

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung „Elektromagnetische Wellen“ am 09. September 2021, 11:00 - 13:00 Uhr

Name	Vorname	Matrikelnummer

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Hinweise zur Prüfung:

- Zur Prüfung sind folgende Hilfsmittel zugelassen: Schreibgerät, Lineal, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und die ausgeteilte Formelsammlung.
- Prüfen Sie die Anzahl der Aufgabenblätter (22 inkl. Titelblatt) auf Vollständigkeit.
- Tragen Sie Namen, Vornamen und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein. Sollten Sie zusätzliches Papier verwenden, geben Sie auch auf **jedem** zusätzlichen Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
- Verwenden Sie für Zeichnungen **keinen** Bleistift. Die Farben rot und grün sind für die Korrektur vorgesehen und dürfen daher auch nicht verwendet werden.
- Nach jeder Aufgabe ist Platz für die Lösung vorgesehen. Falls Sie zusätzlich Papier benötigen, wenden Sie sich an das Aufsichtspersonal. Die Verwendung von eigenem Schreibpapier ist nicht gestattet.
- Auf den Lösungsblättern ist **klar zu kennzeichnen**, zu welcher Teilaufgabe ein Resultat gehört.
- Anfang und Ende der Bearbeitungszeit werden vom Aufsichtspersonal für alle verbindlich angesagt. Eine Bearbeitung der Klausur während des Austeilens und Einsammelns der Aufgabenblätter ist nicht gestattet.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	Bonus	Σ
Punkte	24	24	21	21	90	6	90
davon erreicht							

Aufgabe 1: Grenzflächenbetrachtung und Polarisation

Eine harmonische ebene elektromagnetische Welle („Welle 1“) mit der Kreisfrequenz ω und dem elektrischen Feld $\underline{E}_{1,e}$ trifft bei $z = 0$ unter einem Winkel α_e auf eine Grenzfläche zu einem ideal leitenden Medium. Die reflektierte Welle sei $\underline{E}_{1,r}$. Im freien Raum sei $\epsilon = \epsilon_1$, im gesamten Raum gelte für die Permeabilität $\mu = \mu_0$.

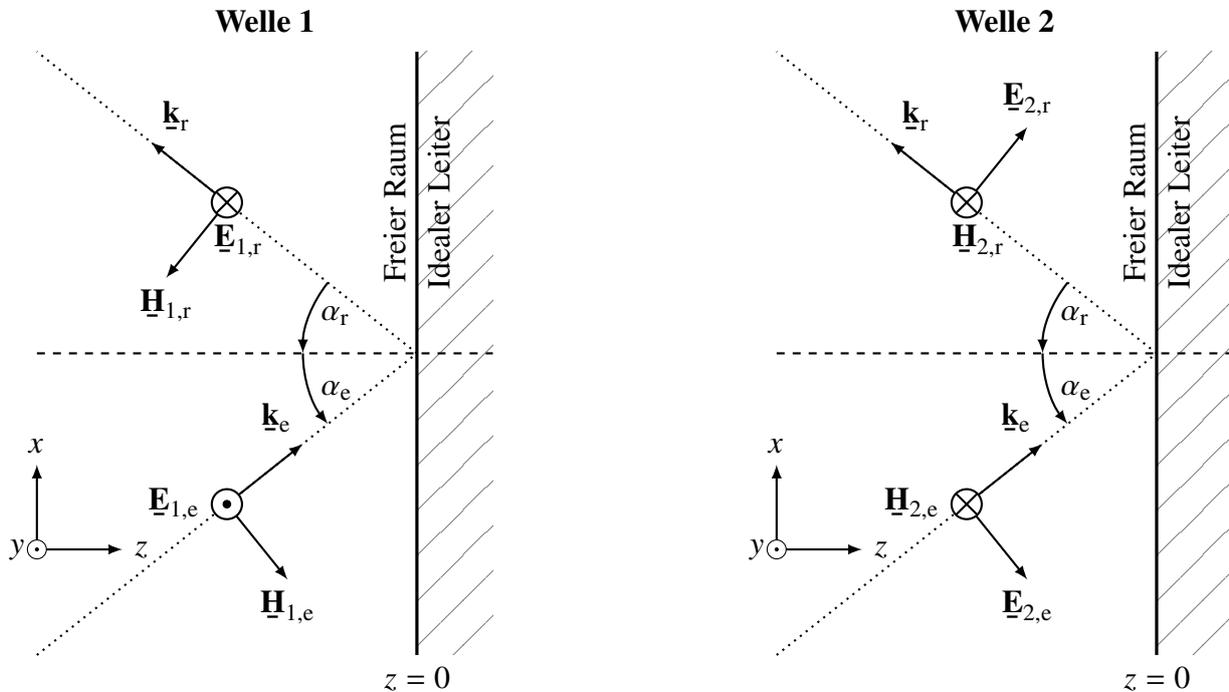


Abbildung 1

Die Amplitude des elektrischen Felds $E_{1,e}$ sei bekannt. Es gilt:

$$\underline{E}_{1,e} = \underline{E}_{1,e} e^{j(\omega t - \underline{k}_e \cdot \underline{r})} = E_{1,e} e^{j(\omega t - \underline{k}_e \cdot \underline{r})} \mathbf{e}_y,$$

$$\underline{E}_{1,r} = \underline{E}_{1,r} e^{j(\omega t - \underline{k}_r \cdot \underline{r})} = E_{1,r} e^{j(\omega t - \underline{k}_r \cdot \underline{r})} \mathbf{e}_y$$

- Welche Polarisation weist die Welle 1 auf? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Geben Sie die Komponenten der Wellenvektoren \underline{k}_e und \underline{k}_r in Abhängigkeit der Winkel α_e und α_r an.
- Bestimmen Sie für die Welle 1 mit Hilfe der Maxwellgleichungen die zur hin- und rücklaufenden Welle gehörigen magnetischen Felder $\underline{H}_{1,e}$ und $\underline{H}_{1,r}$ in Abhängigkeit von $E_{1,e}$ und $E_{1,r}$.
- Leiten Sie für Welle 1 das Reflexionsgesetz her und geben Sie den Reflexionswinkel α_r an. Bestimmen Sie zusätzlich die Amplituden der rücklaufenden Welle und drücken Sie die elektrischen und magnetischen Felder der rücklaufenden Welle $\underline{E}_{1,r}$ bzw. $\underline{H}_{1,r}$ in Abhängigkeit von $E_{1,e}$ aus.

Hinweis: Wählen Sie als Ausgangspunkt Ihrer Herleitung eine oder mehrere geeignete Grenzflächenbedingungen.

- Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Überlagerung aus hin- und rücklaufender Welle die Wellengleichung erfüllt.

- f) Bestimmen Sie nun an der Grenzfläche, d.h. bei $z = 0$, den komplexen Poynting-Vektor der Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle für Welle 1. In welche Raumrichtung wird dort Wirkleistung transportiert?

Nun wird der oben betrachteten Welle 1 eine weitere ebene Welle („Welle 2“) überlagert, deren Phase gegenüber Welle 1 um den Phasenwinkel ϕ verschoben ist. Diese Welle trifft unter demselben Winkel $\alpha_{1,e}$ auf die Grenzfläche. Das magnetische Feld der hinlaufenden und rücklaufenden Welle ist somit gegeben durch:

$$\underline{\mathbf{H}}_{2,e} = \mathbf{H}_{2,e} e^{j\phi} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} = H_{2,e} e^{j\phi} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y,$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{2,r} = \mathbf{H}_{2,r} e^{j\phi} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = H_{2,r} e^{j\phi} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y$$

- g) Geben Sie das zu $\underline{\mathbf{H}}_{2,e}$ gehörige elektrische Feld an.

Hinweis: Sie können unmittelbar das Vektorprodukt $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \frac{1}{Z} \mathbf{e}_k$ verwenden, wobei \mathbf{e}_k der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle ist und Z den Wellenwiderstand darstellt.

- h) Wie müssen die Amplitude $H_{2,e}$ und der Phasenwinkel ϕ gewählt werden, damit die Überlagerung der beiden hinlaufenden Wellen von Welle 1 und Welle 2 gerade eine rein zirkular polarisierte Welle ergibt?

Aufgabe 2: Hohlleiter

Gegeben ist ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt und den Kantenlängen b und a , siehe Abbildung 2. Das Innere des Hohlleiters ist vakuumiert und seine Randflächen bestehen aus einem Material mit unendlich hoher Leitfähigkeit ($\kappa \rightarrow \infty$). Im Inneren des Hohlleiters breitet sich eine TM-Welle (E-Welle) mit den transversalen Wellenzahlen $k_x = \frac{m\pi}{a}$ und $k_y = \frac{n\pi}{b}$ in z -Richtung aus.

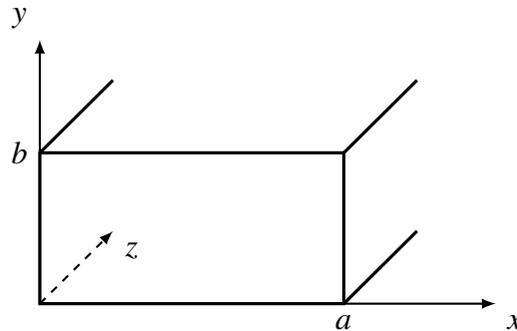


Abbildung 2

- a) Geben Sie die Randbedingungen für die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an den Grenzflächen an. Begründen Sie anschaulich, wie diese Randbedingungen zustande kommen.

Gegeben sei der folgende Lösungsansatz für die Longitudinalkomponente des elektrischen Feldes gemäß des Produktansatzes von Bernoulli (Separation der Variablen),

$$\underline{E}_z = E_0 P(x) Q(y) e^{j(\omega t - k_z z)},$$

wobei $P(x)$ und $Q(y)$ zunächst beliebige Funktionen darstellen.

- b) Leiten Sie aus der Wellengleichung mit Hilfe des Lösungsansatzes zwei gewöhnliche Differenzialgleichungen her. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Nun gelte $P(x) = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ und $Q(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$.

- c) Prüfen Sie, ob die beiden gewöhnlichen Differenzialgleichungen und die in a) ermittelten Randbedingungen erfüllt sind. Falls nicht, wie müssen $P(x)$ und $Q(y)$ modifiziert werden, damit die Gleichungen und Bedingungen erfüllt sind? Welche Bedingungen ergeben sich für die Wellenzahlen k_x und k_y ? Welche Werte von m und n werden der Grundmode zugeordnet?
- d) Leiten Sie einen Ausdruck für die Gruppengeschwindigkeit der Grundmode v_{gr} her. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. Ist die Gruppengeschwindigkeit größer oder kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 ?

Hinweis: Für die Ausbreitungskonstante gilt $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$.

- e) Bestimmen Sie für den Fall $a = 2b$ die minimale Breite a_{grenz} des Wellenleiters, bei der die Grundmode gerade noch ausbreitungsfähig ist, in Abhängigkeit der Wellenlänge. Skizzieren Sie anschließend die Gruppengeschwindigkeit im vorgegebenen Diagramm in Abbildung 3 über der normierten Wellenleiterbreite $\frac{a}{a_{\text{grenz}}}$.
- f) Welche Modenzahlen m und n bezüglich der x - bzw. y -Richtung gehören zu den in den Abbildungen 4 und 5 dargestellten Moden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Die Konturlinien stellen den Betrag der elektrischen Feldstärke dar. Je dunkler die Linie, desto größer der Betrag der Feldstärke und umgekehrt.

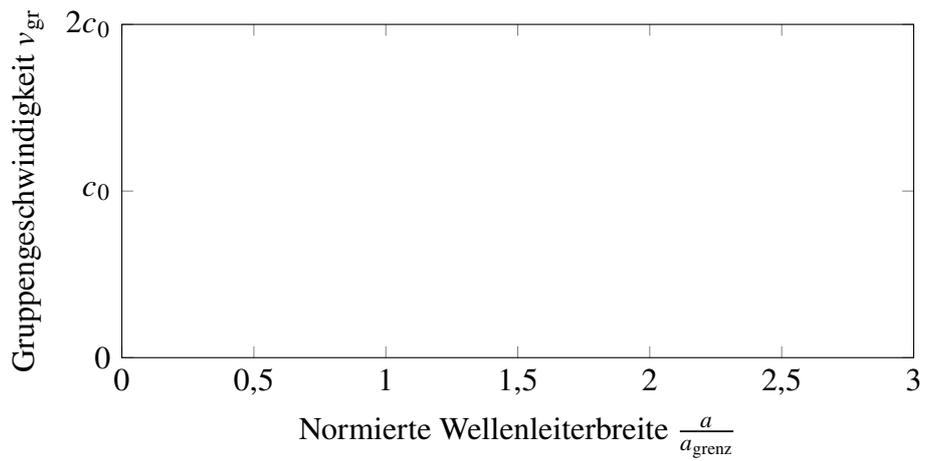


Abbildung 3

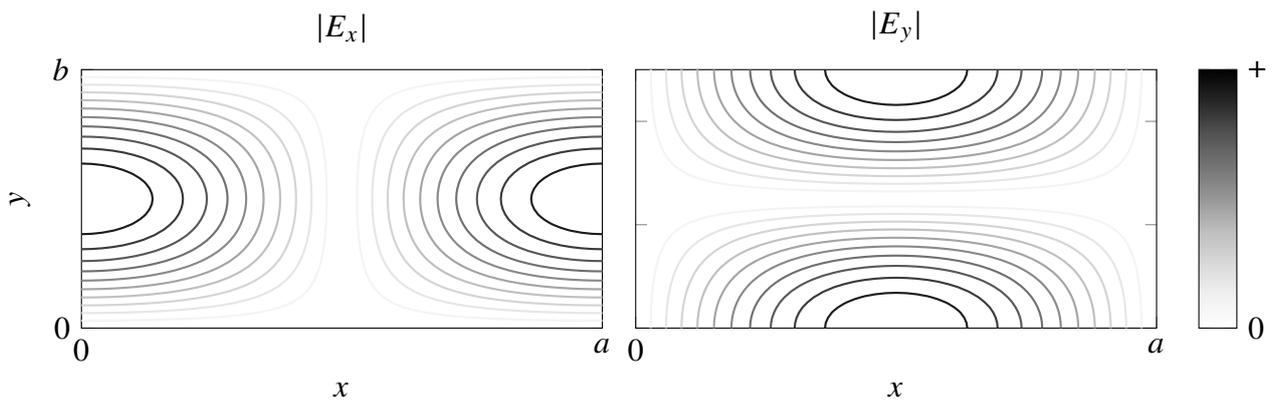


Abbildung 4

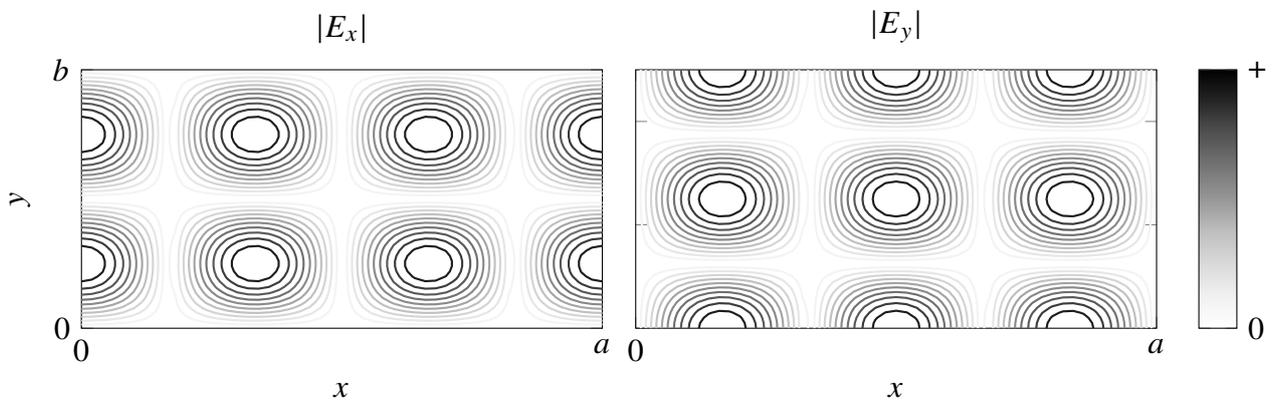


Abbildung 5

Aufgabe 3: Hertzscher Dipol

Gegeben sei das magnetische Feld einer Dipolantenne der Länge δ in Kugelkoordinaten. Der Dipol befinde sich im Vakuum.

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \mathbf{e}_\phi.$$

- a) Berechnen Sie das magnetische Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ der Dipolantenne in Kugelkoordinaten.

Hinweis 1: Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte und dem magnetischen Vektorpotential ist durch $\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$ gegeben.

Hinweis 2: Gehen Sie davon aus, dass in der Gleichung für $\underline{\mathbf{H}}$ der erste Term in der Klammer auf die Winkelkomponente des magnetischen Vektorpotentials \underline{A}_θ und der zweite Term auf dessen Radialkomponente \underline{A}_r zurückzuführen ist.

- b) Berechnen Sie das elektrische Feld der Antenne im gesamten Raum. Benennen Sie in Ihrer Lösung die Nahfeld- und Fernfeldanteile und begründen Sie die Zuordnung.
 c) Bestimmen Sie das zugehörige magnetische Feld im Fernfeld.
 d) Berechnen Sie die mittlere Leistungsdichte im Fernfeld.
 e) Skizzieren Sie in Abbildung 12 qualitativ die Richtcharakteristiken der Antenne für eine Länge $\delta = \frac{\lambda}{2}$ bzw. $\delta = \lambda$.

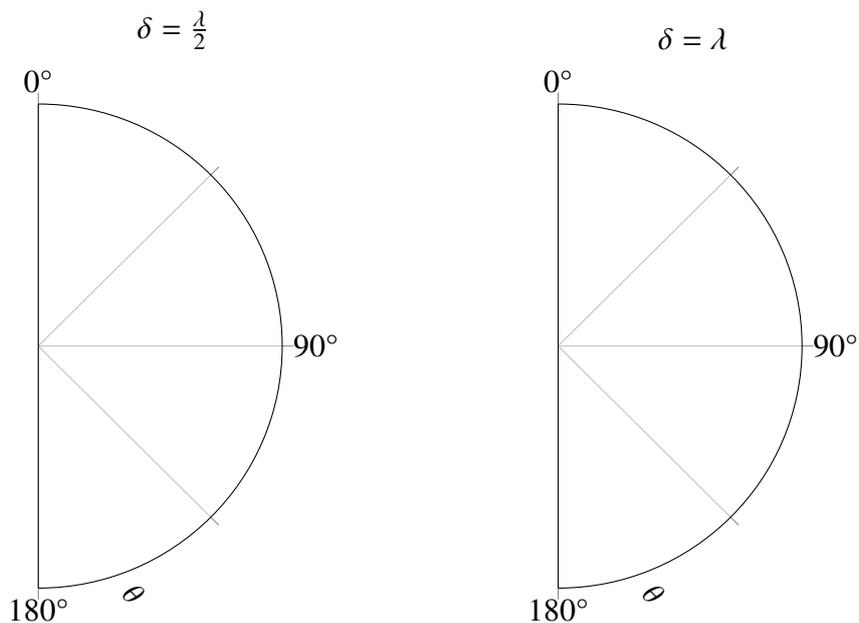


Abbildung 6

Aufgabe 4: Dielektrischer Wellenleiter

Gegeben sei eine dielektrische Platte, siehe Abbildung, wobei $n_2 > n_1$ gilt. Bekannt sei weiterhin das elektrische Feld einer sich ausbreitenden TE-Mode *innerhalb* der Platte:

$$\underline{E}_x(y) = E_0 \cos(k_{2,y}y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad \text{für } |y| \leq \frac{d}{2}.$$

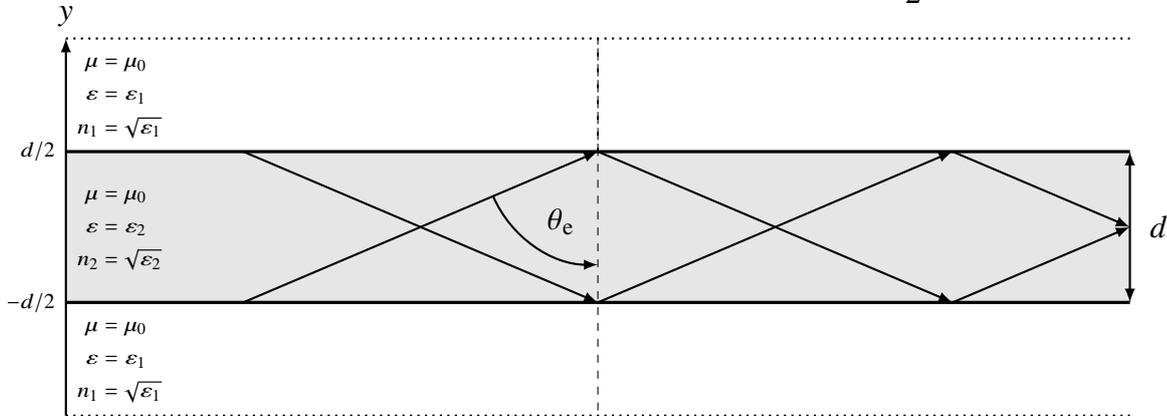


Abbildung 7

- Bestimmen Sie das elektrische Feld dieser Wellenleitermode *außerhalb* der dielektrischen Platte in Abhängigkeit von E_0 . Wählen Sie dazu einen geeigneten Lösungsansatz und begründen Sie diesen.
- Berechnen Sie alle magnetischen Feldkomponenten in Abhängigkeit der Amplitude E_0 . Beschränken Sie sich dabei auf die Felder innerhalb der dielektrischen Platte, d.h. für $|y| < \frac{d}{2}$.
- Unter welchen Umständen kommt es bei der Ausbreitung der Mode zu einer Dämpfung der Welle? Wie verändert sich dadurch die Lösung für $\underline{E}_x(y)$?

Für die Ausbreitung einer TE-Welle in der dielektrischen Platte müssen mit $\xi = \frac{\omega d}{2c} n_2 \cos(\theta_e)$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein:

$$\eta(\xi) = \xi \tan\left(\xi - m \frac{\pi}{2}\right), \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\eta(\xi) = \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}, \quad \text{wobei } \gamma = \frac{\omega d}{2c} \sqrt{n_2^2 - n_1^2}.$$

- Die Betriebsfrequenz des Wellenleiters wird nun so gewählt, dass gerade die zweite Mode ausbreitungsfähig ist. Skizzieren Sie die elektrischen Feldstärken der ausbreitungsfähigen Moden in den Diagrammen in Abbildung 8 und benennen Sie diese Moden. In Abbildung 9 ist bereits *eine* der Bedingungen graphisch dargestellt. Ergänzen Sie die fehlende Bedingung und markieren Sie die ausbreitungsfähigen Moden.
- Leiten Sie eine Gleichung für den Einfallswinkel θ_e her, die nur von den Materialparametern und der Wellenleitergeometrie abhängt. Für welche Mode ist der Einfallswinkel maximal?
- In Abbildung 10 ist eine Komponente einer Mode des elektrischen oder magnetischen Felds entlang der y -Achse aufgetragen. Kann dieser Verlauf der \underline{E}_x -Komponente zugeordnet werden? Falls nicht, welche Komponente von \underline{E} oder \underline{H} ist abgebildet? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Welche Feldkomponenten sind an den Grenzflächen stetig?
- Welche Modenzahl m charakterisiert die Mode der in Abbildung 10 dargestellten Feldkomponente?

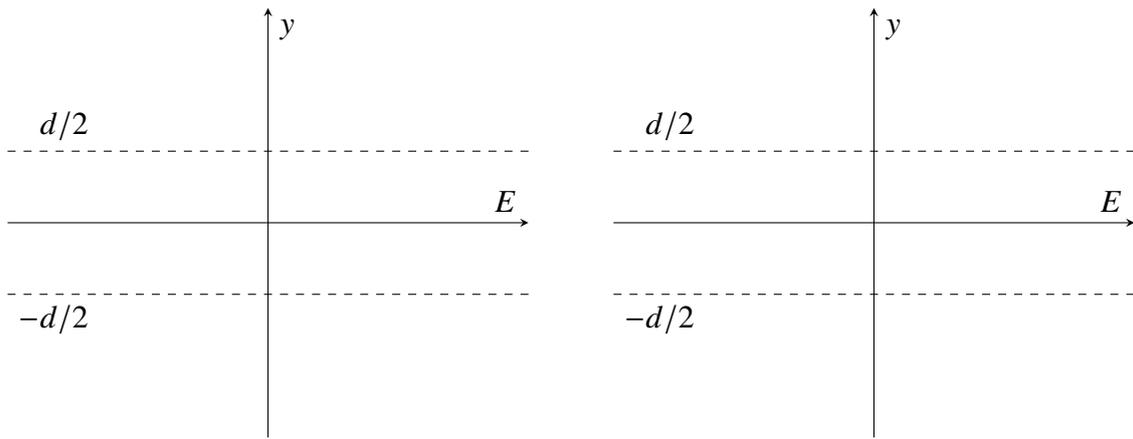


Abbildung 8

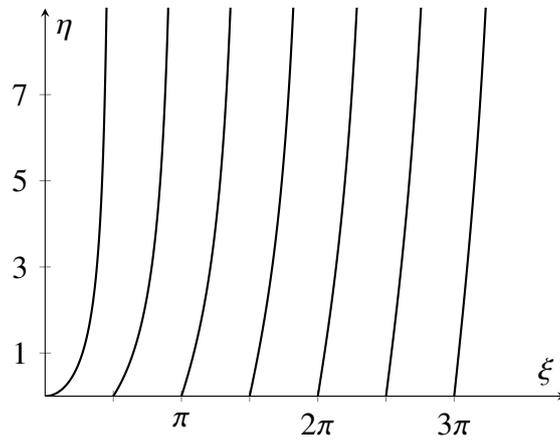


Abbildung 9

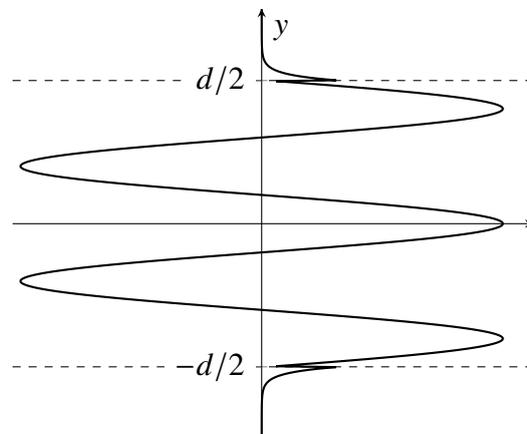


Abbildung 10

Lösung zu Aufgabe 1:

- a) Die Welle 1 ist senkrecht polarisiert, da das elektrische Feld senkrecht zu der Einfallsebene orientiert ist.

Alternativ:

Die Welle 1 ist linear polarisiert, da sich die Schwingungsrichtung des elektrischen Felds nicht ändert.

- b) Für die Wellenvektoren \underline{k}_e und \underline{k}_r erhalten wir mithilfe der Abbildung

$$\underline{k}_e = k_e \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ \cos \alpha_e \end{pmatrix}$$

$$\underline{k}_r = k_r \begin{pmatrix} \sin \alpha_r \\ 0 \\ -\cos \alpha_r \end{pmatrix}.$$

- c) Zur Bestimmung der magnetischen Felder benötigen wir das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \underline{E} = -j \omega \mu \underline{H} \iff \underline{H} = \frac{j}{\omega \mu} \nabla \times \underline{E}.$$

Da das elektrische Feld nur eine y -Komponente aufweist, welche von x und z abhängt, erhalten wir für die Rotation

$$\nabla \times \underline{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von \underline{E}_e bzw. \underline{E}_r liefert dann für \underline{H}_e bzw. \underline{H}_r

$$\underline{H}_e = \frac{j}{\omega \mu} \nabla \times \underline{E}_e = \frac{j}{\omega \mu} E_{1,e} e^{j(\omega t - \underline{k}_e \cdot \mathbf{r})} (-j k_e) \begin{pmatrix} -\cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix} = \frac{k_e E_{1,e}}{\omega \mu} e^{j(\omega t - \underline{k}_e \cdot \mathbf{r})} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_r = \frac{j}{\omega \mu} \nabla \times \underline{E}_r = \frac{j}{\omega \mu} E_{1,r} e^{j(\omega t - \underline{k}_r \cdot \mathbf{r})} (-j k_r) \begin{pmatrix} \cos \alpha_r \\ 0 \\ \sin \alpha_r \end{pmatrix} = \frac{k_r E_{1,r}}{\omega \mu} e^{j(\omega t - \underline{k}_r \cdot \mathbf{r})} \begin{pmatrix} \cos \alpha_r \\ 0 \\ \sin \alpha_r \end{pmatrix}$$

Gesucht sind jedoch \mathbf{H}_e bzw. \mathbf{H}_r :

$$\mathbf{H}_e = \frac{k_e E_{1,e}}{\omega \mu} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_r = \frac{k_r E_{1,r}}{\omega \mu} \begin{pmatrix} \cos \alpha_r \\ 0 \\ \sin \alpha_r \end{pmatrix}.$$

- d) Der Ausgangspunkt für die Herleitung des Reflexionsgesetzes sind die Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen Felds und der Normalkomponenten des magnetischen Felds in $z = 0$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_{1,e} \cdot \mathbf{e}_y + \underline{\mathbf{E}}_{1,r} \cdot \mathbf{e}_y &= 0 \\ \underline{\mathbf{H}}_{1,e} \cdot \mathbf{e}_z + \underline{\mathbf{H}}_{1,r} \cdot \mathbf{e}_z &= 0.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}E_{1,e} e^{j(\omega t - k_e \sin \alpha_e x)} &= -E_{1,r} e^{j(\omega t - k_r \sin \alpha_r x)} \\ \frac{k_e E_{1,e}}{\omega \mu} e^{j(\omega t - k_e \sin \alpha_e x)} \sin \alpha_e &= -\frac{k_r E_{1,r}}{\omega \mu} e^{j(\omega t - k_r \sin \alpha_r x)} \sin \alpha_r.\end{aligned}$$

Umformen des Gleichungssystems führt auf (Division von (II) durch (I) und Multiplikation mit $\omega \mu$)

$$\begin{aligned}E_{1,e} e^{j(\omega t - k_e \sin \alpha_e x)} &= -E_{1,r} e^{j(\omega t - k_r \sin \alpha_r x)} \\ k_e \sin \alpha_e &= k_r \sin \alpha_r,\end{aligned}$$

wobei das Brechungsgesetz in der zweiten Zeile gerade auf das gesuchte Reflexionsgesetz führt. Da sich die einfallende und reflektierte Welle im gleichen Medium ausbreiten, muss auch $k_e = k_r$ gelten und wir erhalten

$$\sin \alpha_e = \sin \alpha_r.$$

Setzen wir nun (II) in (I) ein, können wir ablesen, dass wegen

$$(E_{1,e} + E_{1,r}) e^{j(\omega t - k_e \sin \alpha_e x)} = 0$$

$E_{1,e} = -E_{1,r}$ gelten muss, da die Stetigkeitsbedingungen für alle x und t erfüllt sein müssen. Schließlich können wir auch die reflektierten elektrischen und magnetischen Felder durch $E_{1,e}$ ausdrücken

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r &= -E_{1,e} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{H}_r &= -\frac{k_e E_{1,e}}{\omega \mu} \begin{pmatrix} \cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Wir verwenden lediglich die Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Felds und setzen anschließend ein:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{1,e} \cdot \mathbf{e}_y + \underline{E}_{1,r} \cdot \mathbf{e}_y &= 0 \\ E_{1,e} e^{j(\omega t - k_e \sin \alpha_e x)} + E_{1,r} e^{j(\omega t - k_r \sin \alpha_r x)} &= 0 \end{aligned}$$

Da die Stetigkeitsbedingung für alle x erfüllt sein muss, können wir zunächst $x = 0$ betrachten:

$$(E_{1,e} + E_{1,r}) e^{j\omega t} = 0.$$

Aus dieser Beziehung erhalten wir $E_{1,e} = -E_{1,r}$, da der komplexe Exponentialterm stets von null verschieden ist. Allerdings muss auch für alle anderen x die Stetigkeit gegeben sein, weshalb wir durch Einsetzen von $E_{1,e} = -E_{1,r}$ sehen, dass

$$E_{1,e} \left(e^{-j k_e \sin \alpha_e x} - e^{-j k_r \sin \alpha_r x} \right) e^{j\omega t} = 0$$

erfüllt sein muss, woraus wiederum das Brechungs- bzw. Reflexionsgesetz folgt (da sich die einfallende und reflektierte Welle im gleichen Medium ausbreiten, muss auch $k_e = k_r$ gelten):

$$\begin{aligned} k_r \sin \alpha_r &= k_e \sin \alpha_e \\ \sin \alpha_r &= \sin \alpha_e \end{aligned}$$

Schließlich können wir auch die reflektierten elektrischen und magnetischen Felder durch $E_{1,e}$ ausdrücken (**Hier werden auch \underline{E}_r und \underline{H}_r akzeptiert**)

$$\begin{aligned} \underline{E}_r &= -E_{1,e} \mathbf{e}_y \\ \underline{H}_r &= -\frac{k_e E_{1,e}}{\omega \mu} \begin{pmatrix} \cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg (Übung): Argumentiere über Nichtlinearität, dass Gleichheit der Exponenten gegeben sein muss.

e) Da alle Operatoren der Wellengleichung

$$\Delta \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0$$

linear sind, ist jede Linearkombination von Lösungen dieser Gleichung wieder eine Lösung. Daher können wir die Summanden \underline{E}_e und \underline{E}_r auch einzeln in die Wellengleichung einsetzen, wobei wir im Folgenden $k = k_e = k_r$ und $\alpha = \alpha_e = \alpha_r$ verwenden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x - k \cos(\alpha)z)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x - k \cos(\alpha)z)} + k^2 E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x - k \cos(\alpha)z)} &= 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x + k \cos(\alpha)z)} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x + k \cos(\alpha)z)} - k^2 E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x + k \cos(\alpha)z)} &= 0 \end{aligned}$$

Durch Ableiten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \left((-j k \sin(\alpha))^2 + (-j k \cos(\alpha))^2 + k^2 \right) E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x - k \cos(\alpha)z)} &= 0 \\ \left(-(-j k \sin(\alpha))^2 - (j k \cos(\alpha))^2 - k^2 \right) E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x + k \cos(\alpha)z)} &= 0 \end{aligned}$$

was wir vereinfachen können zu

$$\begin{aligned} \left(-k^2(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + k^2\right) E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x - k \cos(\alpha)z)} &= 0 \\ \left(k^2(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) - k^2\right) E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x + k \cos(\alpha)z)} &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erfüllen damit die hinlaufende und reflektierte Welle die Wellengleichung. Dementsprechend ist auch die Superposition eine Lösung, was zu zeigen war.

Alternativer Lösungsweg:

Verwenden wir im Folgenden $k = k_e = k_r$ und $\alpha = \alpha_e = \alpha_r$, ergibt sich das resultierende elektrische Feld zu

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= E_{1,e} \left(e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x - k \cos(\alpha)z)} - e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x + k \cos(\alpha)z)} \right) \mathbf{e}_y \\ &= E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x)} \left(e^{-j k \cos(\alpha)z} - e^{j k \cos(\alpha)z} \right) \mathbf{e}_y \\ &= -2j E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x)} \sin(k \cos(\alpha)z) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Wellengleichung führt auf

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-2j E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x)} \sin(k \cos(\alpha)z) \right) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-2j E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x)} \sin(k \cos(\alpha)z) \right) \\ &+ k^2 \left(-2j E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x)} \sin(k \cos(\alpha)z) \right) = 0, \end{aligned}$$

womit wir nach dem Ableiten folgenden Ausdruck erhalten

$$-2j E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x)} \sin(k \cos(\alpha)z) \left((-j k \sin(\alpha))^2 - (k \cos(\alpha))^2 + k^2 \right) = 0.$$

Nach einer abschließenden Vereinfachung zu

$$-2j E_{1,e} e^{j(\omega t - k \sin(\alpha)x)} \sin(k \cos(\alpha)z) \left(-k^2(\sin^2(\alpha)) + \cos^2(\alpha) + k^2 \right) = 0,$$

sehen wir auch hier wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dass das resultierende Feld die Wellengleichung erfüllt.

f) Der komplexe Poynting-Vektor ergibt sich gemäß Formelsammlung zu

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*.$$

Da das elektrische Feld in $z = 0$ verschwindet

$$\underline{\mathbf{E}} = E_{1,e} \left(e^{j(\omega t - k_e \sin(\alpha_e)x)} - e^{j(\omega t - k_e \sin(\alpha_e)x)} \right) = 0,$$

ist auch der Poynting-Vektor identisch null. Folglich findet an der Grenzfläche in keiner Raumrichtung ein Wirkleistungstransport statt.

g) Verwenden wir die Beziehung $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \frac{1}{Z} \mathbf{e}_k$, so erhalten wir mit

$$\mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ \cos \alpha_e \end{pmatrix}$$

für das zu $\mathbf{H}_{2,e}$ gehörige elektrische Feld

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_{2,e} &= \mathbf{H}_{2,e} \times \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ \cos \alpha_e \end{pmatrix} \\ &= H_{2,e} e^{j\phi} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ \cos \alpha_e \end{pmatrix} \\ &= \frac{H_{2,e}}{Z} e^{j\phi} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} \begin{pmatrix} \cos \alpha_e \\ 0 \\ -\sin \alpha_e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anmerkung: Hier liegt ein Fehler in der Aufgabenstellung vor, korrekt wäre eigentlich die Beziehung $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times Z \mathbf{e}_k$.

h) Um bei der Überlagerung der in z -Richtung laufenden Wellen einen zirkularen Polarisationszustand zu erreichen, muss für die Phasenverschiebung ϕ gelten, dass $\phi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. Außerdem müssen die Amplituden $E_{2,e}$ und $E_{1,e}$ gleich groß sein.

Lösung zu Aufgabe 2:

- a) An einem Grenzflächenübergang müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke stetig sein. Da die elektrischen Feldkomponenten auf den Randflächen aufgrund der unendlich hohen Leitfähigkeit ($\kappa \rightarrow \infty$) verschwinden, gilt somit

$$\begin{aligned} \underline{E}_x(x, 0, z, t) &= 0 & \underline{E}_x(x, b, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_y(0, y, z, t) &= 0 & \underline{E}_y(a, y, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_z(0, y, z, t) &= 0 & \underline{E}_z(a, y, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_z(x, 0, z, t) &= 0 & \underline{E}_z(x, b, z, t) &= 0. \end{aligned}$$

- b) Wir nutzen aus, dass die Wellengleichung für homogene Medien nach den Feldkomponenten separierbar ist und sich für harmonische Anregung die zeitliche Ableitung zu einer Multiplikation mit $j\omega$ vereinfacht. Mit $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ erhalten wir die Helmholtzgleichung für die Longitudinalkomponente $\Delta \underline{E}_z + k^2 \underline{E}_z = 0$. Einsetzen des Produktansatzes und Division durch diesen ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_z &= 0 \iff \\ \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} E_0 Q(y) e^{j(\omega t - k_z z)} + \frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} E_0 P(x) e^{j(\omega t - k_z z)} & \\ + \frac{\partial^2 e^{j(\omega t - k_z z)}}{\partial z^2} E_0 P(x) Q(y) + k^2 E_0 P(x) Q(y) e^{j(\omega t - k_z z)} &= 0 \iff \\ \frac{1}{P(x)} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Q(y)} \frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} + k^2 - k_z^2 &= 0, \end{aligned}$$

wobei $(-jk_z)^2 = -k_z^2$ ausgenutzt wurde. Da die rechte Seite der Gleichung unabhängig von x und y ist, muss dies auch für die linke Seite der Gleichung der Fall sein, was nur möglich ist, wenn die beiden gewöhnlichen Differenzialgleichungen konstante, von x und y unabhängige, Ergebnisse haben.

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(x)} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} &= \text{const.} = C_1 \\ \frac{1}{Q(y)} \frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} &= \text{const.} = C_2 \end{aligned}$$

Mit $k^2 - k_z^2 - C_1 - C_2 = 0$ und $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ folgt $C_1 = -k_x^2$ und $C_2 = -k_y^2$.

- c) Die Ansätze $P(x)$ und $Q(y)$ erfüllen die gewöhnlichen Differenzialgleichungen, da die zweite Ableitung von Kosinus (bzw. Sinus) jeweils ein ganzzahliges Vielfaches von Kosinus (bzw. Sinus) ist. Jedoch erfüllt der Kosinus nicht die Randbedingungen aus a), denn

$$\begin{aligned} \underline{E}_z(0, y, z, t) &= E_0 \cos(0) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \neq 0 \\ \underline{E}_z(x, 0, z, t) &= E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin(0) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0 \end{aligned}$$

Anmerkung: Die rechte Seite der ersten Gleichung kann nur dann für $x = 0$ den Wert 0 annehmen, wenn $n = 0$ oder $\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = 0 \forall y$. In beiden Fällen verschwinden alle Feldkomponenten und es existiert keine sich ausbreitende Welle mehr.

Deshalb muss auch für $P(x)$ eine Sinusfunktion als Ansatz gewählt werden. Die Bedingungen für die Wellenzahlen k_x und k_y ergeben sich aus den beiden verbleibenden Randbedingungen zu

$$\underline{E}_z(a, y, z, t) = 0 \Leftrightarrow E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0 \Leftrightarrow \sin(m\pi) = 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{N}_0$$

$$\underline{E}_z(x, b, z, t) = 0 \Leftrightarrow E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}b\right) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0 \Leftrightarrow \sin(n\pi) = 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}_0$$

Folglich gilt $k_x = \frac{m\pi}{a}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $k_y = \frac{n\pi}{b}$ mit $n \in \mathbb{N}$, denn $m = 0$ oder $n = 0$ sind aus dem oben genannten Grund nicht erlaubt. Die Grundmode ist damit die TM11-Mode.

- d) Die Gruppengeschwindigkeit berechnet sich als Ableitung der Kreisfrequenz nach der Ausbreitungskonstanten. Es folgt mit $m = 1, n = 1, \frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{2\sqrt{f(x)}}$ und $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, dass

$$\begin{aligned} v_{\text{gr}} &= \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\right)} = \frac{1}{\frac{2\omega\varepsilon\mu}{2\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}{\omega\mu\varepsilon} = \frac{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon}}{\omega\mu\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{a^2\omega^2\mu\varepsilon} - \frac{\pi^2}{b^2\omega^2\mu\varepsilon}} \\ &= c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c_0}{a\omega}\right)^2 - \left(\frac{\pi c_0}{b\omega}\right)^2}. \end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis folgt, dass die Gruppengeschwindigkeit im Hohlleiter stets kleiner ist als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 .

Alternativer Lösungsweg:

Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert als

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk_z}.$$

Mit $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ und $k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_x^2 - k_y^2$ erhalten wir

$$\omega(k_z) = c_0 \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}.$$

Nun können wir die Gruppengeschwindigkeit direkt berechnen:

$$v_{\text{gr}} = c_0 \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} = c_0 \frac{k_z}{k}.$$

Da k_z stets kleiner gleich k sein muss, gilt damit $v_{\text{gr}} \leq c_0$.

- e) Ausbreitungsfähig ist die Fundamentalmode nur für $v_{\text{gr}} > 0$ (der Fall $v_{\text{gr}} < 0$ sei hier vernachlässigt). Es bezeichne a_{grenz} die Hohlleiterbreite, für die $v_{\text{gr}} = 0$ gilt. Dann folgt wegen

$$c_0 > 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c_0}{a_{\text{grenz}} \omega}\right)^2} - \left(\frac{\pi c_0}{b \omega}\right)^2 &= 0 \iff \\ \left(\frac{\pi c_0}{a_{\text{grenz}} \omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi c_0}{b \omega}\right)^2 &= 1 \iff \\ \left(\frac{\pi c_0}{\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{a_{\text{grenz}}^2} + \frac{1}{b^2}\right) &= 1 \iff \\ \left(\frac{\pi c_0}{\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{a_{\text{grenz}}^2} + \frac{4}{a_{\text{grenz}}^2}\right) &= 1 \iff \\ \left(\frac{\pi c_0}{\omega}\right)^2 \frac{5}{a_{\text{grenz}}^2} &= 1 \iff \\ a_{\text{grenz}}^2 &= 5 \left(\frac{\pi c_0}{\omega}\right)^2 \iff \\ a_{\text{grenz}} &= \sqrt{5} \frac{\pi c_0}{\omega} = \sqrt{5} \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Alternativ kann die minimale Breite auch anhand der Bedingung $k_z > 0$ ermittelt werden.

Die Skizze ist in Abbildung 11 gegeben.

- f) Die Modenzahlen m und n geben die Anzahl der Extremstellen des Feldes entlang der x - bzw. y -Achse an.

Abbildung 3: $m = 1, n = 1$

Sowohl $|E_x|$, als auch $|E_y|$ haben exakt eine Extremstelle entlang der y - bzw. x -Richtung.

Abbildung 4: $m = 3, n = 2$

$|E_x|$ hat zwei Extremstellen entlang der y -Richtung und $|E_y|$ hat drei Extremstellen entlang der x -Richtung.

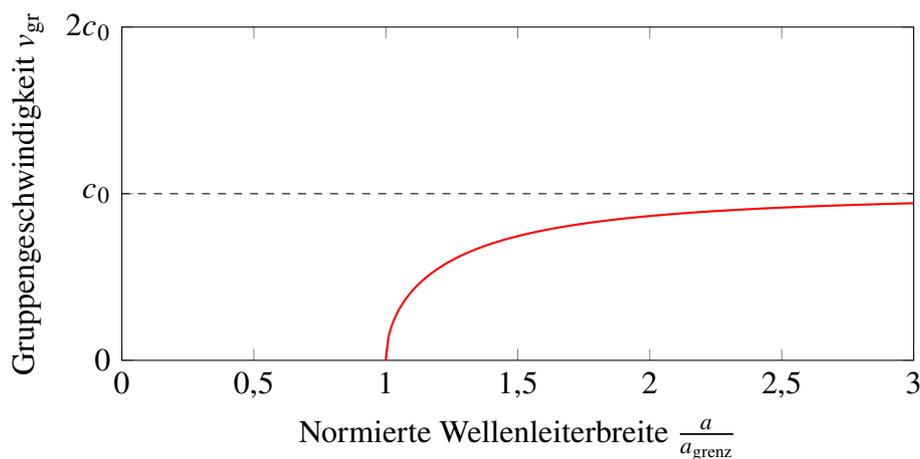


Abbildung 11

Lösung zu Aufgabe 3:

- a) Das magnetische Vektorpotential berechnet sich mit $\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$, wobei wir ausnutzen, dass der Rotationsoperator auf die ϕ -Komponente reduziert werden kann, da das magnetische Feld lediglich eine ϕ -Komponente besitzt. Damit folgt

$$\mu \underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \iff \mu \frac{\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r\underline{A}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi$$

Mit Hilfe von Hinweis 2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r\underline{A}_\theta)}{\partial r} &= \frac{\mu\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \frac{j\omega}{c} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \iff \\ r\underline{A}_\theta &= -\frac{\mu\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \frac{c}{j\omega} \frac{j\omega}{c} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} + \underline{c}_\theta \iff \\ \underline{A}_\theta &= -\frac{\mu\delta I}{4\pi r} \sin(\theta) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} + \frac{c_\theta}{r} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \theta} &= \frac{\mu\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \frac{1}{r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \iff \\ \underline{A}_r &= \frac{\mu\delta I}{4\pi r} \cos(\theta) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} + \underline{c}_r \end{aligned}$$

- b) Die elektrische Feldstärke ergibt sich mit Hilfe des Induktionsgesetzes für harmonische Wellen mit $\underline{H}_r = \underline{H}_\theta = 0$ zu

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}} \\ &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial (\sin(\theta)\underline{H}_\phi)}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\underline{H}_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \underline{E}_r &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\delta I}{4\pi} \sin^2(\theta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \right) \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\delta I}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &= \frac{\delta I}{2\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{cr^2} - \frac{j}{\omega r^3} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \cos(\theta) \\ \underline{E}_\theta &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta I}{4\pi r} \sin(\theta) \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\delta I}{4\pi r} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{j\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \left(\left(\frac{j\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \left(-\frac{j\omega}{c} \right) - \frac{1}{r^2} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \left(\frac{1}{r^3} + \frac{j\omega}{cr^2} + \left(\frac{j\omega}{c} \right)^2 \frac{1}{r} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\ &= \frac{\delta I}{4\pi\varepsilon} \sin(\theta) \left(\frac{1}{cr^2} - \frac{j}{\omega r^3} + \frac{j\omega}{c^2 r} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\ \underline{E}_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Im Fernfeld verschwinden wegen $\frac{1}{r^3} \ll \frac{1}{r^2} \ll \frac{1}{r}$ für $r \rightarrow \infty$ die Feldanteile, die Terme $\frac{1}{r^3}$ oder $\frac{1}{r^2}$ enthalten. Folglich lautet der Nah- bzw. Fernfeldanteil (**Im Nahfeld genügt auch der $\frac{1}{r^3}$ -Anteil**)

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{Nahfeld}} = \frac{\delta I}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{cr^2} - \frac{j}{\omega r^3} \right) (2 \cos(\theta) \mathbf{e}_r + \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{Fernfeld}} = \frac{\delta I}{4\pi\epsilon} \sin(\theta) \frac{j\omega}{c^2 r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \mathbf{e}_\theta.$$

- c) Der Fernfeldanteil des magnetischen Feldes lässt sich direkt mit $\frac{1}{r^3} \ll \frac{1}{r^2} \ll \frac{1}{r}$ für $r \rightarrow \infty$ oder über die Maxwellgleichungen aus dem elektrischen Feld \underline{E}_θ bestimmen.

$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{Fernfeld}} = \frac{\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \frac{j\omega}{cr} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \mathbf{e}_\phi$$

- d) Die mittlere Leistungsdichte entspricht dem Realteil des komplexen Poynting-Vektors. Da im Fernfeld das elektrische Feld lediglich in θ -Richtung schwingt und das magnetische Feld lediglich in ϕ -Richtung, breitet sich die Leistung vollständig in radialer Richtung aus, denn $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r$.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}} &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} \underline{E}_\theta \underline{H}_\phi^* \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta I}{4\pi\epsilon} \sin(\theta) \frac{j\omega}{c^2 r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \frac{\delta I}{4\pi} \sin(\theta) \left(-\frac{j\omega}{cr} \right) e^{-j\omega(t-\frac{r}{c})} \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta^2 I^2}{16\pi^2 \epsilon} \frac{1}{r^2} \sin^2(\theta) \frac{\omega^2}{c^3 r^2} \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{c\epsilon} \left(\frac{\omega\delta I}{4\pi cr} \right)^2 \sin^2(\theta) \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Das Ergebnis für die mittlere Leistungsdichte ist identisch, da der komplexe Poynting-Vektor hier rein reell ist, $\Re\{\underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}}\} = \underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}}$.

- e) Siehe Abbildung 12.

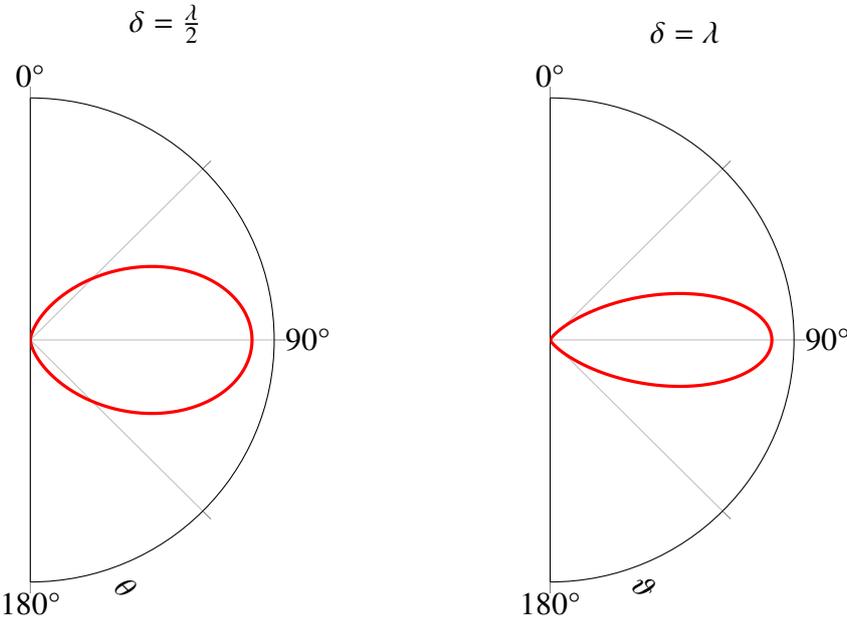


Abbildung 12

Lösung zu Aufgabe 4:

- a) Die Wellenleitung innerhalb der dielektrischen Platte basiert auf dem Prinzip der Totalreflexion. Dabei wird die elektromagnetische Welle an den Materialgrenzschichten stets vollständig reflektiert und so innerhalb des Wellenleiters gehalten. Aufgrund der Grenzflächenbedingungen muss das elektrische Feld allerdings auch in den Bereich außerhalb der Platte hinausragen sofern es nicht auf einen idealen Leiter trifft. Da die Welle innerhalb des angrenzenden Mediums nicht ausbreitungsfähig ist muss das elektrische Feld exponentiell abklingen. Dementsprechend wählen wir den Ansatz

$$\underline{\mathcal{E}}_x(y) = \begin{cases} A_1 e^{k_{1,y}^{(i)}(y+\frac{d}{2})} e^{j(\omega t - \beta z)} & y < -\frac{d}{2} \\ E_0 \cos(k_{2,y}y) e^{j(\omega t - \beta z)} & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ A_2 e^{-k_{1,y}^{(i)}(y-\frac{d}{2})} e^{j(\omega t - \beta z)} & \frac{d}{2} < y \end{cases} .$$

Die Koeffizienten A_1 und A_2 erhalten wir unter Ausnutzung der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Felds, welche für alle z und t erfüllt sein müssen:

$$y = -\frac{d}{2} : \quad A_1 = E_0 \cos\left(-k_{2,y}\frac{d}{2}\right)$$

$$y = +\frac{d}{2} : \quad A_2 = E_0 \cos\left(+k_{2,y}\frac{d}{2}\right)$$

Aufgrund der Symmetrie des Kosinus erhalten wir

$$A_1 = A_2 = E_0 \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2}\right)$$

und damit

$$\underline{\mathcal{E}}_x(y) = \begin{cases} E_0 \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2}\right) e^{k_{1,y}^{(i)}(y+\frac{d}{2})} e^{j(\omega t - \beta z)} & y < -\frac{d}{2} \\ E_0 \cos(k_{2,y}y) e^{j(\omega t - \beta z)} & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ E_0 \cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2}\right) e^{-k_{1,y}^{(i)}(y-\frac{d}{2})} e^{j(\omega t - \beta z)} & \frac{d}{2} < y \end{cases} .$$

- b) Zur Bestimmung der magnetischen Feldkomponenten innerhalb der Platte verwenden wir das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j \omega \mu \underline{\mathbf{H}} \quad \iff \quad \underline{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega \mu} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{H}}_x \\ \underline{\mathcal{H}}_y \\ \underline{\mathcal{H}}_z \end{pmatrix} = \frac{j}{\omega \mu} \nabla \times \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{E}}_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{j}{\omega \mu} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \underline{\mathcal{E}}_x \\ -\frac{\partial}{\partial y} \underline{\mathcal{E}}_x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{j}{\omega \mu} \begin{pmatrix} 0 \\ -j \beta E_0 \cos(k_{2,y}y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ k_{2,y} E_0 \sin(k_{2,y}y) e^{j(\omega t - \beta z)} \end{pmatrix} = \frac{j E_0}{\omega \mu} \begin{pmatrix} 0 \\ -j \beta \cos(k_{2,y}y) \\ k_{2,y} \sin(k_{2,y}y) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

- c) Ist das Material der dielektrischen Platte verlustbehaftet, so wird die Ausbreitungskonstante komplex, d.h. sie nimmt die Form $\beta - j \alpha$ an, und es kommt zu einer exponentiellen Dämpfung der Welle. Entsprechend erhalten wir für die Mode $\underline{\mathcal{E}}_x$ innerhalb der Platte

$$\underline{\mathcal{E}}_x(y) = E_0 \cos(k_{2,y}y) e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} .$$

d) Die Skizzen der Feldbilder sind in Abbildung 13 gegeben, das markierte Diagramm ist in Abbildung 14 dargestellt. Bei der bereits eingezeichneten Bedingung handelt es sich um die tan-Gleichung, weshalb der Viertelkreis $\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}$ noch zu ergänzen war. Die Schnittpunkte beider Bedingungen führen auf die beiden ausbreitungsfähigen Moden.

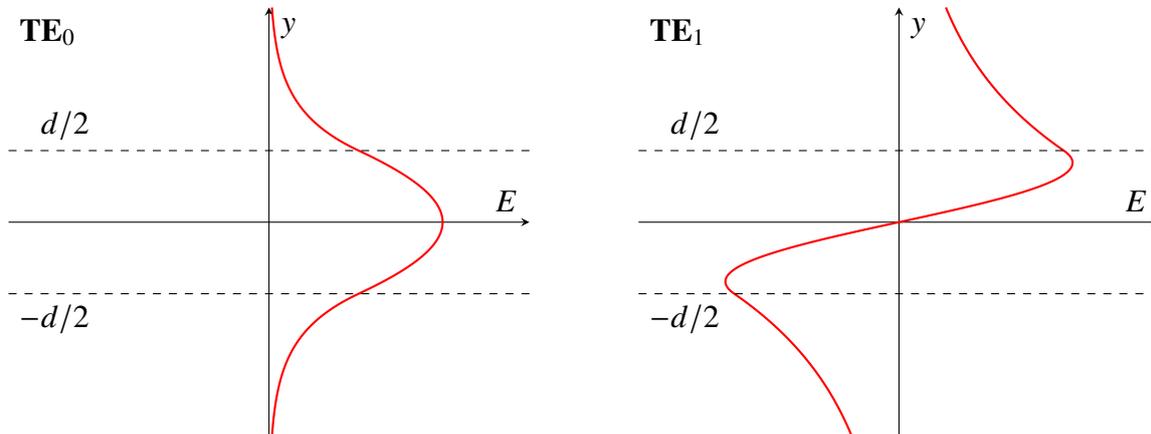


Abbildung 13

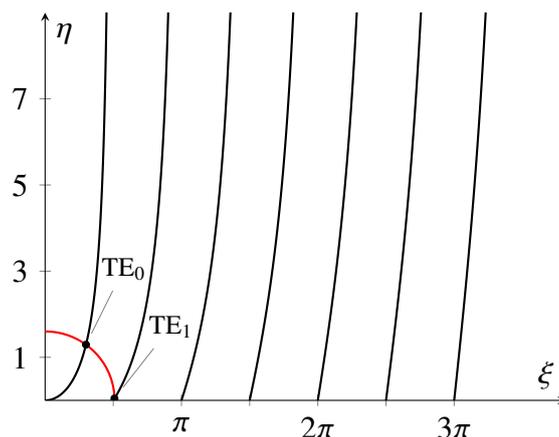


Abbildung 14

e) Eine Mode kann sich nur dann ausbilden, wenn sie nach zweifachem Durchlaufen der Plattendicke d sowie der Reflexion an der oberen und unteren Grenzfläche konstruktiv mit sich selbst interferiert. Dazu muss die angesammelte Phasenänderung einem ganzzahligen Vielfachen von 2π entsprechen. Daraus folgt mit der Phasenverschiebung an den Grenzflächen φ die Bedingung

$$2k_1 d \cos \theta_e + 2\varphi = m 2\pi, \text{ wobei } m \in \mathbb{N}_0.$$

Umstellen dieser Gleichung nach $\cos \theta_e$ resultiert in der aus der Übung bekannten Form

$$\cos \theta_e = \frac{m \pi - \varphi}{k_1 d}. \tag{1}$$

Da der Kosinus im relevanten Winkelbereich zwischen 0° und 90° (also für $\theta_e \in (0, \pi/2)$) monoton fällt, muss die rechte Seite von (1) möglichst klein werden, um θ_e zu maximieren. Daher wird der Einfallswinkel für $m = 0$ maximal.

- f) Da die x -Komponente des elektrischen Felds tangential zur Materialgrenzfläche bei $y = \pm \frac{d}{2}$ verläuft, darf diese Komponente des elektrischen Felds *keine* Sprungstelle aufweisen. Der gezeigte Amplitudenverlauf ist jedoch in $y = \pm \frac{d}{2}$ nicht stetig, weshalb der Verlauf nicht \underline{E}_x zugeordnet werden kann. Da im ganzen Raum $\mu = \mu_0$ gilt, sind alle Komponenten des magnetischen Felds an den Materialgrenzschichten stetig, weshalb einzig die Normalkomponente (gegenüber der Grenzschicht) des elektrischen Felds eine Unstetigkeit aufweisen kann. Abgebildet ist daher der Verlauf (des Realteils) von \underline{E}_y .
- g) Da die Verteilung vier Nullstellen aufweist, gilt für die Modenzahl $m = 4$.