sind und $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ gilt. Demzufolge ergeben sich wie bei ebenen Wellen und den Hohlleitern zwei Gruppen unabhängiger gekoppelter Differentialgleichungen: Die erste Gruppe umfasst die Feldkomponenten $\{E_x, H_y, H_z\}$ und wird wegen der verschwindenden longitudinalen elektrischen Feldkomponente als TE-Welle oder H-Welle bezeichnet. Die zweite Gruppe hingegen umfasst die Komponenten $\{H_x, E_y, E_z\}$ und wird analog als TM-Welle oder E-Welle bezeichnet.

TE-Polarisation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} &= \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t} \end{aligned}$$

TM-Polarisation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial t} \end{aligned}$$

Eine zeitharmonische TE-Welle breite sich in positive z -Richtung durch den dielektrischen Schichtwellenleiter aus. Für den komplexen Zeiger des elektrischen Feldvektors gelte dabei

$$\underline{\mathbf{E}}(y, z, t) = E_x(y, z, t) \mathbf{e}_x = E_x(y) \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_x.$$

- c) Leiten Sie ausgehend von der Wellengleichung einen allgemeinen Ausdruck für das elektrische Feld $E_x^m(y)$ der m -ten Mode der TE-Welle her. Wählen Sie anschließend einen geeigneten Lösungsansatz für jede der drei dielektrischen Schichten und wenden Sie die Grenzflächenbedingungen an.

Ges: Ansatz für $E_x^m(y)$

Geg: Zeitharmonischer Ansatz, Wellengleichung, TE-Welle

Der elektrische Feldvektor der m -ten Mode der TE-Welle

$$\underline{\mathbf{E}}^m(y, z, t) = E_x^m(y, z, t) \mathbf{e}_x = E_x^m(y) \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_x$$

muss die Wellengleichung erfüllen. Da wir den E-Feldvektor durch die kartesischen Einheitsvektoren ausdrücken und die y - und z -Komponenten verschwinden, setzen wir für E_x^m die skalare Wellengleichung an. In der i -ten dielektrischen Schicht ($i \in \{1, 2, 3\}$) des Wellenleiters erhalten wir daher

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial z^2} - \varepsilon_i \mu \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial t^2} = 0 \\ \iff & \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial z^2} - \varepsilon_i \mu \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial t^2} = 0 \\ \iff & \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon_i - k_z^2) E_x^m = 0 \\ \iff & \frac{\partial^2 E_x^m}{\partial y^2} + (k_i^2 - k_z^2) E_x^m = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

mit der Wellenzahl $k_i = \sqrt{k_{i,x}^2 + k_{i,y}^2 + k_{i,z}^2}$ und der Permittivität ε_i . Aus der Symmetrie der Anordnung (Schicht 1 = Schicht 3) ergibt sich zudem $k_1 = k_3 = k_0$.

Die Ausbreitung einer Mode ist nur dann möglich, wenn sich alle Punkte auf einer ihrer Phasenfronten mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten, ergo müssen die Ausbreitungskonstanten $k_{i,z}$ in allen Schichten des Wellenleiters gleich sein¹, also $k_z = k_{1,z} = k_{2,z} = k_{3,z}$ gelten. Wegen $k_2 > k_1 = k_3$ folgt damit $k_{2,z} = k_{1,z} > k_1$. Im Material jenseits der Grenzfläche (d.h. in Schicht 1) ist die Wellenzahl in z -Richtung $k_{1,z}$ also größer als der Betrag der Wellenzahl k_1 (vergleiche auch Abbildung 3). Daher muss die Wellenzahl in y -Richtung rein imaginär werden und es gilt

$$k_{1,y}^2 = k_1^2 - k_z^2 < 0 \iff k_{1,y} = \pm j k_{1,y}^{(i)} \quad \text{mit} \quad k_{1,y}^{(i)} = \sqrt{k_z^2 - k_1^2},$$

wobei das Superskript (i) den Imaginärteil kennzeichnet.

¹Die Ursache für die Stetigkeit der Ausbreitungskonstanten sind die Grenzflächenbedingungen: Betrachten wir z.B. das tangentielle E-Feld $E_{\tan}$ einer Mode, welches an der Mediengrenzfläche stetig sein muss. Wäre k_z nun in den zwei benachbarten Medien verschieden, so würde sich die Phasenlage der Felder in Medium 1 von der Phasenlage der Felder in Medium 2 entlang z unterscheiden und die Stetigkeit von $E_{\tan}$ wäre nicht mehr für alle z und t erfüllt.

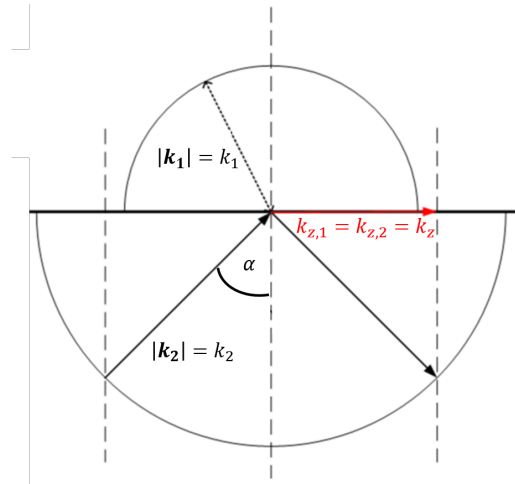


Abbildung 3: Wellenzahlen bei der Totalreflexion

Für die Wellenzahl in der zweiten Schicht² gilt $k_2^2 = k_{2,y}^2 + k_z^2$ und entsprechend in der ersten und dritten Schicht $k_3^2 = k_1^2 = k_{1,y}^2 + k_z^2$. Gleichung (1) vereinfacht sich damit zu

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x^m}{\partial y^2} = -k_{i,y}^2 \underline{E}_x^m = \begin{cases} (k_{3,y}^{(i)})^2 \underline{E}_x^m & y < -\frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 3}) \\ -k_{2,y}^2 \underline{E}_x^m & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 2}) \\ (k_{1,y}^{(i)})^2 \underline{E}_x^m & y > \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 1}) \end{cases} \quad (2)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung für $\underline{E}_x^m$ ist also eine Funktion, deren zweifache Ableitung nach der Variablen y ein Vielfaches $-k_{i,y}^2$ der Funktion selbst ist. Somit kommen für die Lösung eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusschwingungen oder von Exponentialfunktionen mit umgekehrtem Vorzeichen im Argument ($\exp(x)$, $\exp(-x)$) infrage.

Lösungsansatz:

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass sich die Höhe d des Wellenleiters gleichmäßig auf den positiven und negativen y -Bereich verteilt. Im Gegensatz zu den Hohlleitern müssen wir nun berücksichtigen, dass bei einem dielektrischen Wellenleiter die Felder bei der Totalreflexion auch in den Bereich jenseits der Grenzflächen (Schichten 1 und 3) eindringen und dort abklingen (evaneszente Feldanteile). Da ein Aufklingen des Feldes mit zunehmendem Abstand zu der wellenführenden Schicht 2 physikalisch nicht sinnvoll ist, sind für Schicht 3 nur Lösungen der Form $\exp(k_{3,y}^{(i)}(y + \frac{d}{2}))$ denkbar. Mit demselben Argument setzen wir für Schicht 1 die Funktion $\exp(-k_{1,y}^{(i)}(y - \frac{d}{2}))$ an. Zwischen den beiden Grenzflächen (Schicht 2) nehmen wir an, dass die Lösung die Form einer stehenden Welle aufweist; also durch eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen ausgedrückt werden kann. Verwenden wir die Identität $\cos(x - \psi) = \cos(x) \cos(\psi) + \sin(x) \sin(\psi)$, um den Ansatz in Schicht 2 kompakt mit dem Parameter ψ auszudrücken, erhalten wir

$$\underline{E}_x^m(y) = \begin{cases} B \exp\left(k_{3,y}^{(i)} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 3}) \\ A \cos(k_{2,y} y - \psi) & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 2}) \\ C \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 1}) \end{cases}$$

²Die x -Komponenten der Wellenvektoren verschwinden aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Wellenleiters entlang dieser Achse.

Prüfen der Stetigkeitsbedingungen:

Die Unbekannten A, B, C bestimmen wir mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen. E_x^m ist eine Tangentialkomponente bzgl. der Grenzfläche und muss damit am Grenzübergang stetig sein. Daraus folgt an der Grenzfläche $y = -d/2$

$$B \exp\left(-k_{3,y}^{(i)}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right) \Big|_{y=-\frac{d}{2}} = A \cos(k_{2,y}y - \psi) \Big|_{y=-\frac{d}{2}}$$

$$\iff B = A \cos\left(-k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right) = A \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} + \psi\right)$$

sowie an der Grenzfläche $y = d/2$

$$C \exp\left(-k_{1,y}^{(i)}\left(y - \frac{d}{2}\right)\right) \Big|_{y=\frac{d}{2}} = A \cos(k_{2,y}y - \psi) \Big|_{y=\frac{d}{2}}$$

$$\iff C = A \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right)$$

Daraus folgt abschließend durch Einsetzen in den ursprünglichen Ansatz und Anwenden von $k_{1,y}^{(i)} = k_{3,y}^{(i)}$:

$$E_x^m(y) = \begin{cases} A \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} + \psi\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 3}) \\ A \cos(k_{2,y}y - \psi) & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 2}) \\ A \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right) \exp\left(-k_{1,y}^{(i)}\left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 1}) \end{cases} \quad (3)$$

Basierend auf unserem Ansatz erfüllt (3) nun die Stetigkeitsbedingungen für das tangential elektrische Feld. Aus Aufgabenteil b) wissen wir allerdings, dass noch eine tangential magnetische Feldkomponente H_z^m existiert, die ebenfalls stetig sein muss. Wir erhalten die H-Feldkomponente gemäß $H_z^m(y) = -\frac{j}{\mu\omega} \frac{\partial E_x^m(y)}{\partial y}$ (vgl. Teil b) für zeitharmonische Wellen) zu:

$$H_z^m(y) = -\frac{j}{\mu\omega} \begin{cases} A k_{1,y}^{(i)} \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} + \psi\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 3}) \\ -A k_{2,y} \sin(k_{2,y}y - \psi) & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 2}) \\ -A k_{1,y}^{(i)} \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right) \exp\left(-k_{1,y}^{(i)}\left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 1}) \end{cases}$$

Analog zum E-Feld betrachten wir die Stetigkeit an den Grenzflächen. Es folgt an der Grenzfläche $y = -d/2$:

$$A k_{1,y}^{(i)} \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} + \psi\right) = -A k_{2,y} \sin\left(-k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right)$$

$$\iff \tan\left(k_{2,y}\frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{k_{1,y}^{(i)}}{k_{2,y}} \quad (4)$$

An der Grenzfläche $y = d/2$ muss gelten:

$$-A k_{1,y}^{(i)} \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right) = -A k_{2,y} \sin\left(k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right)$$

$$\iff \tan\left(k_{2,y}\frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{k_{1,y}^{(i)}}{k_{2,y}} \quad (5)$$

Damit der gewählte Ansatz alle Stetigkeitsbedingungen erfüllt, müssen also auch (4) und (5) erfüllt sein. Führen wir nun die Variablen $U = k_{2,y} \frac{d}{2}$ und $W = k_{1,y}^{(i)} \frac{d}{2}$ ein, können wir die Form der beiden Gleichungen vereinfachen. Aufgrund der π -Periodizität des Tangens erhalten wir durch direktes Anwenden des Arkustangens nicht alle möglichen Lösungen. Daher Ergänzen wir in beiden Gleichungen die Terme $m_1\pi$ bzw. $m_2\pi$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \tan(U + \psi) = \frac{W}{U} & \iff U + \psi = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) + m_1\pi \\ \tan(U - \psi) = \frac{W}{U} & \iff U - \psi = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) + m_2\pi. \end{aligned}$$

Addieren und subtrahieren wir diese Gleichungen jeweils voneinander, erhalten wir je eine Gleichung für U und ψ . Mit $m = m_1 + m_2$ und $\Delta m = m_1 - m_2$ lauten diese umgeformten Gleichungen

$$U = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) + m \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \psi = \Delta m \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

Es gilt zudem $\Delta m = 2m_1 - m$. Da $2m$ stets gerade und ganzzahlig ist, ist Δm genau dann gerade/ungerade wenn auch m gerade/ungerade ist. Des Weiteren wissen wir, dass ein ψ , welches sich um ein Vielfaches von π unterscheidet, im selben Modenfeld resultiert. Dies wird z.B. an (3) ersichtlich: Da der Kosinus 2π -periodisch ist, erhalten wir für $\psi = m \frac{\pi}{2}$ mit geradem m , also $m = \{0, 2, 4, \dots\}$ wieder den Kosinus (höchstens mit umgekehrtem Vorzeichen). Für ein $\psi = m \frac{\pi}{2}$ mit ungeradem m , also $m = \{1, 3, 5, \dots\}$ ist der Kosinus gerade um $\pm 90^\circ$ phasenverschoben und ergibt somit stets den Sinus. Folglich sind für gegebenes, gerades/ungerades m , alle Δm gerade/ungerade und gehören zu derselben Mode. Die Gleichungen in (6) lassen sich somit mit einem gemeinsamen m formulieren

$$U = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) + m \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \psi = m \frac{\pi}{2}$$

Die Gleichung für U und $W = \sqrt{V^2 - U^2}$ (hier gilt $V = k_0 \frac{d}{2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$) ist die Eigenwertgleichung des dielektrischen Schichtwellenleiters und kann grafisch oder numerisch für U gelöst werden. So können wir die ausbreitungsfähigen Moden für gegebene Wellen- und Wellenleiterparameter bestimmen (siehe Vorlesung). Mit dem Ausdruck für die Phasendrehung lässt sich nun unser Ansatz vervollständigen:

$$\underline{E}_x^m(y) = \begin{cases} A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} + m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 3}) \\ A \cos\left(k_{2,y} y - m \frac{\pi}{2}\right) & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 2}) \\ A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 1}) \end{cases}$$

- d) Skizzieren Sie für $z = 0$ und $t = 0$ den Realteil der elektrischen Feldkomponente $\underline{E}_x^m(y)$ der ersten drei TE-Moden.

Ges: Skizze der ersten drei Moden

Geg: Ergebnis aus Aufgabe c)

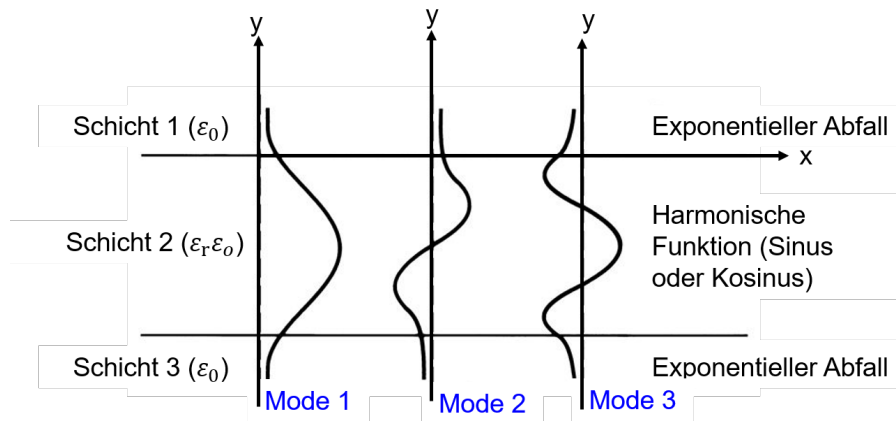


Abbildung 4: TE-Moden der dielektrischen Platte

- e) Welcher wesentliche Unterschied besteht zwischen den Moden des dielektrischen Schichtwellenleiters und denen des Parallelplattenleiters? Erläutern und begründen Sie.

Ges: Unterschied Moden dielektrischer Schichtwellenleiter und Parallelplattenleiter

Geg: - (hier nicht sinnvoll)

Im dielektrischen Wellenleiter dringen die Felder in den Bereich jenseits der Grenzfläche ein. Dieses Verhalten wird durch die Grenzflächenbedingungen für elektromagnetische Wellen bedingt: Während im idealen Leiter keine Felder existieren können und somit etwa die tangentialen E-Feldanteile verschwinden müssen, fällt diese Beschränkung in dielektrischen Medien weg. Aufgrund der für E_{tan} geforderten Stetigkeit muss das Feld also in die Randschichten hineinragen. Aufgrund der Totalreflexion wird jedoch keine Feldenergie von der Grenzschicht wegtransportiert und der sogenannte evaneszente Anteil propagiert ausschließlich parallel zu der Grenzfläche. Folglich ist die Mode im dielektrischen Wellenleiter - im Gegensatz zum Hohlleiter - nicht identisch zu der stehenden Welle. Für eine vollständige Beschreibung benötigen wir zusätzlich die evaneszenten Feldanteile.

- f) Berechnen Sie die zugehörigen magnetischen Feldkomponenten $\underline{H}_y^m(y)$ und $\underline{H}_z^m(y)$ der TE-Moden und vergleichen Sie das Ergebnis für $\underline{H}_z^m(y)$ mit dem aus der Vorlesung.

Ges: Mathematische Ausdrücke für die magnetischen Felder

Geg: Ergebnis aus Aufgabe c) (Ausdruck für die elektrischen Felder), Maxwellsche Gleichungen

Die magnetischen Feldkomponente $\underline{H}_{z,m}(y)$ der TE-Mode haben wir bereits in c) bestimmt:

$$\underline{H}_z^m(y) = \frac{j}{\mu\omega} \begin{cases} -A k_{1,y}^{(i)} \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} + m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 3}) \\ A k_{2,y} \sin\left(k_{2,y} y - m \frac{\pi}{2}\right) & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 2}) \\ A k_{1,y}^{(i)} \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 1}) \end{cases}$$

Die y-Komponente des H-Feldes erhalten wir mit den Beziehungen aus b) zu

$$\underline{H}_y^m = \frac{j}{\mu\omega} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z}.$$

Mit dem Ansatz für Wellenleitermoden $\underline{E}_x(y, z, t) = \underline{E}_x(y) \exp(j(\omega t - k_z z))$ erhalten wir

$$\underline{H}_y^m(y) = \frac{k_z}{\mu\omega} \begin{cases} A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} + m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right) & y < -\frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 3}) \\ A \cos\left(k_{2,y} y - m \frac{\pi}{2}\right) & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 2}) \\ A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2} - m \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right) & y > \frac{d}{2} \quad (\text{Schicht 1}) \end{cases}.$$

Das Ergebnis für $\underline{H}_z^m(y)$ unterscheidet sich gegenüber dem aus der Vorlesung lediglich in den Vorfaktoren. Der direkte Vergleich liefert etwa

$$\underline{H}_0 = j \frac{A k_{2,y}}{\mu\omega}.$$

Die prinzipielle Form, also der sinusförmige Verlauf in Schicht 2 und der exponentielle Abfall in den umliegenden Medien, ist jedoch identisch.

Lösung zu Aufgabe 20:

Wir betrachten die Einkopplung von Licht in einen dielektrischen Schichtwellenleiter welcher sich aus drei übereinander geschichteten Dielektrika zusammensetzt. Damit sich in einem solchen Wellenleiter geführte Wellen ausbreiten können, muss der Winkel θ_m unter welchem das Licht auf die Grenzflächen der Dielektrika trifft, folgende Beziehung erfüllen (siehe vorherige Aufgabe)

$$\cos \theta_m = \frac{m\pi - \varphi_{s,p}}{n_1 k_0 d}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

wobei $\varphi_{s,p}$ den Phasensprung für senkrechte/parallele Polarisierung bei der Reflexion darstellt. Im Folgenden werde das Licht an der linken, seitlichen Kante in den Schichtwellenleiter eingekoppelt (siehe Abbildung 5).

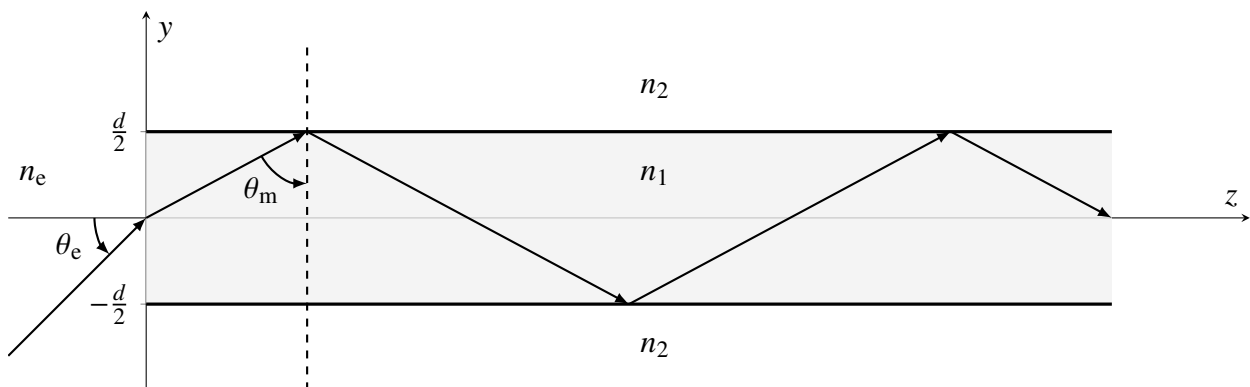


Abbildung 5

- a) Welche Bedingung muss der Einfallswinkel θ_e an der Grenzfläche erfüllen, damit eine in z -Richtung propagierende Mode des Schichtwellenleiters angeregt wird?

Ges: Bedingung für θ_e

Geg: Selbstkonsistenzbedingung und Geometrie des Wellenleiters

Licht, welches von links auf die seitliche Grenzfläche fällt wird nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochen. Es gilt also

$$k_e \sin \theta_e = k_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_m \right).$$

Damit das Licht im Wellenleiter geführt werden kann, muss nun der Winkel θ_m größer als der kritische Winkel θ_c sein, andernfalls würde keine Totalreflexion auftreten. Es gilt somit

$$\theta_m \geq \theta_c,$$

weshalb wir für den den Einfallswinkel die folgende Beziehung erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \theta_m &\leq \frac{\pi}{2} - \theta_c \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_m \right) &\leq \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_c \right) \\ \frac{k_e}{k_1} \sin \theta_e &\leq \cos \theta_c \\ \theta_e &\leq \arcsin \left(\frac{k_1}{k_e} \cos \theta_c \right), \end{aligned}$$

wobei wir die (abschnittsweise) Monotonie des Sinus und des Arkussinus im Intervall $[0, \pi]$ ausgenutzt haben. Die Bedingung der Totalreflexion allein genügt allerdings noch nicht um eine ausbreitungsfähige Mode anzuregen. Auch die Selbstkonsistenzbedingung, welche wir in der vorherigen Aufgabe hergeleitet haben, muss erfüllt sein. Diese Bedingung liefert alle Winkel θ_m , welche zu Totalreflexion an der Grenzschicht führen (es gilt $\theta_m \geq \theta_c$) und zudem die Selbstkonsistenzbedingung erfüllen. Einfügen der Bedingung ergibt schließlich mit $m \in \mathbb{N}$

$$\theta_e \leq \arcsin \left(\frac{k_1}{k_e} \frac{m\pi - \varphi_{s,p}}{k_1 d} \right) = \arcsin \left(\frac{m\pi - \varphi_{s,p}}{k_e d} \right).$$

- b) Wir betrachten nun Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, das in den Schichtwellenleiter der Dicke $d = 220 \text{ nm}$ eingekoppelt wird. Die für den Schichtwellenleiter verwendeten Dielektrika weisen die Brechzahlen $n_1 = 3.5$ bzw. $n_2 = 1.44$ auf. Ermitteln Sie den für die Ausbreitung im Wellenleiter kritischen Winkel θ_c , den maximalen Winkel θ_e unter dem Licht aus der Luft ($n_e = 1$) eingekoppelt werden kann und die numerische Apertur (NA) des Wellenleiters.

Hinweis: In Luft gilt $\text{NA} \approx \sin \theta_e$.

Ges: Kritischer Winkel θ_c , numerische Apertur NA

Geg: $\text{NA} \approx \sin \theta_e$, $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, $d = 220 \text{ nm}$, $n_1 = 3.5$, $n_2 = 1.44$

Zunächst bestimmen wir den kritischen Winkel θ_c an der Grenzfläche zwischen den beiden Dielektrika des Plattenleiters:

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \approx 24.29^\circ \text{ (bzw. } 0.424 \text{ rad)}$$

In Aufgabenteil a) haben wir bereits den Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel an der Grenzfläche und dem kritischen Winkel hergeleitet. Es ergibt sich somit für den Einfallswinkel mit $n_e = 1$ und dem Zusammenhang $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$\begin{aligned} \theta_e &\leq \arcsin \left(\frac{k_1}{k_e} \cos \theta_c \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{n_1}{n_e} \cos \left(\arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \right) \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{n_1}{n_e} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} \right) \\ &= \arcsin \left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right) \end{aligned}$$

Diese Ungleichung besitzt keine Lösung, da der Arkussinus für Argumente > 1 nicht definiert ist. Demzufolge könnten wir theoretisch selbst für einen Einfall nahezu parallel zu der Grenzfläche Licht in den Wellenleiter einkoppeln. Die numerische Apertur des Wellenleiters beträgt dabei

$$\text{NA} = \sin \theta_e = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx 3.19$$

Eine weitere Möglichkeit zur Einkopplung in dielektrische Schichtwellenleiter ist in Abbildung 6 dargestellt und basiert auf der Verwendung eines Prismas. Hier wird die einfallende Welle zunächst an

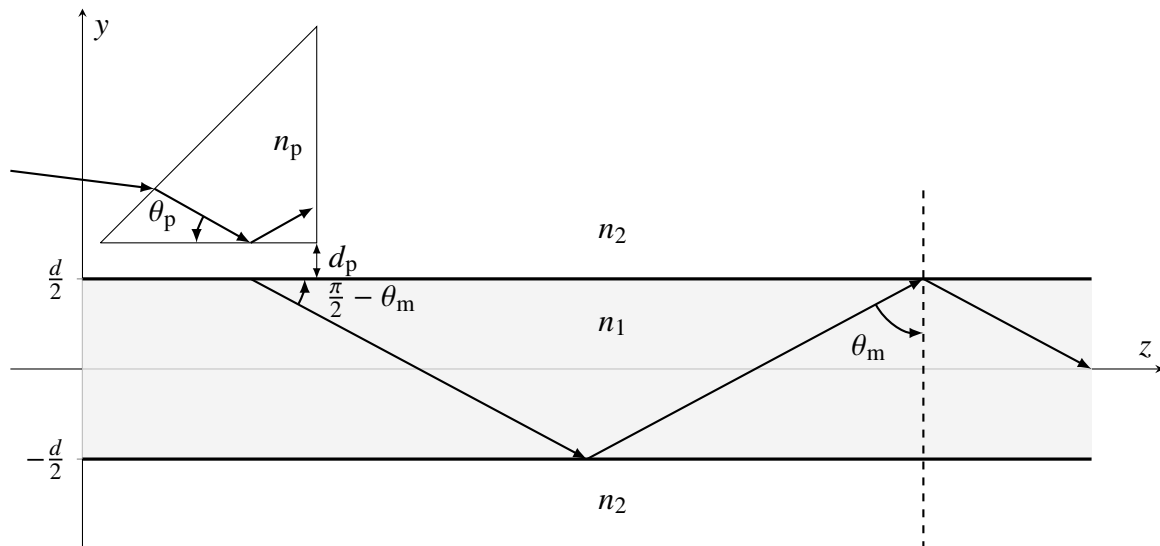


Abbildung 6

dem Prisma mit Brechzahl n_p gebrochen, bevor sie anschließend unter einem Winkel $\theta_p < \theta_c$ auf die Grenzfläche zwischen Prisma und Material 2 trifft (sie erfährt also Totalreflexion). Die einfallende und reflektierte Welle bilden eine sich im Prisma in z -Richtung ausbreitende Welle mit $\beta_p = n_p k_0 \cos \theta_p$.

- c) Erklären Sie, wie Licht in den dielektrischen Plattenleiter einkoppeln kann, obwohl die einfallende Welle im Prisma Totalreflexion erfährt. Welche Bedingung muss dabei der Abstand d_p erfüllen?

Ges: Erklärung der Einkopplung trotz Totalreflexion, Bedingung für Abstand d_p

Geg: -

Im Falle von Totalreflexion weist die Welle aufgrund der Stetigkeitsbedingungen einen transmittierten Anteil mit exponentiell abfallender Amplitude auf. Teilen wir die auftretenden Wellenvektoren in ihren longitudinalen Anteil $k_z = \beta$ und transversalen Anteil k_y auf, so erhalten im Spalt der Breite d_p

$$k_{y,2}^2 = k_2^2 - \beta_2^2$$

wobei aufgrund der Stetigkeitsbedingungen $\beta_2 = \beta_p$ gelten muss. Einsetzen liefert dann

$$k_{y,2}^2 = k_2^2 - \beta_p^2 = k_2^2 - k_p^2 \cos^2 \theta_p = k_2^2 \left(1 - \frac{k_p^2}{k_2^2} \cos^2 \theta_p \right).$$

Im Falle von Totalreflexion an der Grenzfläche ist der Winkel θ_p hinreichend klein, sodass mit $n_p > n_2$ die Beziehung³ $\cos \theta_2 \geq 1$ erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned} k_p \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_p \right) &= k_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) \\ k_p \cos \theta_p &= k_2 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_2 &= \frac{k_p}{k_2} \cos \theta_p \geq 1. \end{aligned}$$

³In der Vorlesung finden Sie $\sin \theta_2 \geq 1$. Wir erhalten hier einen Kosinus statt einem Sinus, da wir hier den Winkel zur Grenzfläche und nicht zur Grenzflächennormalen betrachten. Es gilt daher $\sin(\pi/2 - \theta_2) = \cos(\theta_2)$.

Folglich ist $k_{y,2}^2 \leq 0$ und somit

$$\underline{k}_{y,2} = -j \sqrt{k_p^2 \cos^2 \theta_p - k_2^2} = -j \sqrt{\beta_p^2 - k_2^2}.$$

Wählen wir nun für das elektrische Feld im Spalt den Ansatz

$$\underline{E}_2(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \underline{k}_2 \cdot \mathbf{r})),$$

erhalten wir mit $\mathbf{r} = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ und $\underline{k}_2 = k_y \mathbf{e}_y + \beta_p \mathbf{e}_z$ (wir wählen ein Koordinatensystem mit der y-Achse in transversaler Richtung und der z-Achse in Ausbreitungsrichtung)

$$\begin{aligned} \underline{E}_2(\rho, z, t) &= \underline{E}_{2,0} \exp\left(j\left(\omega t - \left(\beta_p z - j \sqrt{\beta_p^2 - k_2^2} y\right)\right)\right) \\ &= \underline{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \beta_p z)) \exp\left(-\underbrace{\sqrt{\beta_p^2 - k_2^2} y}_{=: \alpha \geq 0}\right) \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass neben $n_p > n_2$ auch $n_1 > n_2$ erfüllt ist, wird das exponentiell abklingende Feld reflexionsfrei in die Schicht mit $n = n_1$ eingekoppelt. Der eindringende Feldanteil fällt dabei gemäß $\exp(-\alpha y)$ wobei y die Länge des Bereichs angibt, indem sich aufgrund der Totalreflexion keine Welle ausbreitet. Dementsprechend muss der Abstand d_p ausreichend klein gewählt werden, um einen signifikanten Anteil $\exp(-\alpha d_p)$ der Ausgangsamplitude im Prisma in das Dielektrikum mit $n = n_1$ einkoppeln zu können.

- d) Wie muss der Abstand d_p gewählt werden, um mindestens 50 % der Ausgangsleistung zu übertragen?

Ges: Abstand d_p für mindestens 50 % der Ausgangsleistung

Geg: Exponentieller Abfall der evaneszenten Feldanteile

Um 50 % der Ausgangsleistung in den Wellenleiter einkoppeln zu können muss gelten, dass

$$\begin{aligned} |\underline{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \beta_p z)) \exp(-\alpha d_p)|^2 &= 0.5 |\underline{E}_{2,0} \exp(j(\omega t - \beta_p z))|^2 \\ \exp(-2\alpha d_p) &= 0.5 \\ d_p &= \frac{\ln 2}{2\alpha} = \frac{\ln 2}{2\sqrt{k_p^2 \cos^2 \theta_p - k_2^2}} = \frac{\ln 2}{2k_0 \sqrt{n_p^2 \cos^2 \theta_p - n_2^2}} \end{aligned}$$

- e) Welche Bedingung muss die Ausbreitungskonstante β_p erfüllen, sodass eine in z-Richtung laufende Mode im Schichtwellenleiter angeregt wird?

Ges: Bedingung für β_p

Geg: Grenzflächen- bzw. Stetigkeitsbedingung und daraus die Konsequenz der übereinstimmenden Ausbreitungskonstanten

Um tatsächlich eine effiziente Einkopplung zu erreichen, muss die Welle eine Mode im Plattenleiter anregen. Dazu müssen die Ausbreitungskonstanten im Prisma und Plattenleiter möglichst exakt übereinstimmen, d.h.

$$\beta_p \approx \beta_m$$

$$k_p \cos \theta_p \approx k_1 \sin \theta_m = k_1 \sin(\arccos(\cos \theta_m)) = k_1 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_m} = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi - \varphi_{s,p}}{d}\right)^2}$$

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu