

Übung 13 - Stufenindexfaser

Montag, 13. Februar 2023

Aufgabe 21:

Wir betrachten eine Glasfaser mit Stufenindexprofil und Kernradius a , in der sich eine elektromagnetische Welle in z -Richtung ausbreitet. Der Faserquerschnitt ist in Abbildung 1a dargestellt. Die Medien seien nichtleitend, raumladungsfrei und nichtmagnetisch mit $\mu = \mu_0$. Die Brechzahlen im Kern bzw. im Mantel seien n_1 bzw. n_2 und es gelte $\Delta \ll 1$.

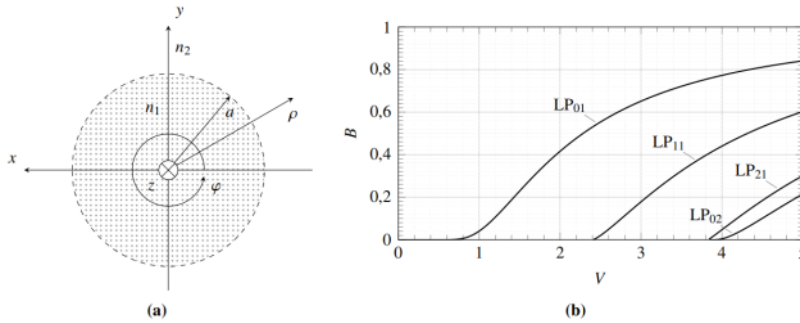


Abbildung 1: (a) Querschnitt der betrachteten Stufenindexfaser. (b) Normierte Ausbreitungskonstanten B der LP-Moden über der normierten Frequenz V .

- a) Benennen und beschreiben Sie das Phänomen, welches die Wellenführung in einem dielektrischen Wellenleiter wie der Glasfaser ermöglicht.

- Wellenführung basiert auf Totalreflektion
- Bedingung: Faserkern (n_1) ist optisch dichter als Fasermantel (n_2), es gilt $n_1 > n_2$.

- b) Welche Stetigkeitsbedingungen müssen für das tangentialen und das normale E-Feld an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser gelten? Wie lauten die entsprechenden Bedingungen für das H-Feld?

- Stetigkeitsbedingungen

$$H_{t1} - H_{t2} = j$$

$$E_{t1} - E_{t2} = 0$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma$$

- Stufenindexfaser dielektrische Materialien $\rightarrow$ keine Oberflächenströme oder Flächenladungen
- Mit $\epsilon_{12} = \epsilon_0 n_{12}^2$ und $\mu = \mu_0$ folgt

$$H_{t1} = H_{t2} \quad E_{t1} = E_{t2}$$

$$H_{n1} = H_{n2} \quad n_1^2 E_{n1} = n_2^2 E_{n2}$$

$\rightarrow$ Alle Feldkomponenten stetig an Grenzfläche!

- c) Wie werden der Fall $\Delta \ll 1$ und die Näherungslösungen der Wellengleichung genannt, die unter dieser Bedingung erhalten werden?

- Im Fall von $\Delta \ll 1$ sprechen wir von schwacher Führung
- Die Näherungslösungen, welche wir so erhalten, bezeichnen wir als linear polarisierte Moden (LP-Moden)

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = \frac{(n_1 - n_2)(n_1 + n_2)}{2n_1^2} \stackrel{n_1 \approx n_2}{\approx} \frac{(n_1 - n_2) 2n_1}{2n_1^2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$$

d) Weisen Sie nach, dass die tangentialen und normalen Komponenten des E- und H-Felds an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser mit $\Delta \ll 1$ näherungsweise stetig sind.

- Aufgabenteil b) berücksichtigt nicht die schwache Führung $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$

$$E_{t1} = \frac{n_2^2}{n_1^2} E_{n2} = \frac{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2}{n_1^2} E_{n2} = (1 - 2\Delta) E_{n2}$$

- Da $\Delta \ll 1$ bzw. $\Delta \rightarrow 0$ gilt (oder $n_1 \approx n_2$)

$$E_{t1} \approx E_{n2}$$

- Folglich gilt für alle Feldkomponenten näherungsweise Stetigkeit an der Grenzfläche.

Wir nehmen im Folgenden an, dass sich in der Faser eine Welle mit $E_x \neq 0$ und $E_y = 0$ ausbreitet. Als Lösungsansatz für E_x wählen wir mit $-\frac{\pi}{2} \leq \psi < \frac{\pi}{2}$

$$E_x(\rho, \varphi, z) = E_{x,0} R(\rho) \sin(m\varphi + \psi) \exp(-j\beta_z z)$$

- e) Setzen Sie den Ansatz für E_x in die skalare Helmholtzgleichung ein. Führen Sie eine Fallunterscheidung für die Fälle $\rho \leq a$ und $\rho > a$ durch und weisen Sie nach, dass $R(\rho)$ jeweils die Besselsche bzw. die modifizierte Besselsche Differentialgleichung erfüllen muss. Beachten Sie dabei, dass E_x in Zylinderkoordinaten gegeben ist.

Hinweis: Die Besselsche und modifizierte Besselsche Differentialgleichung lauten

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + (u^2 \rho^2 - m^2) R = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} - (w^2 \rho^2 + m^2) R = 0.$$

- Vorsicht: Für die Feldkomponenten in kartesischen Koordinaten (E_x, E_y, E_z) darf man die skalare Helmholtzgleichung lösen. Für den Fall, dass E_x, E_y, E_z in Abhängigkeit von Zylinder-Koordinaten gegeben sind, muss man die ebendiese skalare Helmholtzgl. in Zylinder-Koordinaten formulieren.

Betrachtet man die Feldkomponenten in Zylinder-Koordinaten (E_ρ, E_φ, E_z) so muss man bei der Helmholtzgleichung berücksichtigen, dass die jeweiligen Feldkomponenten miteinander verknüpft sind.

Man muss also stets vorsichtig sein, auf welchem Koordinatensystem die Feldkomponenten und die Abhängigkeiten basieren.

- Es folgt daher für die skalare Helmholtzgl. in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

↑
Abh. von jeweiligem Medium

- Kern $\rho \leq a$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + n_1^2 k_0^2 E_x \\ &= \sin(m\varphi + \psi) e^{-j\beta_z z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} R(\rho) - \beta_z^2 R(\rho) + n_1^2 k_0^2 R(\rho) \right) \\ &\quad \text{entweder das hier } = 0 \text{ oder rechte Klammer } \neq 0 \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left((n_1^2 k_0^2 - \beta_z^2) \rho^2 - m^2 \right) R(\rho) \\ &= \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + (u^2 \rho^2 - m^2) R(\rho) \end{aligned}$$

= u^2

- Damit sich Wellen im Faserkern ausbreiten können ist $\beta_z > 0$ und reellwertig. Zudem ist $k_t \in \mathbb{R}$. Aus $k_0^2 = \beta_z^2 + k_t^2$ folgt schließlich $\beta_z < n_0 k_0$, so dass $n_1^2 k_0^2 - \beta_z^2 > 0$.

→ Mit $u^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta_z^2$ entspricht diese Gleichung der Besselschen Differentialgleichung

- Mantel $\rho > a$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + n_2^2 k_0^2 E_x \\ &= \sin(m\varphi + \psi) e^{-j\beta_z z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} R(\rho) - \beta_z^2 R(\rho) + n_2^2 k_0^2 R(\rho) \right) \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left((n_2^2 k_0^2 - \beta_z^2) \rho^2 - m^2 \right) R(\rho) \\ &= \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \left(w^2 \rho^2 - m^2 \right) R(\rho) \end{aligned}$$

= $-w^2$

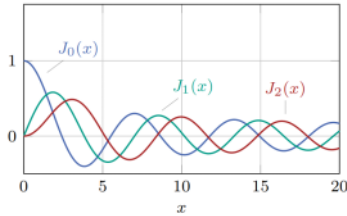
- Wir wissen von der Totalreflexion, dass k_t rein imaginär ist, d.h. $k_t^2 < 0$. Aus diesem Grund folgt aus $k_0^2 = \beta_z^2 + k_t^2$, dass $n_2^2 k_0^2 - \beta_z^2 < 0$ ist und w^2 damit negativ.

$$+ (-|w|^2 p^2 - m^2) = -(|w|^2 p^2 + m^2)$$

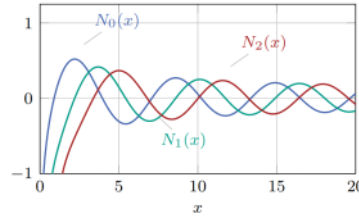
→ Mit $w^2 = \beta_2^2 - n_2^2$ entspricht diese Gleichung der modifizierten Besselschen Differentialgleichung

f) Welche Funktionen stellen physikalisch sinnvolle Lösungen der Differentialgleichungen für die Funktion $R(\rho)$ im Kern bzw. im Mantel dar? Begründen Sie Ihre Wahl.

- Besselfunktionen erster Gattung: $J_m(x)$
- Besselfunktionen zweiter Gattung: $N_m(x)$ (auch Neumann Funktionen)

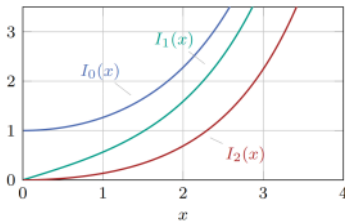


Physikalisch sinnvoll

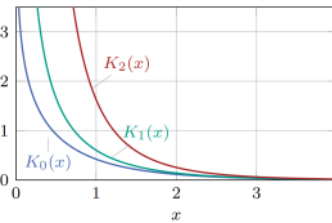


Singularität bei $\rho=0$
→ unendliche Energie
→ physikalisch nicht sinnvoll

- Modifizierte Besselfunktionen erster Gattung: $I_m(x)$
- Modifizierte Besselfunktionen zweiter Gattung: $K_m(x)$ (auch MacDonald-Funktionen)



Divergenz des el-mag Feldes
für $\rho \rightarrow \infty$
→ unendliche Energie in weiter/
unendlicher Distanz zur Glasfaser
→ physikalisch nicht sinnvoll



Ableitendes Feld im Mantel
→ physikalisch sinnvoll

g) Abbildung 2 zeigt die Realteile von E_x in der Stufenindexfaser für ausgewählte LP-Moden. Ordnen Sie den Darstellungen die entsprechenden Modenzahlen (m, n) zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

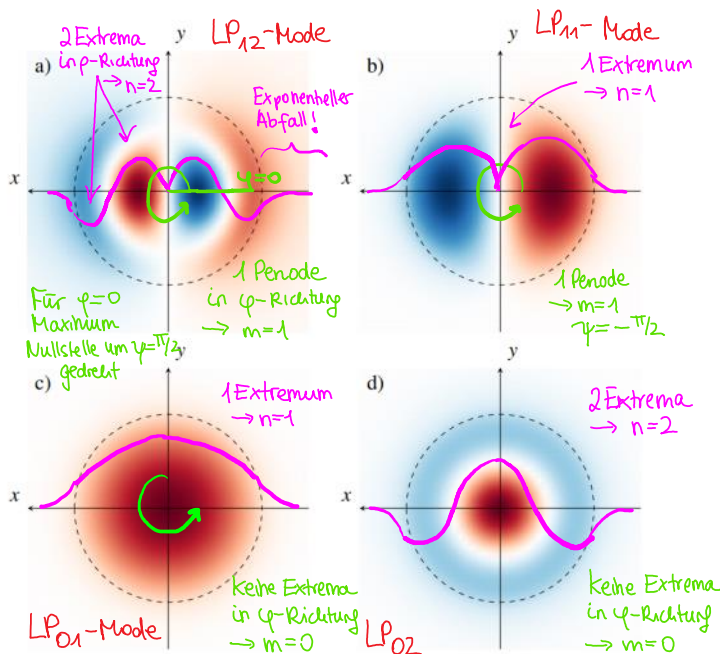


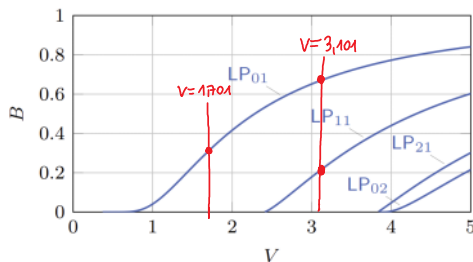
Abbildung 2: Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer. Die gestrichelten Linien zeigen die Kern-Mantel-Grenzfläche.

Der Radius des Faserkerns betrage nun $a = 4.5 \mu\text{m}$. Die Brechzahlen im Kern und Mantel seien $n_1 = 1.45$ und $n_2 = 1.447$.

h) Wie viele Moden können sich in der Stufenindexfaser bei einer Wellenlänge von $\lambda_1 = 1550 \text{ nm}$ ausbreiten? Wie viele Moden sind es bei $\lambda_2 = 850 \text{ nm}$? Das BV-Diagramm der linear polarisierten Moden in der Stufenindexfaser finden Sie in Abbildung 1b.

Hinweis: Die normierte Frequenz V in der Stufenindexfaser ist definiert als $V = ak_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

- Normierte Frequenz $V = ak_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$
- $\lambda_1 = 1550 \text{ nm} \rightarrow V \approx 1,701 \rightarrow \text{Nur LP}_{01}\text{-Mode}$
- $\lambda_2 = 850 \text{ nm} \rightarrow V \approx 3,101 \rightarrow \text{LP}_{01} + \text{zwei entartete LP}_{11}\text{-Moden} \rightarrow \text{Insgesamt 3 Moden}$



i) Welche Aussagen können Sie mithilfe von Abbildung 1b über die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Moden bei λ_1 und λ_2 treffen?

Hinweis: Die normierte Ausbreitungskonstante B ist definiert als $B = \frac{\beta_z^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}$.

- $\omega \propto V$, da $V = \frac{\omega}{c} a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ Konstanten bzw. abhängig von Wellenleiterdimensionierung
- Propagationskonstante $\beta_z(\omega) = \sqrt{B(\omega)(k_1^2 - k_2^2) + k_2^2}$
- Vernachlässigen der Frequenzabh. der Materialien, d.h. $k_1(\omega) = n_1(\omega)k_0 = n_1 k_0$
 $k_2(\omega) = n_2(\omega)k_0 = n_2 k_0$
- Phasengeschwindigkeit $v_{ph}(\omega) = \frac{\omega}{\beta_z(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{B(\omega)(k_1^2 - k_2^2) + k_2^2}}$
- Gruppengeschwindigkeit $v_g(\omega) = \left(\frac{d\beta_z(\omega)}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{2 \sqrt{B(\omega)(k_1^2 - k_2^2) + k_2^2}}{(k_1^2 - k_2^2) B'(\omega)}$

→ Beispiel $\lambda_2 = 850 \text{ nm}$ mit 3 Moden

- LP_{01} und die beiden LP_{11} -Moden haben verschiedene $B \rightarrow$ verschiedene Phasengeschwindigkeiten. Das muss nicht unbedingt ein Problem sein, denn z.B. in der optischen Datenübertragung wird die Information mit der Gruppengeschwindigkeit übertragen.
- Die Gruppengeschwindigkeit ist zusätzlich zu $B(\omega)$ auch von der Steigung von $B'(\omega)$ abhängig. Die LP_{01} -Mode hat nicht nur ein anderes B , sondern auch eine andere Steigung B' , verglichen mit den LP_{11} -Moden.

j) Koppeln wir Licht in eine Stufenindexfaser ein, werden im Allgemeinen alle ausbreitungsfähigen Moden angeregt. Dementsprechend teilt sich dann auch bei der Datenübertragung die Leistung des Informationssignals auf mehrere Moden auf. Welche Konsequenzen hat das Ergebnis aus i) für die Datenübertragung über die Stufenindexfaser bei λ_1 und λ_2 ?

