Formelsammlung
zur Vorlesung
Elektromagnetische Wellen

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel
Christoph Füllner und Mareike Trappen

Wintersemester 2019/20

Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Photonik und Quantenelektronik

Tabelle 1: **Ortsvektoren**

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
x	$\rho\cos(\phi)$	$r\sin(\vartheta)\cos(\phi)$
y	$\rho\sin(\phi)$	$r\sin(\vartheta)\sin(\phi)$
z	z	$r\cos(\vartheta)$
$\sqrt{x^2+y^2}$	ρ	$r\sin(\vartheta)$
$\arctan(\frac{y}{x})$	ϕ	ϕ
z	z	$r\cos(\vartheta)$
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\sqrt{\rho^2+z^2}$	r
$\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$	$\arctan(\frac{\rho}{z})$	ϑ
$\arctan(\frac{y}{x})$	ϕ	ϕ

Tabelle 2: **Komponenten eines Vektorfeldes**

Kartesische Koordinaten $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$	Zylinderkoordinaten $A_\rho\mathbf{e}_\rho + A_\phi\mathbf{e}_\phi + A_z\mathbf{e}_z$	Kugelkoordinaten $A_r\mathbf{e}_r + A_\phi\mathbf{e}_\phi + A_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta$
A_x	$A_\rho\cos(\phi) - A_\phi\sin(\phi)$	$A_r\sin(\vartheta)\cos(\phi) + A_\vartheta\cos(\vartheta)\cos(\phi) - A_\phi\sin(\phi)$
A_y	$A_\rho\sin(\phi) + A_\phi\cos(\phi)$	$A_r\sin(\vartheta)\sin(\phi) + A_\vartheta\cos(\vartheta)\sin(\phi) - A_\phi\cos(\phi)$
A_z	A_z	$A_r\cos(\vartheta) - A_\vartheta\sin(\vartheta)$
$A_x\cos(\phi) + A_y\sin(\phi)$	A_ρ	$A_r\sin(\vartheta) + A_\vartheta\cos(\vartheta)$
$-A_x\sin(\phi) + A_y\cos(\phi)$	A_ϕ	A_ϕ
A_z	A_z	$A_r\cos(\vartheta) - A_\vartheta\sin(\vartheta)$
$A_x\sin(\vartheta)\cos(\phi) + A_y\sin(\vartheta)\sin(\phi) + A_z\cos(\vartheta)$	$A_\rho\sin(\vartheta) + A_z\cos(\vartheta)$	A_r
$A_x\cos(\vartheta)\cos(\phi) + A_y\cos(\vartheta)\sin(\phi) - A_z\sin(\vartheta)$	$A_\rho\cos(\vartheta) - A_z\sin(\vartheta)$	A_ϑ
$-A_x\sin(\phi) + A_y\cos(\phi)$	A_ϕ	A_ϕ

Tabelle 3: **Linien-, Flächen- und Volumenelemente**

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\mathrm{d}\,\mathbf{s}$	$\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}x + \mathbf{e}_y\,\mathrm{d}y + \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}z$	$\mathbf{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho + \mathbf{e}_\phi\,\rho\mathrm{d}\phi + \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}z$	$\mathbf{e}_r\,\mathrm{d}r + \mathbf{e}_\vartheta\,r\,\mathrm{d}\vartheta + \mathbf{e}_\phi\,r\,\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\phi$
$\mathrm{d}\mathbf{f}$	$\mathbf{e}_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathbf{e}_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\mathbf{e}_\rho\,\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z + \mathbf{e}_\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z + \mathbf{e}_z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$	$\mathbf{e}_r\,r^2\,\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi + \mathbf{e}_\vartheta\,r\,\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi + \mathbf{e}_\phi\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$
$\mathrm{d}v$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi$

Tabelle 4: **Nabla-Operator**

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
∇	$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta$

Tabelle 5: **Differentialoperatoren**

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\nabla\psi$	$\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z$	$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z$	$\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$
$\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\mathbf{A}_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbf{A}_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\mathbf{A}_\mathbf{z}}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r\mathbf{A}_\mathbf{r})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial(\sin(\vartheta)\mathbf{A}_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\mathbf{A}_\phi}{\partial\phi}$
$\nabla\times\mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathbf{A}_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial\phi} - \frac{\partial\mathbf{A}_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho$	$\left(\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\left[\frac{\partial(\sin(\vartheta)\mathbf{A}_\phi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\mathbf{A}_\vartheta}{\partial\phi}\right]\right)\mathbf{e}_r$
	$+\left(\frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y$	$+\left(\frac{\partial\mathbf{A}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial\mathbf{A}_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\phi$	$+\left(\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\mathbf{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial\vartheta}\right]\right)\mathbf{e}_\phi$
	$+\left(\frac{\partial\mathbf{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$	$+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\mathbf{A}_\phi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbf{A}_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z$	$+\left(\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\mathbf{A}_\phi)}{\partial r}\right]\right)\mathbf{e}_\vartheta$
$\Delta\psi = \nabla^2\psi$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$

Tabelle 6: **Naturkonstanten**

Größe	Symbol	Wert und Einheit
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8,8541878128 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c_0	299792468 m/s $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s
Wellenwiderstand im Vakuum	Z_0	$376,730313667(57)\ \Omega \approx 120\pi\ \Omega$

Tabelle 7: **Maxwellsche Gleichungen**

	Differentielle Form	Integralform
Durchflutungsgesetz	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_{S=\partial F} \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_F \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\mathbf{F}$
Induktionsgesetz	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{S=\partial F} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{F}$
Gaußsches Gesetz	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_{O=\partial V} \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{F} = \int_V \rho \mathrm{d}V = Q$
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_{O=\partial V} \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{F} = 0$

$O = \partial V$ (bzw. $S = \partial F$) unterhalb des Integralsymbols bedeutet hier, dass die Oberfläche (Strecke), über die integriert wird gerade dem Rand des Volumens V (Rand der Fläche F) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens entsprechen muss.

Tabelle 8: **Materialgleichungen**

allgemein	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$
für lineare, isotrope Medien	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$
	$\mathbf{P} = \chi_{el} \varepsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \chi_m \mu_0 \mathbf{H}$

Für lineare, isotrope Medien gilt das Ohmsche Gesetz: $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$.

Tabelle 9: **Wellengleichungen**

	Nicht leitende Materialien	Leitende Materialien
für lineare, homogene Medien	$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ (Allg. Wellengleichung)	$\Delta \mathbf{E} - \kappa\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ (Telegraphengleichung)
für lineare, homogene Medien und harmonische Anregung	$\Delta \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = 0$ (Helmholtzgleichung)	$\Delta \underline{\mathbf{E}} - \mathrm{j}\omega\kappa\mu \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = 0$

Tabelle 10: **Lösungen der Wellengleichungen**

Ebene Welle	$E(z,t) = f(z - ct) + g(z + ct)$
Ebene, harmonische Welle	$\underline{E}(z,t) = E(z)\, e^{\mathrm{j}(\omega t \mp kz)}$

Für harmonische Zeitabhängigkeit ergibt sich die zeitliche Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ durch eine Multiplikation mit dem Vorfaktor $\mathrm{j}\omega$.

Tabelle 11: **Wellengrößen**

Reelle Wellenzahl	$k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$
Komplexe Wellenzahl	$\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) = \pm(\beta - j\alpha)$
Komplexe Permittivität für leitfähige Materialien	$\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r - \mathrm{j}\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}$
Wellenwiderstand	$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \mp\frac{E_0}{H_0}$
Poynting-Vektor	$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$
Komplexer Poynting-Vektor	$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right]$
Wirkleistung	$\Re\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\}$
Blindleistung	$\Im\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\}$
Elektr. Energiedichte	$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$
Magn. Energiedichte	$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$
Phasengeschwindigkeit	$v_\mathrm{ph} = \frac{\omega(\beta)}{\beta}$
Gruppengeschwindigkeit	$v_\mathrm{gr} = \frac{\mathrm{d}\omega(\beta)}{\mathrm{d}\beta}$

Tabelle 12: **Hertzscher Dipol**

Dipolmoment	$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{e} = Q_0\,\Delta s\, e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathbf{e}_z = \frac{I_0\,\Delta s}{\mathrm{j}\,\omega} e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathbf{e}_z$
Elektrisches Feld	$E_r = \frac{\Delta p_e}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos(\vartheta)}{r^3}$
	$E_\vartheta = \frac{\Delta p_e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin(\vartheta)}{r^3}$

Tabelle 13: **Polarisation und Jones-Vektor**

Transversale Feldkomponenten	$\underline{E}_x(t) = E_0\,\underline{a}_x\,e^{\mathrm{j}\omega t}$
	$\underline{E}_y(t) = E_0\,\underline{a}_y\,e^{\mathrm{j}\omega t}$
Normierte komplexe Amplitude	$\underline{a}_x = a_x e^{\mathrm{j}\varphi_x}$
	$\underline{a}_y = a_y e^{\mathrm{j}\varphi_y}$
	$\lvert\underline{a}_x\rvert^2 + \lvert\underline{a}_y\rvert^2 = 1$
Jones-Vektor	$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix}$