

Aufgabe 1 - Grenzflächenübergang

Eine homogene, harmonische, ebene Welle mit der magnetischen Feldstärke

$$\underline{\mathbf{H}}_e = H_e e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \mathbf{r})} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

breitet sich im Vakuum aus und trifft bei $z = 0$ unter dem Einfallswinkel α_e auf eine Grenzfläche (siehe Abbildung 1). Das Material im Halbraum $z > 0$ sei zunächst unbekannt.

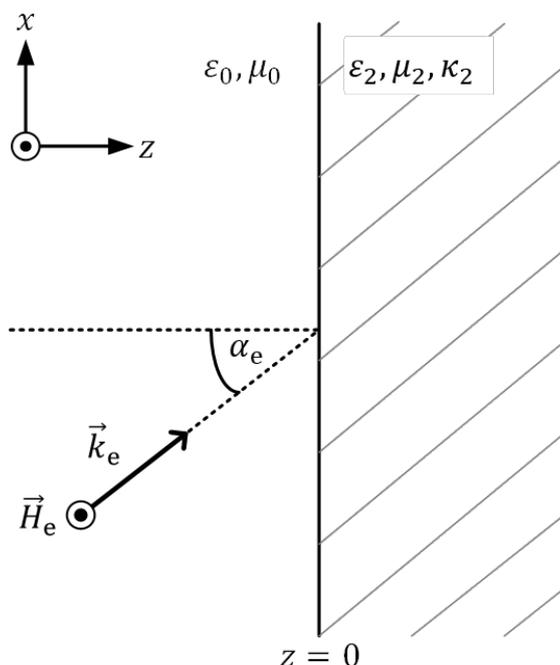


Abbildung 1

- Geben Sie zunächst für die einfallende Welle die Komponenten des Wellenvektors \mathbf{k}_e an. Berechnen Sie zudem die elektrische Feldstärke $\underline{\mathbf{E}}_e$ in Abhängigkeit von H_e unter Verwendung der allgemein gültigen Maxwellgleichungen.
- Zeichnen Sie den elektrischen Feldstärkevektor $\underline{\mathbf{E}}_e$ der einfallenden Welle in die Abbildung 1 der Aufgabenstellung ein. Um welche Polarisation handelt es sich?
- In Abbildung 2 (siehe nächste Seite) ist der Reflexionsfaktor für parallele Polarisation r_p über dem Einfallswinkel α_e aufgetragen. Ergänzen Sie die Abbildung um eine qualitative Skizze des Reflexionsfaktors für senkrechte Polarisation r_s . Kennzeichnen Sie in der Abbildung zusätzlich den Brewster-Winkel. Worin besteht der Unterschied zwischen den beiden Polarisationen? Erläutern Sie.

Hinweis: Der Reflexionsfaktor an der Grenzfläche sei für $\kappa_2 = 0$ allgemein gegeben durch

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_e) - \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_t)}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_t)} \quad r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e) - \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_t)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_t)},$$

wobei α_t der Transmissionswinkel hinter der Grenzfläche ist.

Das Material im Halbraum $z > 0$ sei im Folgenden ein idealer Leiter mit $\kappa_2 \rightarrow \infty$.

- Geben Sie die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes der reflektierten Welle in Abhängigkeit von H_e an.

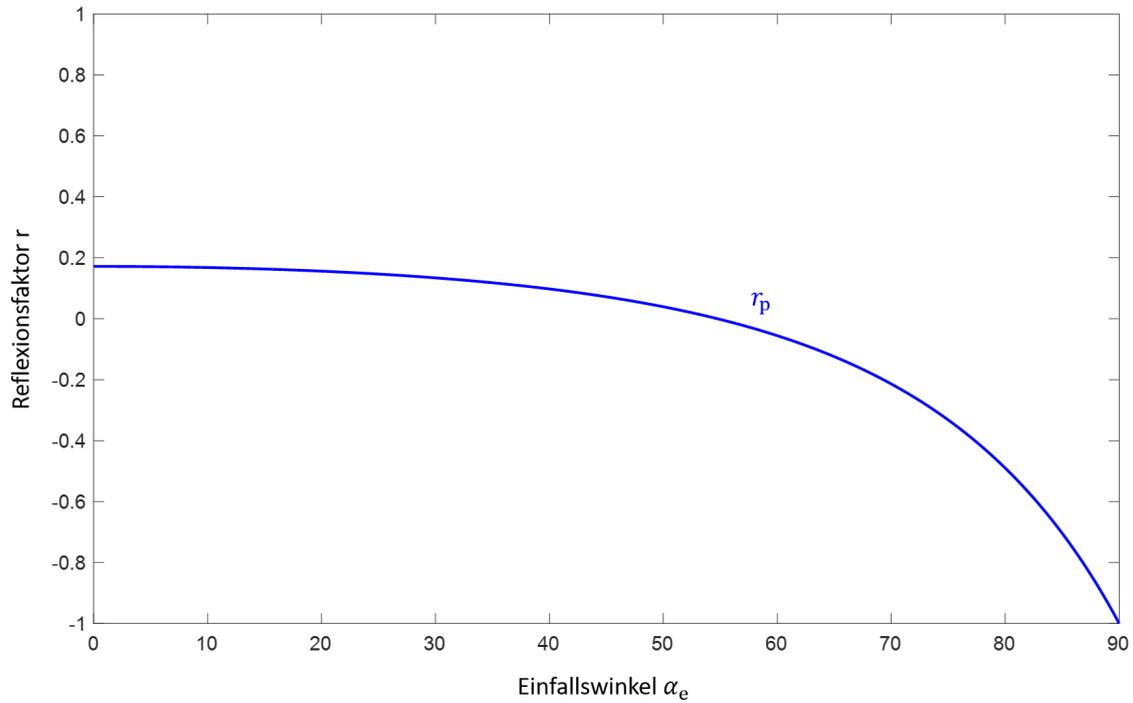


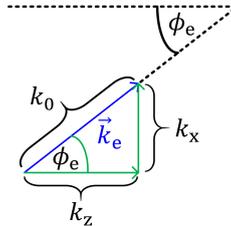
Abbildung 2

- e) Berechnen Sie im Halbraum $z < 0$ die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes der resultierenden stehenden Welle, d.h. der Überlagerung aus hinlaufender und reflektierter Welle. Hinweis: Das Reflexionsgesetz $\alpha_e = \alpha_r$ wird als bekannt vorausgesetzt.
- f) An welchen Stellen auf der z -Achse könnten ideal leitende Platten (parallel zur xy -Ebene) eingebracht werden, ohne die Gestalt der stehenden Welle zu verändern?

Lösung 1 - Grenzflächenübergang

- a) Es lässt sich mit Hilfe geometrischer Beziehungen (siehe Abbildung) leicht zeigen, dass der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{k}_e = k_0 \sin(\alpha_e) \mathbf{e}_x + k_0 \cos(\alpha_e) \mathbf{e}_z, \text{ mit } k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}.$$



Einsetzen des Wellenvektors in die Gleichung für das magnetische Feld ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_e &= H_e e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \mathbf{r})} \mathbf{e}_y \\ &= H_e e^{j(\omega t - (k_0 \sin(\alpha_e) \mathbf{e}_x + k_0 \cos(\alpha_e) \mathbf{e}_z)(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z))} \mathbf{e}_y \\ &= H_e e^{j(\omega t - k_0 \sin(\alpha_e) x - k_0 \cos(\alpha_e) z)} \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

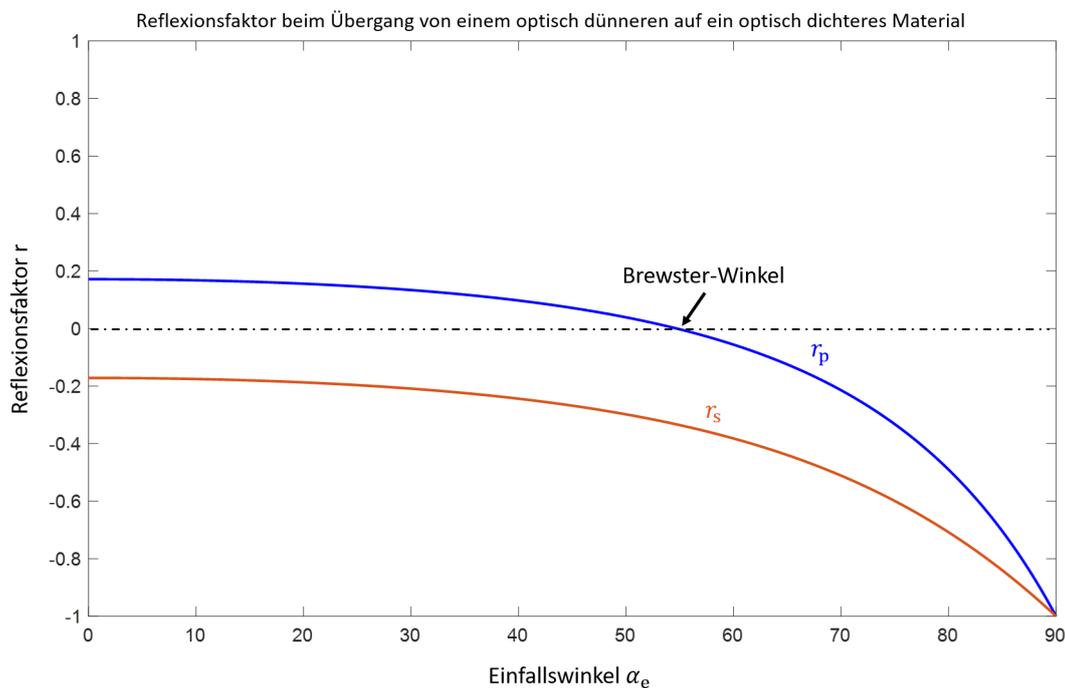
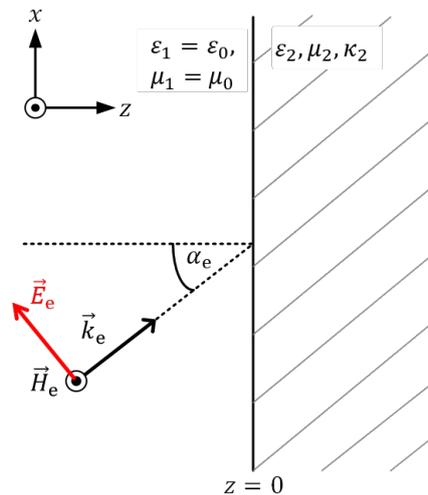
Mit dem Durchflutungsgesetz für Vakuum finden wir aufgrund der unendlichen Ausdehnung der Wellenfront der ebenen Welle in y -Richtung $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$ sowie der Schwingungsrichtung des magnetischen Feldes (y -Richtung)

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_e &= j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}_e \\ &= \left(\frac{\partial \underline{H}_{e,z}}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_{e,y}}{\partial z}\right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial \underline{H}_{e,x}}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_{e,z}}{\partial x}\right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial \underline{H}_{e,y}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_{e,x}}{\partial y}\right) \mathbf{e}_z + \\ &= -\frac{\partial \underline{H}_{e,y}}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \underline{H}_{e,y}}{\partial x} \mathbf{e}_z = jk_0 \cos(\alpha_e) \underline{H}_e \mathbf{e}_x - jk_0 \sin(\alpha_e) \underline{H}_e \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Vorsicht: es gilt weder $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, noch $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, da sich die ebene Welle nicht entlang einer der Koordinatenachsen ausbreitet, sondern in einem Winkel α_e zur z - bzw. x -Achse. Für das elektrische Feld ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_e &= \frac{k_0}{\omega \varepsilon} \cos(\alpha_e) \underline{H}_e \mathbf{e}_x - \frac{k_0}{\omega \varepsilon} \sin(\alpha_e) \underline{H}_e \mathbf{e}_z \\ &= \frac{k_0}{\omega \varepsilon} [\cos(\alpha_e) \mathbf{e}_x - \sin(\alpha_e) \mathbf{e}_z] \underline{H}_e. \end{aligned}$$

- b) Die rot markierten Elemente müssen hinzugefügt werden. Es handelt sich um eine parallel polarisierte Welle (oder auch TM -Welle), da das elektrische Feld in der Einfallsebene liegt.
- c) Der Brewster-Winkel ist der Winkel, bei dem der Reflexionsfaktor den Wert 0 annimmt. Er kann nur für die parallele Polarisation erreicht werden, da für diese der Reflexionsfaktor positive und negative Werte annehmen kann, wohingegen bei senkrechter Polarisation nur negative Werte möglich sind.



Nebenrechnung: Die Randstellen der Kurve können mit Hilfe des Hinweises und des Brechungsgesetzes $\sin(\alpha_e)\sqrt{\varepsilon_1} = \sin(\alpha_t)\sqrt{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \alpha_t = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)\right)$ bestimmt werden.

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_e) - \sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)\right)\right)}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)\right)\right)}$$

$$\Rightarrow r_p|_{\alpha_e=0^\circ} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} > 0 \qquad \Rightarrow r_p|_{\alpha_e=90^\circ} = -1$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e) - \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)\right)\right)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)\right)\right)}$$

$$\Rightarrow r_s|_{\alpha_e=0^\circ} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} = -r_p|_{\alpha_e=0^\circ} < 0 \qquad \Rightarrow r_s|_{\alpha_e=90^\circ} = -1$$

d) Der harmonische Ansatz gilt auch für die reflektierte Welle mit $\underline{E}_r = \underline{E}_r e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r r)}$. Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes muss am Grenzübergang stetig sein. Andererseits

verschwindet das elektrische Feld hinter der Grenzfläche aufgrund der unendlichen Leitfähigkeit ($\kappa \rightarrow \infty$) des idealen Leiters. Somit folgt: $\underline{E}_{\tan 1} = \underline{E}_{\tan 2} \Leftrightarrow \underline{E}_{e,\tan} + \underline{E}_{r,\tan} = 0 \Leftrightarrow \underline{E}_{r,\tan} = -\underline{E}_{e,\tan}$. Eine Tangentialkomponente ist lediglich die x -Komponente des elektrischen Feldes.

$$\Rightarrow \underline{E}_{r,\tan} = -\underline{E}_{e,\tan} = -\underline{E}_{e,x} = -\frac{k_0}{\omega \varepsilon} \cos(\alpha_r) \underline{H}_e e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}$$

Für den Wellenvektor der reflektierten Welle gilt dabei

$$\mathbf{k}_r = k_0 \sin(\alpha_r) \mathbf{e}_x - k_0 \cos(\alpha_r) \mathbf{e}_z, \text{ mit } k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

e) Mit $Z_e = \frac{k_0}{\omega \varepsilon}$ und unter Ausnutzung des Reflexionsgesetzes folgt

$$\begin{aligned} \underline{E}_{r,\tan} = \underline{E}_{r,x} &= -Z_e \cos(\alpha_e) \underline{H}_e e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}, \\ \underline{E}_{e,\tan} = \underline{E}_{e,x} &= Z_e \cos(\alpha_e) \underline{H}_e e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}. \end{aligned}$$

Für die Überlagerung erhält man damit

$$\begin{aligned} \underline{E}_{e,x} + \underline{E}_{r,x} &= \underline{H}_e Z_e \cos(\alpha_e) [e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} - e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}] \\ &= \underline{H}_e Z_e \cos(\alpha_e) [e^{j(\omega t - k_0 \sin(\alpha_e)x - k_0 \cos(\alpha_e)z)} - e^{j(\omega t - k_0 \sin(\alpha_e)x + k_0 \cos(\alpha_e)z)}] \\ &= \underline{H}_e Z_e \cos(\alpha_e) e^{j(\omega t - k_0 \sin(\alpha_e)x} [e^{-jk_0 \cos(\alpha_e)z} - e^{jk_0 \cos(\alpha_e)z}] \\ &= \underline{H}_e Z_e \cos(\alpha_e) e^{j(\omega t - k_0 \sin(\alpha_e)x} (-2j) \sin(k_0 \cos(\alpha_e)z). \end{aligned}$$

Dies entspricht einer stehenden Welle.

f) Ideal leitende Platten können an allen Stellen auf der z -Achse eingebracht werden, ohne die Gestalt der stehenden Welle zu verändern, an denen sich ein Knoten (eine Nullstelle) der stehenden Welle befindet.

$$\begin{aligned} \underline{E}_{e,x} + \underline{E}_{r,x} &\stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \sin(k_0 \cos(\alpha_e)z) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow k_0 \cos(\alpha_e)z &= n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{n\pi}{k_0 \cos(\alpha_e)}, \end{aligned}$$

da $\underline{H}_e \geq 0$, $Z_e \geq 0$, $e^{j(\omega t - k_0 \sin(\alpha_e)x} \geq 0$, $-2j \neq 0$ und $\cos(\alpha_e) = 0$ nur für den Fall, dass $\alpha_e = 90^\circ$, der hier nicht vorliegt.

Für die erlaubten Stellen auf der z -Achse gilt die Einschränkung, dass $z \leq 0$, da sich die Grenzfläche bei $z = 0$ befindet. Mit $k_0 > 0$ und $\cos(\alpha_e) \leq 0$ für $\alpha_e \in [0^\circ, 90^\circ]$, muss somit $n \in \mathbb{Z}^-$ gelten.

Aufgabe 2 - Parallelplattenleitung

Gegeben sei eine Parallelplattenleitung bestehend aus zwei idealleitenden Platten ($\kappa \rightarrow \infty$), die in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnt sind (siehe Abbildung 3). Die Platten haben einen Abstand a zueinander und sind von Vakuum umgeben.

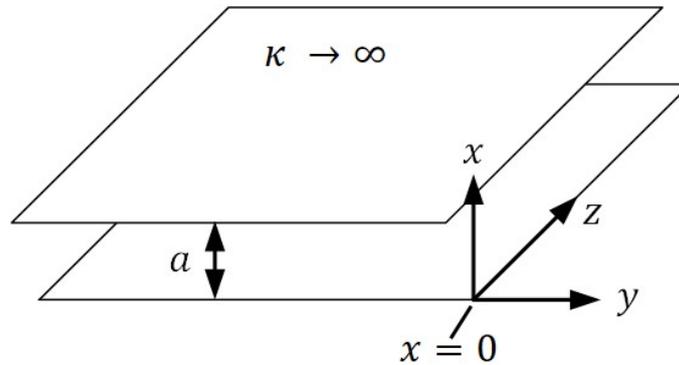


Abbildung 3

Zwischen den Platten breitet sich eine E -Welle (bzw. TM -Welle) in positive z -Richtung aus.

- a) Geben Sie die relevanten Randbedingungen für das elektrische Feld an und begründen Sie anschaulich, wie es zu diesen Randbedingungen kommt. Weisen Sie rechnerisch nach, welche der beiden unten angegebenen Funktionen für $E_z(x, y, z, t)$ den Randbedingungen genügt.

$$(1) E_z = A \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \quad (2) E_z = A \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

- b) Geben Sie alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten der sich ausbreitenden Welle vollständig an.

Hinweis: Nutzen Sie die folgenden Beziehungen aus, die sich direkt aus den Maxwellgleichungen ergeben.

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + j \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right) \\ \underline{E}_y &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - j \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right) \\ \underline{H}_x &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} - j \omega \epsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right) \\ \underline{H}_y &= -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + j \omega \epsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

- c) Um welche E -Mode (bzw. TM -Mode) handelt es sich? Skizzieren Sie den Verlauf der Mode über dem Querschnitt des Wellenleiters. Geben Sie zudem die allgemeine Definition der Wellenzahl k_x in x -Richtung an.

- d) Berechnen Sie die Cut-off-Frequenz der vorliegenden E -Mode (bzw. TM -Mode) in Abhängigkeit des Plattenabstands a . Starten Sie dazu von der allgemeinen Wellengleichung aus.

Hinweis: Die Cut-off-Frequenz ist die Frequenz, ab der sich eine Mode im Wellenleiter ausbreiten kann.

- e) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor und die Richtung des Energieflusses im Wellenleiter. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
- f) In einer Parallelplattenleitung sind auch TEM -Wellen ausbreitungsfähig. Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen für harmonische Wellen rechnerisch die Cut-off-Frequenz der TEM -Grundmode her. Wie viele TEM -Moden existieren?

Lösung 2 - Parallelplattenleitung

- a) An den Grenzflächen zwischen Vakuum und den Leiterplatten müssen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes (in diesem Fall also die z -Komponente, da $\underline{E}_y = 0$ aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Wellenleiters) stetig sein. Zugleich kann in den idealleitenden Platten kein elektrisches Feld bestehen und das elektrische Feld muss an den Grenzübergängen den Wert 0 annehmen.

$$\underline{E}_z(x = 0, y, z) = 0 \quad \underline{E}_z(x = a, y, z) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

Diesen Randbedingungen genügt lediglich Gleichung (1).

$$(1) \quad \underline{E}_z(x = 0, y, z) = A \sin(0) = 0 \quad (2) \quad \underline{E}_z(x = a, y, z) = A \cos(0) \neq 0 \text{ für } A \neq 0$$

$$(1) \quad \underline{E}_z(x = a, y, z) = A \sin(a\pi) = 0,$$

wobei $\underline{E}_z = E_z e^{j(\omega t - k_z z)}$.

- b) Die zugehörigen Amplituden der Feldkomponenten sind:

$$\underline{E}_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + j \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right) = -\frac{j k_z A}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \frac{3\pi}{a} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{E}_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - j \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\underline{H}_x = -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} - j \omega \epsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right) = 0$$

$$\underline{H}_y = -\frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \left(j k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + j \omega \epsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right) = -\frac{j \omega \epsilon A}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \frac{3\pi}{a} e^{j(\omega t - k_z z)}.$$

Die Feldkomponenten ergeben sich durch Multiplikation der Amplituden mit dem Phasenterm $e^{j(\omega t - k_z z)}$.

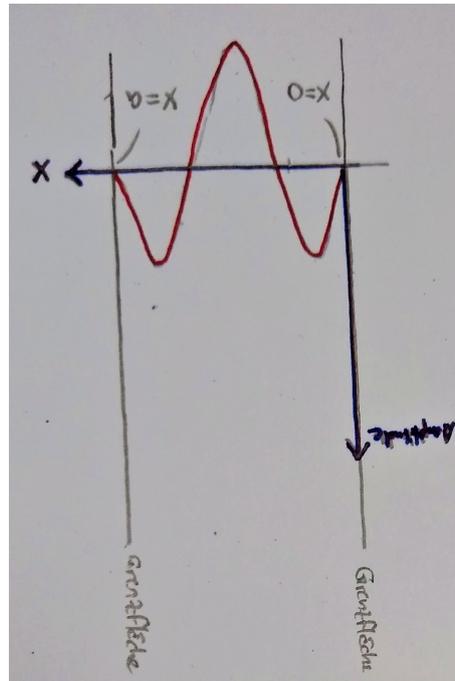
- c) Die allgemeine Definition der Wellenzahl in x -Richtung lautet für die Parallelplattenleitung $k_x = \frac{m\pi}{a}$, mit $m \in \mathbb{N}$. Mit $E_z = A \sin(k_x x)$ folgt somit $m = 3$. Daher handelt es sich um die TM_3 -Mode.
- d) Wir starten von der allgemeinen Wellengleichung der z -Komponente aus und vereinfachen dann durch Einsetzen des Lösung.

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \underline{E}_z = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 \underline{E}_z - k_z^2 \underline{E}_z + \omega^2 \mu \epsilon \underline{E}_z = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 \Leftrightarrow k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}$$

Die Cut-off-Frequenz ist die Frequenz, ab der sich eine Mode im Wellenleiter ausbreiten kann, ab der also die Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung reell wird. Sie lässt sich somit durch Nullsetzen der Ausbreitungskonstante bestimmen ($k_z \stackrel{!}{=} 0$).

$$0 = \sqrt{\omega_c^2 \mu \epsilon - \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2} \Leftrightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{3\pi}{a} \Leftrightarrow f_c = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \frac{3\pi}{a}$$



e) Bestimmung des komplexen Poynting-Vektors, da komplexe Feldgrößen vorliegen.

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} \left[A \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_z - \frac{jk_z A 3\pi}{a(\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2)} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_x \right] \times \left[\frac{j 3\pi \omega \varepsilon A}{a(\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2)} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) e^{-j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_y \right]$$

Mit $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ folgt

$$\underline{\mathbf{S}} = -\frac{j}{2} \frac{\omega \varepsilon A^2}{k_x} \sin(k_x x) \cos(k_x x) \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \frac{\omega \varepsilon A^2 k_z}{k_x^2} \cos^2(k_x x) \mathbf{e}_z.$$

Der zweite Term stellt die Wirkleistung dar, welche in Ausbreitungsrichtung transportiert wird, wohingegen der erste Term Blindleistung repräsentiert, die zwischen den Leiterplatten "hin und her schwappt".

f) Die relevanten Maxwellgleichungen für harmonische Wellen lauten:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}}.$$

Mit Hilfe der Formelsammlung werden die Maxwellgleichungen komponentenweise in kartesischen Koordinaten ausgedrückt, wobei für eine TEM-Welle $\underline{E}_z = \underline{H}_z = 0$ gilt.

$$(1) \quad jk_z \underline{H}_y = j\omega \varepsilon \underline{E}_x$$

$$(4) \quad jk_z \underline{E}_y = -j\omega \mu \underline{H}_x$$

$$(2) \quad -jk_z \underline{H}_x = j\omega \varepsilon \underline{E}_y$$

$$(5) \quad -jk_z \underline{E}_x = -j\omega \mu \underline{H}_y$$

$$(3) \quad \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} = \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y}$$

$$(6) \quad \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y}$$

Auflösen von (2) und (4) nach \underline{E}_y ergibt zum Beispiel

$$(A) \quad \underline{E}_y = -\frac{k_z}{\omega \varepsilon} \underline{H}_x,$$

$$(B) \quad \underline{E}_y = -\frac{\omega \mu}{k_z} \underline{H}_x.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\frac{\omega\mu}{k_z} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \Leftrightarrow k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon = k^2$$

Die Maxwellgleichungen sind somit erfüllt, sofern die transversalen Komponenten des Wellenvektors verschwinden ($k_x = k_y = 0$). Ebenfalls ist die Wellengleichung erfüllt, denn mit $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ folgt beispielhaft für das elektrische Feld in y -Richtung

$$\Delta \underline{E}_y = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + (k^2 - k_z^2) \underline{E}_y = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} = 0$$

Für diese Differentialgleichung existiert eine Lösung, sodass eine solche Welle existiert.

Die Cut-off-Frequenz wird durch Nullsetzen der Ausbreitungskonstante k_z bestimmt. Wegen $k_z = k$ ist dies gleichbedeutend zu $\omega_c^2\mu\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \omega_c = 0 \Leftrightarrow f_c = 0$. Daher kann nur eine einzige *TEM*-Mode existieren, die in jedem Fall ausbreitungsfähig ist.

Aufgabe 3 - Hertzscher Dipol

Gegeben sei das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols in Kugelkoordinaten. Die Parameter l und I bezeichnen dabei die Länge des Dipols und die Stromstärke. Vom Dipol aus breite sich eine harmonische Welle aus.

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu l I}{4\pi r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} [\cos(\vartheta)\mathbf{e}_r - \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta]$$

- a) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ die magnetische Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$. Benennen Sie in Ihrer Lösung die Nahfeld- und Fernfeldanteile. In welchem Abstand r zum Dipol sind die Anteile des Nah- und des Fernfeldes an der magnetischen Feldstärke gleich groß?

Hinweis: Es gilt $\nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$.

- b) Berechnen Sie aus dem magnetischen Feld $\underline{\mathbf{H}}$ die elektrischen Feldkomponenten \underline{E}_r , \underline{E}_ϑ und \underline{E}_φ im Allgemeinen (d.h. nicht nur im Fernfeld). Es gelte $\kappa = 0$.

Betrachtet werde nun nur noch das Fernfeld.

- c) Bestimmen Sie die mittlere Leistungsdichte im Fernfeld.
- d) Betrachtet werde nun die Abstrahlung der von einem Hertzschen Dipol in einem Raumwinkel Ω abgestrahlten Leistung (siehe Abbildung 4). Zeigen Sie anhand der eingezeichneten Flächen mit Flächeninhalt A_1 und A_2 , dass Energieerhaltung gilt und sich somit die abgestrahlte Energie mit zunehmender Entfernung r vom Dipol auf eine immer größere Fläche verteilt.

Hinweis: Der Raumwinkel ist definiert als $\Omega = \frac{A}{r^2}$.

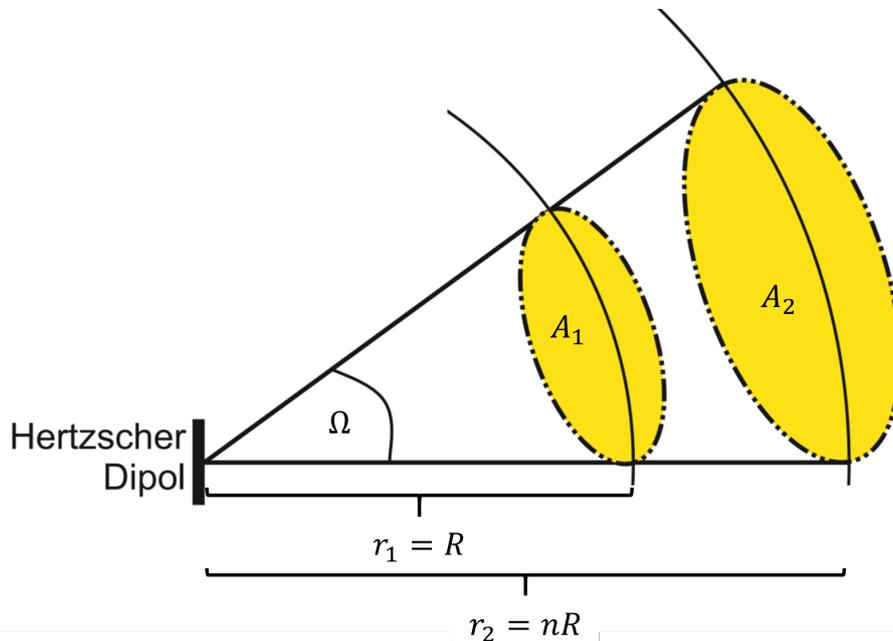


Abbildung 4

Lösung 3 - Hertzscher Dipol

- a) Aus $\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu I}{4\pi r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} [\cos(\vartheta)\mathbf{e}_r - \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta]$ wird schnell ersichtlich, dass $\frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial \varphi} = 0$. Mit $\underline{A}_\varphi = 0$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{A}} &= \mu \underline{\mathbf{H}} \\ &= \left(\frac{1}{r \sin(\vartheta)} \left[\frac{\partial(\sin(\vartheta)\underline{A}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r\underline{A}_\varphi)}{\partial r} \right] \right) \mathbf{e}_\vartheta \\ &+ \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right] \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &= \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right] \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[-r \frac{\mu I}{4\pi r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\mu I}{4\pi r} \cos(\vartheta) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \right] \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &= \left(-\frac{1}{r} \frac{\mu I}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(-\frac{j\omega}{c} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} + \frac{1}{r^2} \frac{\mu I}{4\pi} \sin(\vartheta) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &= \frac{\mu I}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Für die magnetische Feldstärke folgt damit unmittelbar

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{I}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \mathbf{e}_\varphi,$$

wobei der erste Term in der Klammer die Anteile des Fernfelds und der zweite Term in der Klammer die Anteile des Nahfelds repräsentiert. Die Anteile von Nah- und Fernfeld sind identisch für

$$\left| \frac{j\omega}{cr} \right| = \left| \frac{1}{r^2} \right| \iff r = \left| \frac{c}{j\omega} \right| \iff r = \frac{c}{\omega}.$$

- b) Die elektrische Feldstärke ergibt sich mit Hilfe des Induktionsgesetzes für harmonische Wellen mit $\underline{H}_r = \underline{H}_\vartheta = 0$ zu

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \\ &= \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial(\sin(\vartheta)\underline{H}_\varphi)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\underline{H}_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_r &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{lI}{4\pi} \sin^2(\vartheta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \right) \\
 &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{lI}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} 2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \\
 &= \frac{lI}{2\pi} \left(\frac{1}{c\varepsilon r^2} - \frac{j}{\omega\varepsilon r^3} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \cos(\vartheta) \\
 \underline{E}_\vartheta &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{lI}{4\pi r} \sin(\vartheta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \right) \\
 &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{lI}{4\pi r} \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{j\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \right) \\
 &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{lI}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(\left(\frac{j\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \left(-\frac{j\omega}{c} \right) - \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \\
 &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{lI}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(\frac{1}{r^3} + \frac{j\omega}{cr^2} + \left(\frac{j\omega}{c} \right)^2 \frac{1}{r} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \\
 &= \frac{lI}{4\pi\varepsilon} \sin(\vartheta) \left(\frac{1}{j\omega r^3} + \frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} \right) e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \\
 \underline{E}_\varphi &= 0
 \end{aligned}$$

c) Im Fernfeld vereinfachen sich die Komponenten zu

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_r &= 0 \\
 \underline{E}_\vartheta &= \frac{lI}{4\pi\varepsilon} \sin(\vartheta) \frac{j\omega}{c^2 r} e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \\
 \underline{H}_\varphi &= \frac{lI}{4\pi} \sin(\vartheta) \frac{j\omega}{cr} e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))}.
 \end{aligned}$$

Die mittlere Leistungsdichte entspricht dem Realteil des komplexen Poynting-Vektors. Da im Fernfeld das elektrische Feld lediglich in ϑ -Richtung schwingt und das magnetische Feld lediglich in φ -Richtung, breitet sich die Leistung vollständig in radiale Richtung aus ($\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r$).

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} \underline{E}_\vartheta \underline{H}_\varphi^* \mathbf{e}_r \\
 &= \frac{1}{2} \frac{lI}{4\pi\varepsilon} \sin(\vartheta) \frac{j\omega}{c^2 r} e^{j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \frac{lI}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(-\frac{j\omega}{cr} \right) e^{-j(\omega(t-\frac{r}{c}))} \mathbf{e}_r \\
 &= \frac{1}{2} \frac{l^2 I^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\vartheta) \frac{\omega^2}{c^3 r^2} \mathbf{e}_r \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{c\varepsilon} \left(\frac{\omega l I}{4\pi cr} \right)^2 \sin^2(\vartheta) \mathbf{e}_r
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis für die mittlere Leistungsdichte ist identisch, da der komplexe Poynting-Vektor hier rein reell ist, $\Re\{\underline{\mathbf{S}}\} = \underline{\mathbf{S}}$.

d) Mit der Definition des Raumwinkels aus dem Hinweis folgt zunächst $\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{r_1} = \frac{A_2}{r_2} \Leftrightarrow A_2 = n^2 A_1$. Energieerhaltung gilt gerade dann, wenn der mittlere Energiefluss durch die erste Fläche mit Flächeninhalt A_1 dem mittleren Energiefluss durch die zweite Fläche mit Flächeninhalt A_2 entspricht. Der mittlere Energiefluss ergibt sich als Flächenintegral über die mittlere Leistungsdichte. Da der Poynting-Vektor (in radiale Richtung zeigend) stets senkrecht

auf den gekrümmten Kugelteilflächen steht, vereinfacht sich die Integration mit $\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r = 1$ zu einer Multiplikation. Mit dem Ergebnis aus c) folgt

$$\begin{aligned} \iint \Re\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_1)\} d\mathbf{F}_1 &= \iint \Re\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_2)\} d\mathbf{F}_2 \Leftrightarrow |\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_1)|_{A_1} = |\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_2)|_{A_2} \Leftrightarrow |\underline{\mathbf{S}}(R)| = |\underline{\mathbf{S}}(nR)| n^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{c\varepsilon} \left(\frac{\omega I}{4\pi c R} \right)^2 \sin^2(\vartheta) = \frac{1}{2} \frac{1}{c\varepsilon} \left(\frac{\omega I}{4\pi c R} \right)^2 \sin^2(\vartheta) \frac{n^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllt.

Aufgabe 4 - Dielektrischer Wellenleiter

Gegeben sei ein zylindrischer Wellenleiter, eine sogenannte Glasfaser, die aus zwei unterschiedlichen dielektrischen Materialien besteht (siehe Abbildung 5). Der Faserkern weist die Materialeigenschaften ε_1 und $\mu_1 = \mu_0$ auf, wohingegen im Fasermantel ε_2 und $\mu_2 = \mu_0$ gilt, wobei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.



Abbildung 5

In der Glasfaser breitet sich eine elektromagnetische Welle in z -Richtung aus. Im Folgenden soll die Gestalt der Longitudinalkomponente des elektrischen Feldes \underline{E}_z untersucht werden.

- Geben Sie zunächst die Helmholtz-Gleichung für \underline{E}_z in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) an.
- Nutzen Sie nun einen geeigneten Lösungsansatz und überführen Sie die Helmholtzgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Kommentieren Sie Ihr Vorgehen knapp in Stichpunkten. Wie wird der verwendete Ansatz genannt?
- Geben Sie einen geeigneten Lösungsansatz für die in b) hergeleitete, winkelabhängige Differentialgleichung an. Weisen Sie rechnerisch nach, dass es sich tatsächlich um eine gültige Lösung handelt. Welche Werte kann die Modenzahl m der winkelabhängigen Komponente annehmen?
- Zeigen Sie durch Ausnutzung des Ergebnisses aus c), dass die Differentialgleichung geschrieben werden kann als

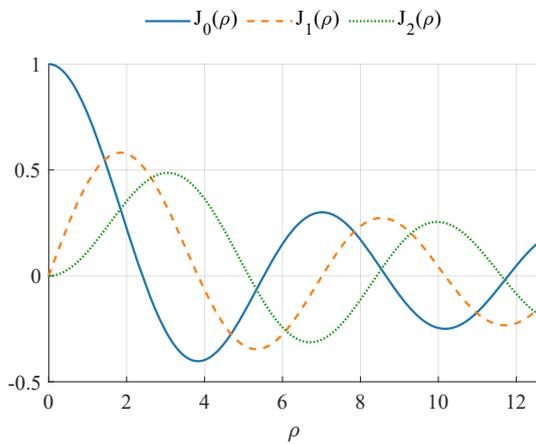
$$\rho^2 \frac{\partial^2 \underline{R}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial \underline{R}(\rho)}{\partial \rho} + [(k^2 - k_z^2) \rho^2 - m^2] \underline{R}(\rho) = 0$$

- Die radiale Komponente der Gesamtlösung $\underline{R}(\rho)$ kann in der gesamten Glasfaser mit Hilfe von Bessel-Funktionen beschrieben werden. In Abbildung 6 auf der folgenden Seite sind vier verschiedene Klassen von Besselfunktionen skizziert. Welche dieser Klassen kommen für $\underline{R}(\rho)$ in Frage? Begründen Sie Ihre Antwort.

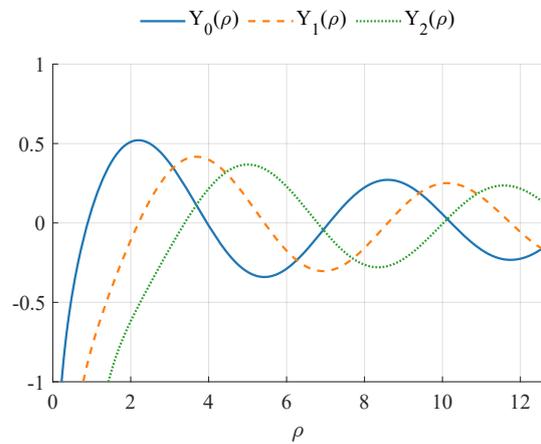
Hinweis: Für im Wellenleiter geführte Moden gilt $k_2 < k_z < k_1$.

- Welcher physikalische Effekt muss an der Grenzfläche zwischen Faserkern und Fasermantel auftreten, damit sich die Glasfaser ungestört entlang der z -Achse ausbreiten kann? Welche Parameter bestimmen dabei, wie viele Moden ausbreitungsfähig sind?

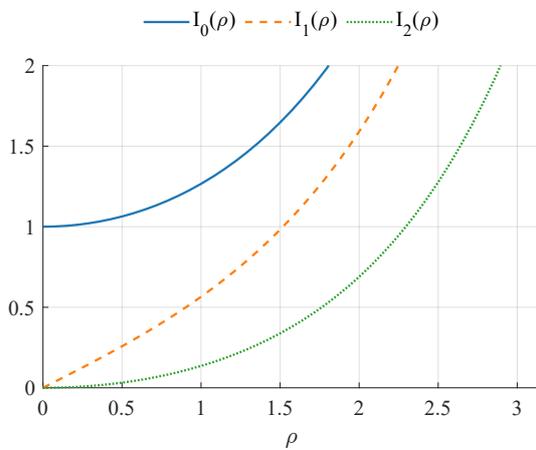
Hinweis: Eine Antwort in Stichpunkten genügt.



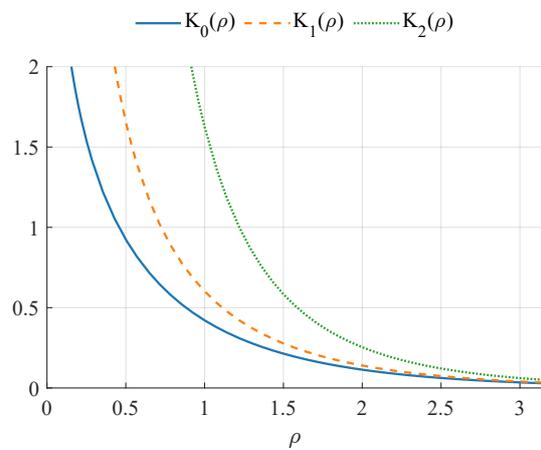
(a) Die Bessel-Funktionen erster Ordnung $J_\nu(\rho)$ sind Lösungen der Besselschen Differentialgleichung aus Aufgabenteil d). Es wird angenommen, dass $[(k^2 - k_z^2)\rho^2 - m^2]$ positiv ist.



(b) Die Bessel-Funktionen zweiter Ordnung $Y_\nu(\rho)$ sind ebenfalls Lösungen der Besselschen Differentialgleichung aus Aufgabenteil d). Es wird angenommen, dass $[(k^2 - k_z^2)\rho^2 - m^2]$ positiv ist.



(c) Die modifizierten Bessel-Funktionen erster Ordnung $I_\nu(\rho)$ sind ebenfalls Lösungen der modifizierten Besselschen Differentialgleichung aus Aufgabenteil d). Dabei wird angenommen, dass $[(k^2 - k_z^2)\rho^2 - m^2]$ negativ ist.



(d) Die modifizierten Bessel-Funktionen zweiter Ordnung $K_\nu(\rho)$ sind ebenfalls Lösungen der modifizierten Besselschen Differentialgleichung aus Aufgabenteil d). Dabei wird angenommen, dass $[(k^2 - k_z^2)\rho^2 - m^2]$ negativ ist.

Abbildung 6

Lösung 4 - Dielektrischer Wellenleiter

- a) Um die Helmholtzgleichung $\Delta \underline{E}_z + k^2 \underline{E}_z = 0$ für die Longitudinalkomponente $\underline{E}_z(\rho, \varphi)$ in Zylinderkoordinaten zu überführen, muss lediglich der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten geschrieben werden.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_z = 0$$

- b) Mit dem Separationsansatz von Bernoulli kann diese partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen überführt werden. Der Ansatz zerlegt die Lösung in unabhängige Faktoren, die jeweils nur von einer einzigen Variable abhängen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die zeitliche Abhängigkeit der Größen im folgenden vernachlässigt.

$$\underline{E}_z(\rho, \varphi) = \underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi) e^{-jk_z z}$$

Einsetzen des Ansatzes in die Helmholtzgleichung, Ausklammern, Ableiten nach z und Kürzen des Exponentialterms führt auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi) e^{-jk_z z}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi) e^{-jk_z z}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi) e^{-jk_z z}}{\partial z^2} \\ + k^2 \underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi) e^{-jk_z z} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \underline{\Psi}(\varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{R}(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \underline{R}(\rho) \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(\varphi)}{\partial \varphi^2} + -k_z^2 \underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi) + k^2 \underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Teilen durch $\underline{R}(\rho) \underline{\Psi}(\varphi)$ und anschließendes Erweitern mit ρ^2 ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\underline{R}(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{R}(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\underline{\Psi}(\varphi)} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(\varphi)}{\partial \varphi^2} + (k^2 - k_z^2) = 0, \\ \frac{\rho}{\underline{R}(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{R}(\rho)}{\partial \rho} \right) + (k^2 - k_z^2) \rho^2 + \frac{1}{\underline{\Psi}(\varphi)} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Gleichung komplett unabhängig von ρ und φ ist, muss dies auch für die linke Seite der Gleichung gelten. Die beiden Differentialgleichungen (Terme), $\frac{\rho}{\underline{R}(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{R}(\rho)}{\partial \rho} \right) + (k^2 - k_z^2) \rho^2$ für die Radiusabhängigkeit und $\frac{1}{\underline{\Psi}(\varphi)} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(\varphi)}{\partial \varphi^2}$ für die Winkelabhängigkeit, müssen daher konstante, von ρ bzw. φ unabhängige Lösungen besitzen.

- c) Gesucht ist eine Funktion, deren zweite Ableitung ein Vielfaches der Funktion selbst ist. Damit stellt $\underline{\Psi}(\varphi) = \cos(m\varphi)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ (Periodizität von 2π) eine mögliche Lösung dar. Der Fall $m = 0$ ist dabei der triviale Fall, bei dem die sich in der Glasfaser ausbreitende Mode keinerlei Winkelabhängigkeit besitzt.

Prüfen der Gültigkeit des Ansatzes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{\Psi}(\varphi)} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(\varphi)}{\partial \varphi^2} = C = \text{const.} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos(m\varphi)} \frac{\partial^2 \cos(m\varphi)}{\partial \varphi^2} = C \Leftrightarrow \\ -\frac{m}{\cos(m\varphi)} \frac{\partial \sin(m\varphi)}{\partial \varphi} = C \Leftrightarrow -\frac{m^2}{\cos(m\varphi)} \cos(m\varphi) = C \Leftrightarrow -m^2 = C \end{aligned}$$

d) Durch Einsetzen der Kosinus-Lösung aus c) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + (k^2 - k_z^2) \rho^2 - m^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + [(k^2 - k_z^2) \rho^2 - m^2] R(\rho) &= 0 \Leftrightarrow \\ \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + [(k^2 - k_z^2) \rho^2 - m^2] R(\rho) &= 0, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Umformung mit der Produktregel ergibt.

- e)
- Im Glasfaserkern kommt nur eine Besselfunktion erster Art in Frage, da die Lösung einen oszillierenden Charakter haben muss (stehende Welle zwischen den Grenzflächen), aber für $\rho \rightarrow 0$ nicht divergieren darf. Schließlich würde ein solches Divergieren bedeuten, dass genau in der Mitte des Faserkerns die Feldstärke vom Betrag her unendlich groß wird. Dort befindet sich je nach Mode aber eine Nullstelle oder eine Extremstelle mit endlichem Wert.
 - Im Mantel darf keine geführte Mode vorliegen, d.h. die transversale Wellenzahl senkrecht zur Grenzfläche muss rein imaginär sein. Mit $k_2 < k_z < k_1$ ist das der Fall, wenn $[(k^2 - k_z^2)\rho^2 - m^2]$ negativ wird, weshalb nur modifizierte Besselfunktionen als Lösung in Frage kommen. Da evaneszente Wellen mit zunehmendem Abstand ρ vom Faserkern exponentiell abklingen, ist eine modifizierte Besselfunktion zweiter Ordnung der einzige sinnvolle Lösungsansatz.
- f) An der Grenzfläche muss es zu Totalreflexion kommen, damit die Welle vollständig im Wellenleiter verbleibt und sich ungestört in z -Richtung ausbreitet. Die Anzahl der ausbreitungsfähigen Moden ist dabei u.a. abhängig vom Einkopplungswinkel in die Glasfaser, von der Frequenz der eingekoppelten Welle, von der Geometrie der Faser (Radius) sowie vom Brechzahlkontrast bzw. dem Verhältnis der Permittivitäten ε_1 und ε_2 .