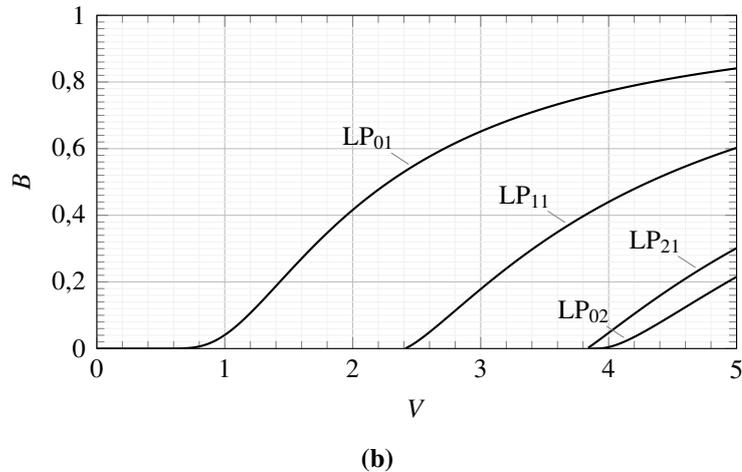
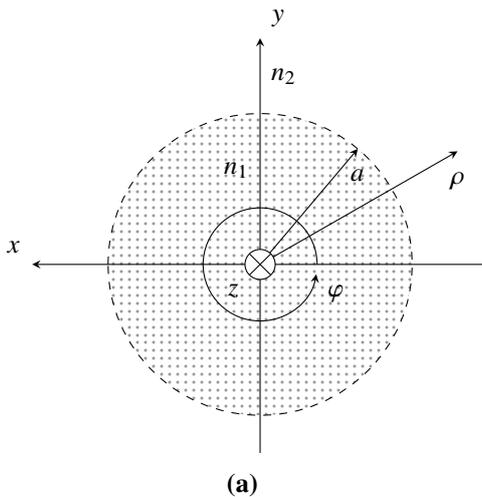


# EMW Übungsblatt 13

Abgabe bis zum 13.02.2023 um 11:30 via ILIAS

## Aufgabe 21:

Wir betrachten eine Glasfaser mit Stufenindexprofil und Kernradius  $a$ , in der sich eine elektromagnetische Welle in  $z$ -Richtung ausbreitet. Der Faserquerschnitt ist in Abbildung 1a dargestellt. Die Medien seien nichtleitend, raumladungsfrei und nichtmagnetisch mit  $\mu = \mu_0$ . Die Brechzahlen im Kern bzw. im Mantel seien  $n_1$  bzw.  $n_2$  und es gelte  $\Delta \ll 1$ .



**Abbildung 1:** (a) Querschnitt der betrachteten Stufenindexfaser. (b) Normierte Ausbreitungskonstanten  $B$  der LP-Moden über der normierten Frequenz  $V$ .

- Benennen und beschreiben Sie das Phänomen, welches die Wellenführung in einem dielektrischen Wellenleiter wie der Glasfaser ermöglicht.
- Welche Stetigkeitsbedingungen müssen für das tangentielle und das normale E-Feld an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser gelten? Wie lauten die entsprechenden Bedingungen für das H-Feld?
- Wie werden der Fall  $\Delta \ll 1$  und die Näherungslösungen der Wellengleichung genannt, die unter dieser Bedingung erhalten werden?
- Weisen Sie nach, dass die tangentialen und normalen Komponenten des E- und H-Felds an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser mit  $\Delta \ll 1$  näherungsweise stetig sind.

Wir nehmen im Folgenden an, dass sich in der Faser eine Welle mit  $\underline{E}_x \neq 0$  und  $\underline{E}_y = 0$  ausbreitet. Als Lösungsansatz für  $\underline{E}_x$  wählen wir mit  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi < \frac{\pi}{2}$

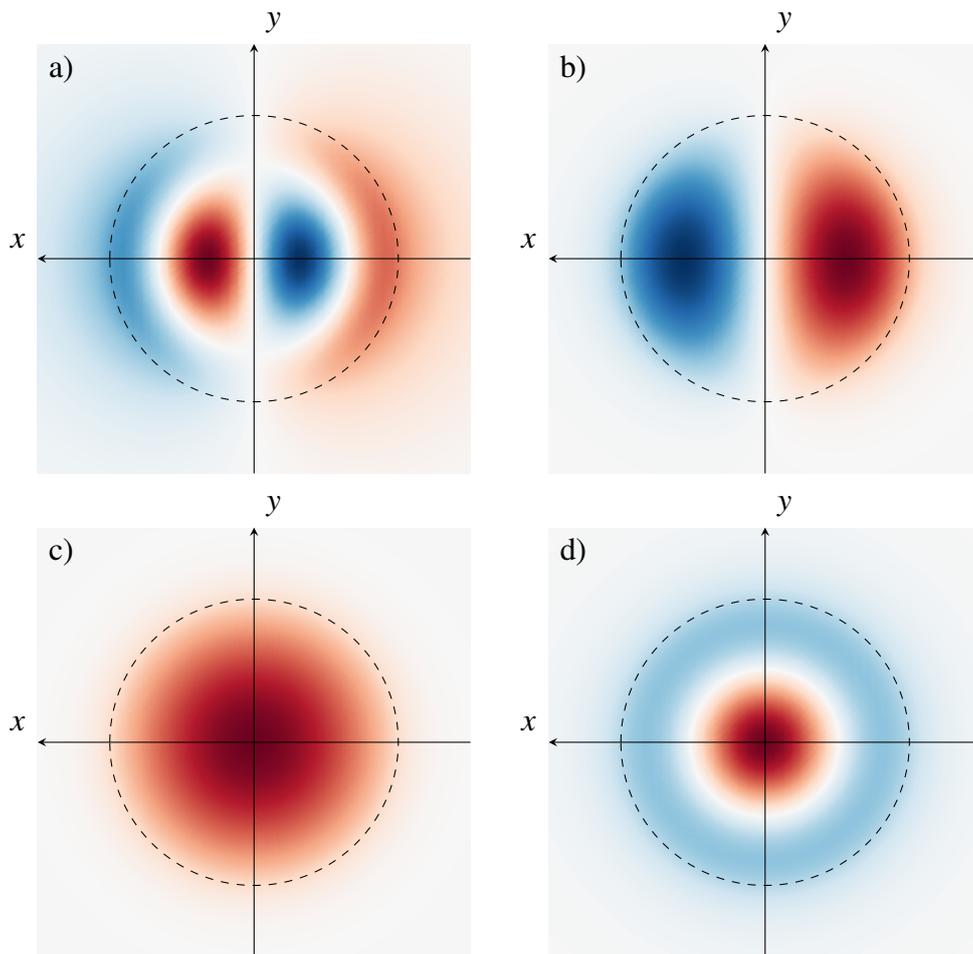
$$\underline{E}_x(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_{x,0} R(\rho) \sin(m\varphi + \psi) \exp(-j\beta_z z) .$$

- Setzen Sie den Ansatz für  $\underline{E}_x$  in die *skalare Helmholtzgleichung* ein. Führen Sie eine Fallunterscheidung für die Fälle  $\rho \leq a$  und  $\rho > a$  durch und weisen Sie nach, dass  $R(\rho)$  jeweils die Besselsche bzw. die modifizierte Besselsche Differentialgleichung erfüllen muss. Beachten Sie dabei, dass  $\underline{E}_x$  in Zylinderkoordinaten gegeben ist.

*Hinweis:* Die Besselsche und modifizierte Besselsche Differentialgleichung lauten

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + (u^2 \rho^2 - m^2) R = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} - (w^2 \rho^2 + m^2) R = 0.$$

- f) Welche Funktionen stellen physikalisch sinnvolle Lösungen der Differentialgleichungen für die Funktion  $R(\rho)$  im Kern bzw. im Mantel dar? Begründen Sie Ihre Wahl.
- g) Abbildung 2 zeigt die Realteile von  $E_x$  in der Stufenindexfaser für ausgewählte LP-Moden. Ordnen Sie den Darstellungen die entsprechenden Modenzahlen  $(m, n)$  zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



**Abbildung 2:** Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer. Die gestrichelten Linien zeigen die Kern-Mantel-Grenzfläche.

Der Radius des Faserkerns betrage nun  $a = 4.5 \mu\text{m}$ . Die Brechzahlen im Kern und Mantel seien  $n_1 = 1.45$  und  $n_2 = 1.447$ .

- h) Wie viele Moden können sich in der Stufenindexfaser bei einer Wellenlänge von  $\lambda_1 = 1550 \text{ nm}$  ausbreiten? Wie viele Moden sind es bei  $\lambda_2 = 850 \text{ nm}$ ? Das BV-Diagramm der linear polarisierten Moden in der Stufenindexfaser finden Sie in Abbildung 1b.

*Hinweis:* Die normierte Frequenz  $V$  in der Stufenindexfaser ist definiert als  $V = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ .

- i) Welche Aussagen können Sie mithilfe von Abbildung 1b über die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Moden bei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  treffen?

*Hinweis:* Die normierte Ausbreitungskonstante  $B$  ist definiert als  $B = \frac{\beta_z^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}$ .

- j) Koppeln wir Licht in eine Stufenindexfaser ein, werden im Allgemeinen alle ausbreitungsfähigen Moden angeregt. Dementsprechend teilt sich dann auch bei der Datenübertragung die Leistung des Informationssignals auf mehrere Moden auf. Welche Konsequenzen hat das Ergebnis aus i) für die Datenübertragung über die Stufenindexfaser bei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ?

### Was Sie bei der Bearbeitung dieses Übungsblatts gelernt haben sollten

- Auf welchen physikalischen Prinzipien die Wellenausbreitung in der Stufenindexfaser beruht.
- Was die schwache Führung ist und welche Konsequenzen diese Eigenschaft eines dielektrischen Wellenleiters hat.
- Welche Form die Lösungen der Wellengleichung in der Stufenindexfaser im Kern und Mantel haben.
- Wie die Moden in der Stufenindexfaser aussehen.
- Welche Parameter des Wellenleiters bzw. der Welle die Zahl der ausbreitungsfähigen Moden bestimmen.
- Welche Rolle Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei der Datenübertragung spielen und welche Unterschiede dabei zwischen den Fasermode bestehen.

### Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum, wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: [sebastian.randel@kit.edu](mailto:sebastian.randel@kit.edu)

Patrick Matalla: [patrick.matalla@kit.edu](mailto:patrick.matalla@kit.edu)

Jonas Krimmer: [jonas.krimmer@kit.edu](mailto:jonas.krimmer@kit.edu)