

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 13

Abgabe bis zum 13.02.2023 um 11:30 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 21:

Wir betrachten eine Glasfaser mit Stufenindexprofil und Kernradius a , in der sich eine elektromagnetische Welle in z -Richtung ausbreitet. Der Faserquerschnitt ist in Abbildung 1a dargestellt. Die Medien seien nichtleitend, raumladungsfrei und nichtmagnetisch mit $\mu = \mu_0$. Die Brechzahlen im Kern bzw. im Mantel seien n_1 bzw. n_2 und es gelte $\Delta \ll 1$.

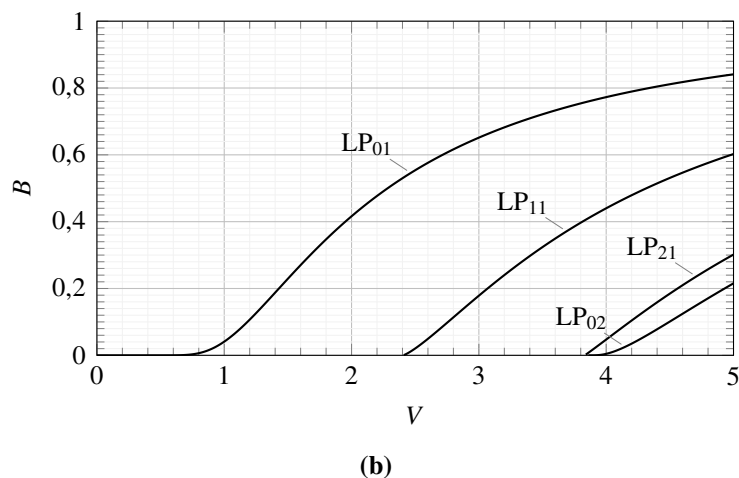
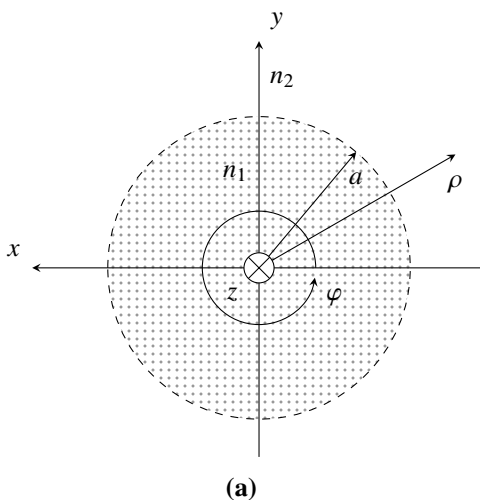


Abbildung 1: (a) Querschnitt der betrachteten Stufenindexfaser. (b) Normierte Ausbreitungskonstanten B der LP-Moden über der normierten Frequenz V .

- a) Benennen und beschreiben Sie das Phänomen, welches die Wellenführung in einem dielektrischen Wellenleiter wie der Glasfaser ermöglicht.

Ges: Phänomen, das Wellenführung in dielektrischem Wellenleiter ermöglicht

Geg: -

Die Wellenführung in einem dielektrischen Wellenleiter basiert auf dem Phänomen der Totalreflexion. Dabei wird Licht, das sich in einem Medium mit dem Brechungsindex n_1 ausbreitet und auf die Grenzfläche zu einem Medium mit Brechungsindex $n_2 < n_1$ trifft, für hinreichend große Winkel gegenüber der Grenzflächennormalen vollständig reflektiert.

- b) Welche Stetigkeitsbedingungen müssen für das tangentielle und das normale E-Feld an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser gelten? Wie lauten die entsprechenden Bedingungen für das H-Feld?

Ges: Stetigkeitsbedingungen für E- und H-Feld

Geg: Medien nichtleitend, raumladungsfrei und $\mu = \mu_0$; Brechzahlen n_1 und n_2

Da alle involvierten Medien nichtleitend sind, können weder Oberflächenströme noch Flächenladungen existieren. Zudem gilt $\epsilon_{1,2} = \epsilon_0 n_{1,2}^2$ sowie $\mu = \mu_0$. Es gilt folglich (siehe

Grenzflächenbedingungen aus Formelsammlung)

$$\begin{aligned} E_{t,1} &= E_{t,2} & H_{t,1} &= H_{t,2} \\ n_1^2 E_{n,1} &= n_2^2 E_{n,2} & H_{n,1} &= H_{n,2} . \end{aligned}$$

Infolgedessen sind alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten bis auf die Normalkomponente des elektrischen Felds stetig.

- c) Wie werden der Fall $\Delta \ll 1$ und die Näherungslösungen der Wellengleichung genannt, die unter dieser Bedingung erhalten werden?

Ges: Bezeichnung $\Delta \ll 1$ und zugehörige Näherungslösung

Geg: -

Im Fall von $\Delta \ll 1$ sprechen wir von schwacher Führung. Die Näherungslösungen, die wir unter Annahme der schwachen Führung erhalten, nennen wir linear polarisierte Moden oder kurz LP-Moden.

- d) Weisen Sie nach, dass die tangentialen und normalen Komponenten des E- und H-Felds an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser mit $\Delta \ll 1$ näherungsweise stetig sind.

Ges: Nachweis Stetigkeit

Geg: $\Delta \ll 1$

In Aufgabenteil b) haben wir die Annahme über die normierte Brechzahldifferenz $\Delta \ll 1$ nicht ausgenutzt. Schreiben wir die Bedingung für die elektrischen Normalkomponenten um, erhalten wir

$$E_{n,1} = \frac{n_2^2}{n_1^2} E_{n,2} \quad \Longleftrightarrow \quad E_{n,1} = \frac{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2}{n_1^2} E_{n,2} \quad \Longleftrightarrow \quad E_{n,1} = (1 - 2\Delta) E_{n,2} .$$

Mit $\Delta \ll 1$ erhalten wir also auch $E_{n,1} \approx E_{n,2}$. Folglich sind alle Feldkomponenten in der Stufenindexfaser bei schwacher Führung näherungsweise stetig.

Wir nehmen im Folgenden an, dass sich in der Faser eine Welle mit $\underline{E}_x \neq 0$ und $\underline{E}_y = 0$ ausbreitet. Als Lösungsansatz für $\underline{E}_x$ wählen wir mit $-\frac{\pi}{2} \leq \psi < \frac{\pi}{2}$

$$\underline{E}_x(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_{x,0} R(\rho) \sin(m\varphi + \psi) \exp(-j\beta_z z) .$$

- e) Setzen Sie den Ansatz für $\underline{E}_x$ in die *skalare Helmholtzgleichung* ein. Führen Sie eine Fallunterscheidung für die Fälle $\rho \leq a$ und $\rho > a$ durch und weisen Sie nach, dass $R(\rho)$ jeweils die Besselsche bzw. die modifizierte Besselsche Differentialgleichung erfüllen muss. Beachten Sie dabei, dass $\underline{E}_x$ in Zylinderkoordinaten gegeben ist.

Hinweis: Die Besselsche und modifizierte Besselsche Differentialgleichung lauten

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + (u^2 \rho^2 - m^2) R = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} - (w^2 \rho^2 + m^2) R = 0 .$$

Ges: Nachweis, dass $R(\rho)$ in die (modifizierte) Besselsche Differentialgleichung erfüllt

Geg: Besselsche und modifizierte Besselsche Differentialgleichung, Ansatz für $\underline{E}_x$

Die skalare Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten lautet

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_x = 0.$$

Da die Wellenzahl k von dem betrachteten Medium abhängig ist, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Beachten wir, dass eine ausbreitungsfähige Welle stets $n_2 k_0 < \beta_z < n_1 k_0$ erfüllen muss, können wir die Differenzialgleichungen für die Funktion $R(\rho)$ ermitteln:

Kern $\rho \leq a$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + n_1^2 k_0^2 \underline{E}_x &= 0 \\ \sin(m\varphi + \psi) \exp(-j\beta_z z) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} R(\rho) - \beta_z^2 R(\rho) + n_1^2 k_0^2 R(\rho) \right) &= 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left((n_1^2 k_0^2 - \beta_z^2) \rho^2 - m^2 \right) R(\rho) &= 0 \\ \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \underbrace{\left((n_1^2 k_0^2 - \beta_z^2) \rho^2 - m^2 \right)}_{u^2} R(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Differenzialgleichung entspricht mit $u^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta_z^2$ gerade der Besselschen Differenzialgleichung, was zu zeigen war.

Mantel $\rho > a$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + n_2^2 k_0^2 \underline{E}_x &= 0 \\ \sin(m\varphi + \psi) \exp(-j\beta_z z) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} R(\rho) - \beta_z^2 R(\rho) + n_2^2 k_0^2 R(\rho) \right) &= 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left((n_2^2 k_0^2 - \beta_z^2) \rho^2 - m^2 \right) R(\rho) &= 0 \\ \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} - \underbrace{\left((\beta_z^2 - n_2^2 k_0^2) \rho^2 + m^2 \right)}_{w^2} R(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Differenzialgleichung entspricht mit $w^2 = \beta_z^2 - n_2^2 k_0^2$ gerade der modifizierten Besselschen Differenzialgleichung, was zu zeigen war.

- f) Welche Funktionen stellen physikalisch sinnvolle Lösungen der Differenzialgleichungen für die Funktion $R(\rho)$ im Kern bzw. im Mantel dar? Begründen Sie Ihre Wahl.

Ges: Physikalisch sinnvolle Lösungen der Besselschen/modifizierten Besselschen DGL

Geg: -

Die Lösungen im Faserkern bzw. im Mantel müssen für alle $\rho \leq a$ bzw. $\rho > a$ physikalisch sinnvoll sein, d.h. sie müssen endliche Energie aufweisen. Folglich stellen im Kern nur die Besselfunktionen erster Gattung, d.h. $J_m(u\rho)$, sinnvolle Lösungen dar, da die Besselfunktionen zweiter

Gattung bei $\rho = 0$ eine Singularität haben. Im Mantel stellen hingegen nur die modifizierten Besselfunktionen zweiter Gattung, d.h. $K_m(w\rho)$ sinnvolle Lösungen dar, da die modifizierten Besselfunktionen erster Gattung für große ρ divergieren.

- g) Abbildung 2 zeigt die Realteile von $\underline{E}_x$ in der Stufenindexfaser für ausgewählte LP-Moden. Ordnen Sie den Darstellungen die entsprechenden Modenzahlen (m, n) zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Ges: Modenzahlen zu den LP-Moden

Geg: Abbildung 2

- Die abgebildete Mode weist eine Periode entlang der azimuthalen Achse auf und besitzt zwei Extrema in radialer Richtung $(m, n) = (1, 2)$. Die Besselfunktion J_1 ist für Argumente kleiner als ihre erste Nullstelle größer null positiv. In $\varphi = 0$ besitzt $\underline{E}_x$ also ein Maximum in azimuthaler Richtung, weshalb $\psi = \frac{\pi}{2}$ gilt.
- Die abgebildete Mode weist eine Periode entlang der azimuthalen Achse auf und besitzt ein Extremum in radialer Richtung $(m, n) = (1, 1)$. Die Besselfunktion J_1 ist für Argumente kleiner als die erste Nullstelle positiv. Für $\varphi = 0$ weist $\underline{E}_x$ ein Minimum auf, es gilt also $\psi = -\frac{\pi}{2}$.
- Die abgebildete Mode ist konstant entlang der azimuthalen Achse und besitzt lediglich ein Extremum auf der Faserachse $(m, n) = (0, 1)$.
- Die abgebildete Mode ist rotationssymmetrisch und besitzt zwei Extrema in radialer Richtung $(m, n) = (0, 2)$.

Der Radius des Faserkerns betrage nun $a = 4.5 \mu\text{m}$. Die Brechzahlen im Kern und Mantel seien $n_1 = 1.45$ und $n_2 = 1.447$.

- h) Wie viele Moden können sich in der Stufenindexfaser bei einer Wellenlänge von $\lambda_1 = 1550 \text{ nm}$ ausbreiten? Wie viele Moden sind es bei $\lambda_2 = 850 \text{ nm}$? Das BV-Diagramm der linear polarisierten Moden in der Stufenindexfaser finden Sie in Abbildung 1b.

Hinweis: Die normierte Frequenz V in der Stufenindexfaser ist definiert als $V = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

Ges: Ausbreitungsfähige Moden bei λ_1 und λ_2

Geg: Abbildung 1b

Im Fall von $\lambda_1 = 1550 \text{ nm}$ bzw. $\lambda_2 = 850 \text{ nm}$ erhalten wir $V \approx 1.701$ bzw. $V \approx 3.101$. Bei $\lambda = \lambda_1$ ist also ausschließlich die LP_{01} -Mode, d.h. nur eine einzige Mode, ausbreitungsfähig. Bei $\lambda = \lambda_2$ hingegen sind zudem die *zwei* LP_{11} -Moden, d.h. drei Moden, ausbreitungsfähig.

- i) Welche Aussagen können Sie mithilfe von Abbildung 1b über die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Moden bei λ_1 und λ_2 treffen?

Hinweis: Die normierte Ausbreitungskonstante B ist definiert als $B = \frac{\beta_z^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}$.

Ges: Aussagen über Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Geg: V-Parameter aus h), Abbildung 1b

Aus der Definition von B erhalten wir mit $\omega \propto V$, dass

$$\beta_z(\omega) = \sqrt{B(\omega) (k_1^2 - k_2^2) + k_2^2}.$$

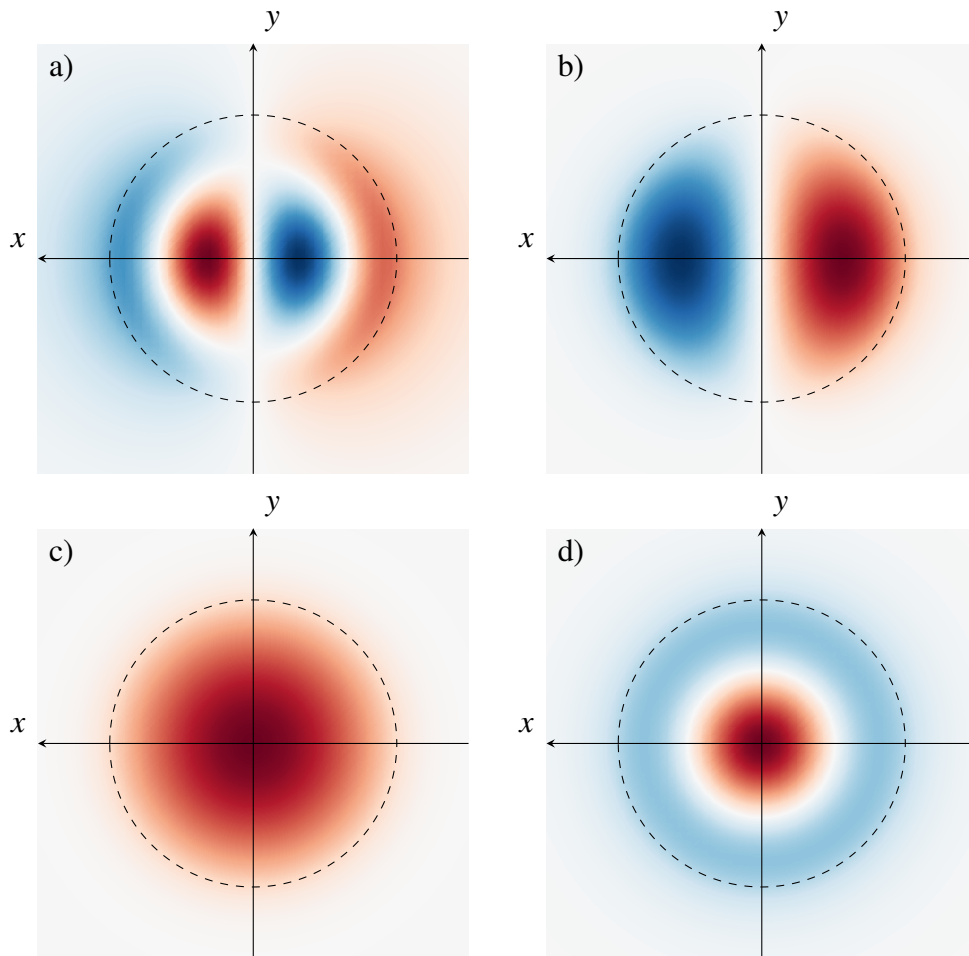


Abbildung 2: Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer. Die gestrichelten Linien zeigen die Kern-Mantel-Grenzfläche.

Vernachlässigen wir die Frequenzabhängigkeit der Medien in Kern und Mantel (vgl. Vorlesung 4), erhalten wir mit den Definitionen der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}}(\omega) = \frac{\omega}{\beta_z(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{B(\omega) (k_1^2 - k_2^2) + k_2^2}}$$

$$v_{\text{gr}}(\omega) = \left(\frac{d\beta_z(\omega')}{d\omega'} \bigg|_{\omega'=\omega} \right)^{-1} = \frac{2\sqrt{B(\omega) (k_1^2 - k_2^2) + k_2^2}}{(k_1^2 - k_2^2) B'(\omega)}.$$

Wir erkennen also, dass insbesondere die Gruppengeschwindigkeit auch von der Steigung im BV-Diagramm abhängt. Bei $\lambda = \lambda_1$ breitet sich eine Mode aus, deren Phasen- und Gruppengeschwindigkeit wir prinzipiell mithilfe des Diagramms abschätzen könnten. Bei $\lambda = \lambda_2$ hingegen breiten sich drei Moden aus, für die sich bei gegebenem V nicht nur der Wert von B , sondern auch die Steigung $\propto B'$ unterscheiden. Wir können also schlussfolgern, dass die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten der einzelnen (nicht-degenerierten) Fasermode verschieden sind.

- j) Koppeln wir Licht in eine Stufenindexfaser ein, werden im Allgemeinen alle ausbreitungsfähigen Moden angeregt. Dementsprechend teilt sich dann auch bei der Datenübertragung die Leistung des Informationssignals auf mehrere Moden auf. Welche Konsequenzen hat das Ergebnis aus i) für die Datenübertragung über die Stufenindexfaser bei λ_1 und λ_2 ?

Ges: Einfluss mehrerer Moden auf Datenübertragung

Geg: Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten verschiedener Moden aus i)

In Aufgabenteil i) haben wir festgestellt, dass die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten der Fasermode nicht identisch sind. Für die Geschwindigkeit, mit der ein Informationssignal die Faser durchquert, ist letztendlich nur die Gruppengeschwindigkeit relevant. Während bei $\lambda = \lambda_1$ nur eine Mode ausbreitungsfähig ist und damit das Informationssignal nur eine Trägermode mit gegebener Gruppengeschwindigkeit besitzt, sind für $\lambda = \lambda_2$ drei Moden ausbreitungsfähig, von denen sich zwei in ihrer Gruppengeschwindigkeit unterscheiden. Infolgedessen wird der Teil des Signals, der von der LP_{01} -Mode geführt wird, eine andere Laufzeit zwischen Faseranfang und -ende aufweisen, als der Teil, der von den LP_{11} -Moden geführt wird. Ist diese Laufzeitdifferenz nicht gerade viel kürzer als die Dauer eines Datensymbols, beobachten wir am Empfänger bei $\lambda = \lambda_2$ ein verzerrtes Signal.

Was Sie bei der Bearbeitung dieses Übungsblatts gelernt haben sollten

- Auf welchen physikalischen Prinzipien die Wellenausbreitung in der Stufenindexfaser beruht.
- Was die schwache Führung ist und welche Konsequenzen diese Eigenschaft eines dielektrischen Wellenleiters hat.
- Welche Form die Lösungen der Wellengleichung in der Stufenindexfaser im Kern und Mantel haben.
- Wie die Moden in der Stufenindexfaser aussehen.
- Welche Parameter des Wellenleiters bzw. der Welle die Zahl der ausbreitungsfähigen Moden bestimmen.
- Welche Rolle Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei der Datenübertragung spielen und welche Unterschiede dabei zwischen den Fasermode bestehen.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum, wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu