

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung „Elektromagnetische Wellen“

am 15. September 2022, 13:30 - 15:30 Uhr

Name	Vorname	Matrikelnummer

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Hinweise zur Prüfung:

- Zur Prüfung sind folgende Hilfsmittel zugelassen: Schreibgerät, Lineal, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und die ausgeteilte Formelsammlung.
- Prüfen Sie die Anzahl der Aufgaben- und Bearbeitungsblätter (23 inkl. Titelblatt) auf Vollständigkeit.
- Tragen Sie Namen, Vornamen und Matrikelnummer auf dem Deckblatt und der ersten Seite des Bearbeitungsbogens ein. Sollten Sie zusätzliches Papier verwenden oder die Heftung lösen, geben Sie auch auf **jedem** (zusätzlichen) Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
- Verwenden Sie für Zeichnungen **keinen** Bleistift. Die Farben rot und grün sind für die Korrektur vorgesehen und dürfen daher auch nicht verwendet werden.
- Falls Sie zusätzliches Papier benötigen, wenden Sie sich bitte an das Aufsichtspersonal. Die Verwendung von eigenem Schreibpapier ist nicht gestattet.
- Auf den Lösungsblättern ist **klar zu kennzeichnen**, zu welcher Teilaufgabe ein Resultat gehört.
- Anfang und Ende der Bearbeitungszeit werden vom Aufsichtspersonal für alle verbindlich angesagt. Eine Bearbeitung der Klausur während des Austeilens und Einsammelns der Aufgabenblätter ist nicht gestattet.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	Bonus	Σ
Punkte	21	20	25	24	90	6	90
davon erreicht							

Aufgabe 1: Grenzflächen

Eine homogene, harmonische, ebene Welle mit der Kreisfrequenz ω und dem elektrischen Feld \underline{E}_e propagiert im Vakuum ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$) und fällt bei $z = 0$ unter einem Winkel α_1 auf eine Grenzfläche zu einem dielektrischen Medium mit ε_2 ein. Die reflektierte Welle sei \underline{E}_r und die transmittierte Welle sei \underline{E}_t . Im gesamten Raum gilt für die magnetische Permeabilität $\mu_{1,2} = \mu_0$ und für die Raumladungsdichte $\rho = 0$. Beachten Sie: Für den Brechungsindex gilt $n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

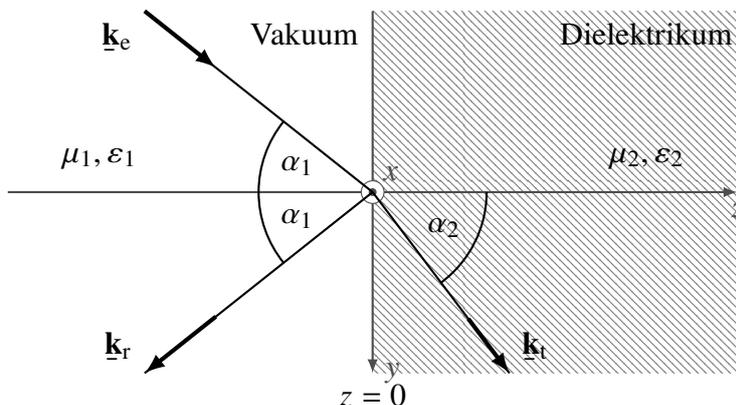


Abbildung 1: Übersicht der Wellenvektoren an der Grenzschicht.

Die Amplitude des elektrischen Felds \underline{E}_e ist gegeben durch

$$\underline{E}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_{k_e} \times \mathbf{e}_x)] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})}.$$

- Welche Koordinaten spannen die Einfallsebene auf? Handelt es sich bei der einfallenden Welle um eine senkrecht oder parallel polarisierte Welle? Begründen Sie ihre Aussagen kurz.
- Handelt es sich bei der einfallenden Welle um eine linear, zirkulär oder elliptisch polarisierte Welle? Begründen Sie ihre Aussage kurz.

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren an der Grenzfläche $z = 0$ lauten für senkrechte bzw. parallele Polarisation

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{Z_2 \cos(\alpha_1) - Z_1 \cos(\alpha_2)}{Z_2 \cos(\alpha_1) + Z_1 \cos(\alpha_2)} & t_s &= 1 + r_s \\ r_p &= \frac{Z_1 \cos(\alpha_1) - Z_2 \cos(\alpha_2)}{Z_1 \cos(\alpha_1) + Z_2 \cos(\alpha_2)} & t_p &= \frac{Z_2}{Z_1} (1 + r_p). \end{aligned}$$

- Berechnen Sie mit Hilfe der Reflexions- und Transmissionsfaktoren die reflektierten und transmittierten elektrischen Feldvektoren. Machen Sie hierfür Gebrauch von den Materialeigenschaften, um so weit wie möglich zu vereinfachen.

Hinweis: Sie sollten für die Reflexions- und Transmissionsfaktoren Ausdrücke erhalten, die lediglich von den Winkeln α_1 , α_2 und dem Brechungsindex n_2 abhängen.

- Die Welle treffe nun unter dem Brewster-Winkel auf die Grenzfläche. Was folgt daraus für den Reflexionsfaktor r_p ? Beschreiben Sie in Stichworten, welche Auswirkung dieser Einfallswinkel auf die reflektierte Welle hat.

- e) Leiten Sie ausgehend vom Reflexionsfaktor r_p mit Hilfe des Snelliusschen Brechungsgesetzes $k_1 \sin(\alpha_1) = k_2 \sin(\alpha_2)$ den Brewsterschen Polarisationswinkel α_1 in Abhängigkeit der Brechzahl n_2 her. Gesucht ist die nicht-triviale Lösung, d.h. mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Hinweis: Beachten Sie die Periodizität der trigonometrischen Funktionen, d.h. es gilt $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

- f) Geben Sie das reflektierte und transmittierte elektrische Feld für $r_p = 0$ an.

Aufgabe 2: Hertzscher Dipol

Gegeben sei das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols in kartesischen Koordinaten.

$$\underline{\mathbf{A}} = A_z \mathbf{e}_z$$

$$A_z = \frac{\mu \Delta s I_0 k}{4\pi} \frac{1}{kr} e^{j(\omega t - kr)}$$

- a) Berechnen sie das magnetische Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ des Hertzschen Dipols in Kugelkoordinaten.
Hinweis: In Abbildung 2 wird ersichtlich, wie die Kugelkoordinaten aus den kartesischen Koordinaten hervorgehen.
- b) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ in Kugelkoordinaten nun die magnetische und elektrische Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$ und $\underline{\mathbf{E}}$ im gesamten Raum.
Hinweis: Es gilt $\nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$.
- c) Welche Näherung gilt im Fernfeld? Bestimmen Sie die magnetischen und elektrischen Feldkomponenten im Fernfeld.
- d) Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor, d.h. die Energieflussdichte, $\underline{\mathbf{S}}$ im Fernfeld. Die durchschnittlich abgestrahlte Leistung berechnet sich zu $P_S = \oint_O \underline{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{F}$ mit der Kugeloberfläche $d\mathbf{F} = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi \mathbf{e}_r$. Wie lautet die gesamte im zeitlichen Mittel abgestrahlte Leistung P_S ?
Hinweis: Es gilt $\int \sin^3(x) dx = \frac{1}{4} \left(-3 \cos(x) + \frac{1}{3} \cos(3x) \right)$.

Zur grafischen Darstellung der im Fernfeld abgestrahlten Energieflussdichte verwendet man das Richtdiagramm. Dieses bezieht die Energieflussdichte $\underline{\mathbf{S}} = S \mathbf{e}_r$ auf die Energieflussdichte eines Strahlers, der die Leistung isotrop abstrahlt

$$D = \frac{S}{4\pi r^2}.$$

- e) Berechnen Sie D und skizzieren Sie qualitativ das Richtdiagramm in der Ebene $\phi = \text{const.}$ (Vertikaldiagramm) und das Richtdiagramm in der Ebene $\vartheta = \pi/2$ (Horizontaldiagramm) in Abbildung 3.

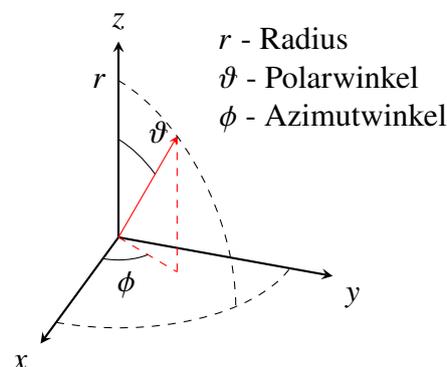


Abbildung 2: Visualisierung der Kugelkoordinaten. Es gilt $0 \leq \vartheta < \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$.

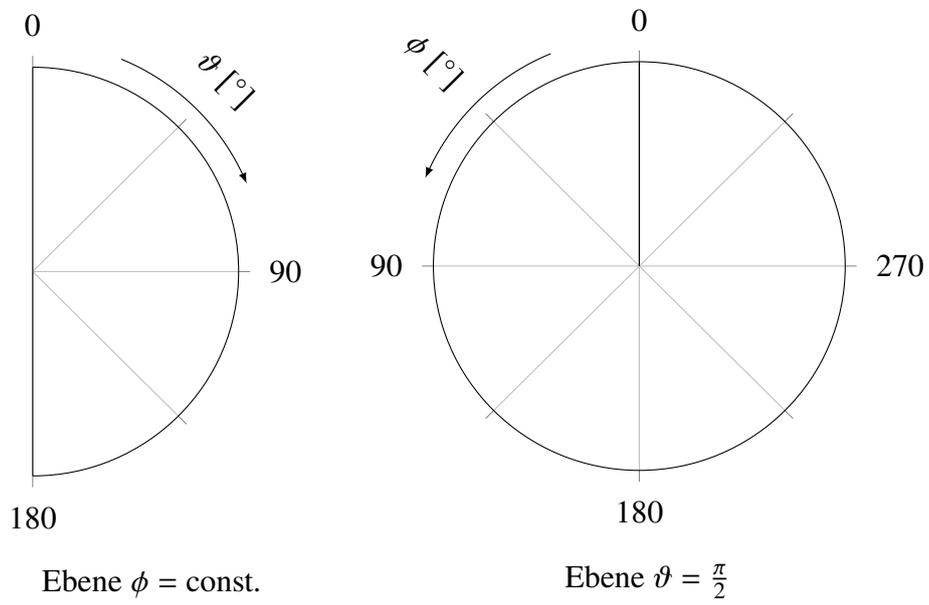


Abbildung 3: Vertikaldiagramm (links) und Horizontaldiagramm (rechts) des Hertzschen Dipols.

Aufgabe 3: Rundhohlleiter

Gegeben sei ein Rundhohlleiter mit dem Radius a , wie in Abbildung 4 dargestellt. Das Innere des Wellenleiters sei vakuumiert und die Wand ideal leitend, d.h. es gelte im Inneren $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ bzw. auf der Wand $\kappa \rightarrow \infty$. In diesem Hohlleiter breiten sich nun unabhängig voneinander zwei

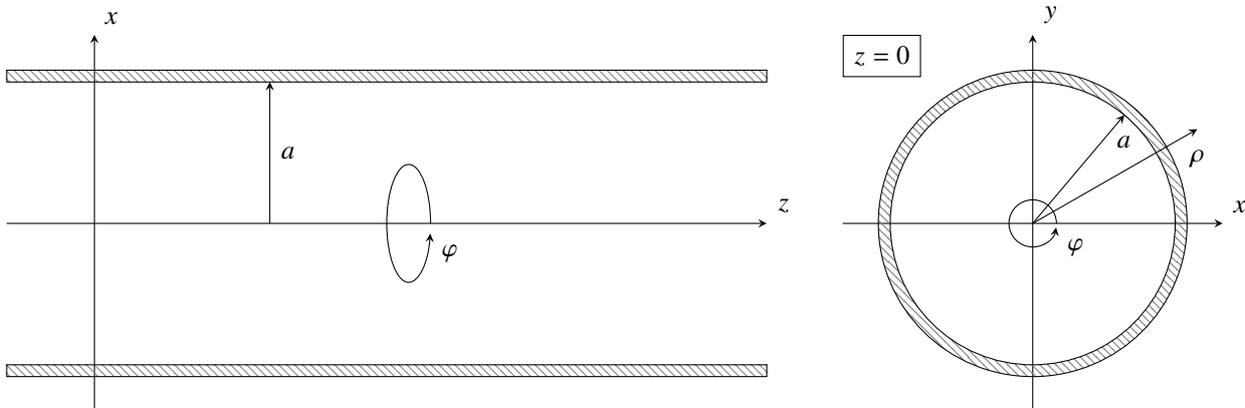


Abbildung 4: Links: Längsschnitt. Rechts: Querschnitt.

elektromagnetische Wellen aus mit $(m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N})$

$$\underline{E}_z(\rho, \varphi, z; t) = \sum_{m,n} \underline{E}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z; t)$$

$$\underline{H}_z(\rho, \varphi, z; t) = \sum_{m,n} \underline{H}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z; t),$$

wobei für die Summanden mit $\psi_1, \psi_2 \in [0, \pi)$ gilt, dass

Welle (1):

$$\underline{E}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z; t) = 0$$

$$\underline{H}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z; t) = \underline{H}_0^{m,n} \cos(m\varphi + \psi_1) J_m(k_{t,1}^{m,n} \rho) \exp(j(\omega t - k_{z,1}^{m,n} z))$$

Welle (2):

$$\underline{E}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z; t) = \underline{E}_0^{m,n} \cos(m\varphi + \psi_2) J_m(k_{t,2}^{m,n} \rho) \exp(j(\omega t - k_{z,2}^{m,n} z))$$

$$\underline{H}_z^{m,n}(\rho, \varphi, z; t) = 0.$$

Die Funktion J_m bezeichnet hierbei die Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung.

- Handelt es sich bei Welle (1) um eine TE- oder TM-Welle? Begründen Sie.
- Ermitteln Sie die transversalen elektrischen Feldkomponenten der Moden der Wellen (1) und (2) gemäß

$$\underline{E}_\rho^{m,n} = -j \frac{k_z^{m,n}}{(k_t^{m,n})^2} \left(\frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{k_z^{m,n}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \varphi} \right)$$

$$\underline{E}_\varphi^{m,n} = -j \frac{k_z^{m,n}}{(k_t^{m,n})^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{k_z^{m,n}} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \rho} \right).$$

- c) Geben Sie die nicht-verschwindenden - relativ zur Wand - *tangentialen* elektrischen Feldkomponenten im Rundhohlleiter an. Welche Randbedingungen müssen diese Komponenten erfüllen?
- d) Ermitteln Sie die transversalen Ausbreitungskonstanten $k_{t,1}^{m,n}$ bzw. $k_{t,2}^{m,n}$ der Mode (m,n) der Wellen (1) bzw. (2) mithilfe der Randbedingungen aus Aufgabenteil c).

Hinweis: Wir bezeichnen die n -te Nullstelle ($n \in \mathbb{N}$) der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung als $j_{m,n}$ bzw. die n -te Nullstelle der ersten Ableitung der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung als $j'_{m,n}$.

- e) Bestimmen Sie die mithilfe der Tabellen 1 und 2 die jeweils erste Mode (m,n) der Wellen (1) bzw. (2). Welche Mode welcher Welle ist die Grundmode des Rundhohlleiters? Für welche Frequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ kann sich bei konstantem Hohlleiterradius a *ausschließlich* diese Grundmode ausbreiten? Vereinfachen Sie soweit möglich.

In der Ebene $z = 0$ werde nun eine ideal leitende Kreisscheibe infinitesimaler Dicke mit dem Radius $b < a$ eingebracht, wie in Abbildung 5 dargestellt. Zwischen dieser Kreisscheibe und der Hohlleiterwand

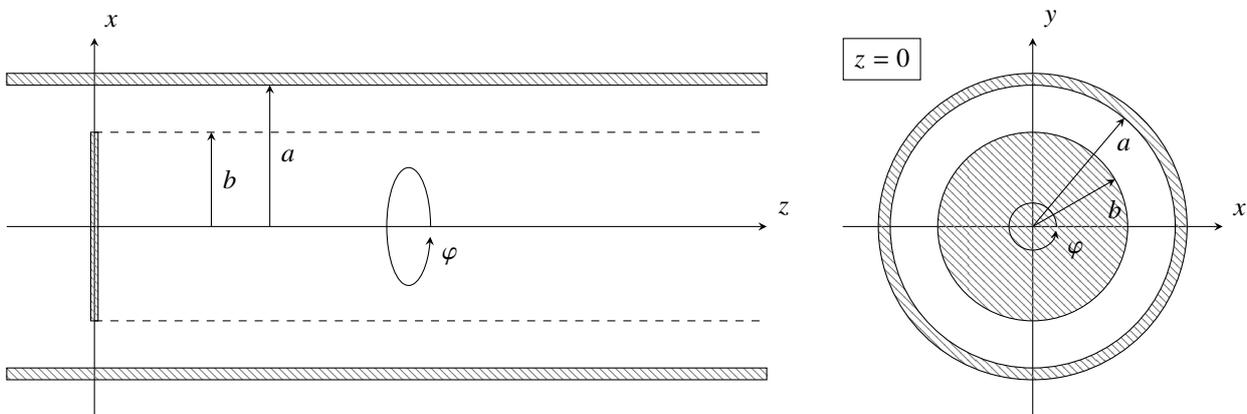


Abbildung 5: Links: Längsschnitt. Rechts: Querschnitt.

liege eine Wechselspannung an, wodurch in $z = 0$ ein elektrisches Feld mit der komplexen Amplitude

$$\underline{\mathbf{E}}(\rho, \varphi, z = 0) = \underline{E}_\rho(\rho, z = 0) \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho \begin{cases} \underline{E}_0 \frac{a}{\rho} & b < \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

anliege. Dieses elektrische Feld rege elektromagnetische Wellen im Rundhohlleiter an, die sich in positive z -Richtung ausbreiten. Analog zu der Anregung werden auch die ausbreitungsfähigen Wellen im Hohlleiter eine im Allgemeinen von null verschiedene \underline{E}_ρ -Komponente aufweisen. Wir nehmen an, dass aufgrund der zylindersymmetrischen Anregung alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Felds unabhängig von φ sind. Daher gelte stets $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

- f) Welche der Wellen (1) bzw. (2) kann durch das Feld zwischen Kreisscheibe und Leiterwand angeregt werden? Begründen Sie.

Tabelle 1: n -te Nullstelle der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $j_{m,n}$.

$j_{m,n}$ \ m	0	1	2	3	4	5
n						
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178

Tabelle 2: n -te Nullstelle der ersten Ableitung der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $j'_{m,n}$.

$j'_{m,n}$ \ m	0	1	2	3	4	5
n						
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012	5,3175	6,4156
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152	9,2824	10,5199
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459	12,6819	13,9872
4	13,3237	11,7060	13,1704	14,5858	15,9641	17,3128
5	16,4706	14,8636	16,3475	17,7887	19,1960	20,5755

Aufgabe 4: Stufenindexfaser

Nun betrachten wir eine Glasfaser mit Stufenindexprofil und Kernradius a , in der sich eine elektromagnetische Welle in z -Richtung ausbreitet. Der Faserquerschnitt ist in Abbildung 6 dargestellt. Die Medien seien nichtleitend, raumladungsfrei und nichtmagnetisch mit $\mu = \mu_0$. Die Brechzahl im Kern bzw. im Mantel sei n_1 bzw. n_2 , wobei für die normierte Brechzahldifferenz gelte, dass

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \ll 1.$$

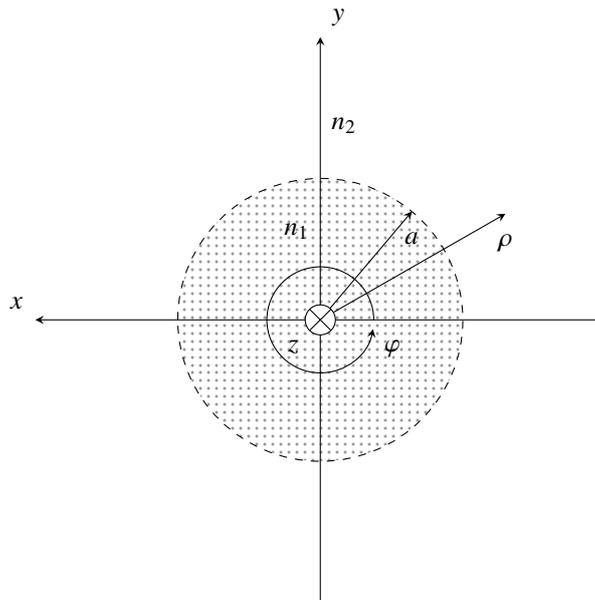


Abbildung 6

- Benennen und beschreiben Sie das Phänomen, welches die Wellenführung in einem dielektrischen Wellenleiter wie der Glasfaser ermöglicht.
- Weisen Sie nach, dass die tangentialen und normalen Komponenten des E- und H-Felds an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser mit $\Delta \ll 1$ näherungsweise stetig sind.
- Wie werden der Fall $\Delta \ll 1$ und die Näherungslösungen der Wellengleichung genannt, die unter dieser Bedingung erhalten werden?

Wir nehmen im Folgenden an, dass sich in der Faser eine Welle mit $\underline{E}_x \neq 0$ und $\underline{E}_y = 0$ ausbreitet. Als Lösungsansatz für \underline{E}_x wählen wir mit $0 \leq \psi < \pi$

$$\underline{E}_x(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_{x,0} R(\rho) \cos(\ell\varphi + \psi) \exp(-j k_z z).$$

- Setzen Sie den Ansatz für \underline{E}_x in die skalare Helmholtzgleichung ein. Führen Sie eine Fallunterscheidung für die Fälle $\rho \leq a$ und $\rho > a$ durch und weisen Sie nach, dass $R(\rho)$ jeweils die Besselsche bzw. die modifizierte Besselsche Differentialgleichung erfüllen muss. Beachten Sie dabei, dass \underline{E}_x in Zylinderkoordinaten gegeben ist.

Hinweis: Die Besselsche und modifizierte Besselsche Differentialgleichung lauten

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + (u^2 \rho^2 - \ell^2) R = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} - (w^2 \rho^2 + \ell^2) R = 0.$$

- e) Welche der in Tabelle 3 dargestellten Funktionen stellen physikalisch sinnvolle Lösungen der Differenzialgleichungen für die Funktion $R(\rho)$ im Kern bzw. im Mantel dar? Begründen Sie Ihre Wahl.
- f) Die Abbildung 7 zeigt Konturplots der Beträge der x -Komponente des elektrischen Felds in der Faser für verschiedene Moden. Ordnen Sie den Darstellungen die entsprechenden Modenzahlen (ℓ, n) zu.

Hinweis: Beachten Sie, dass ℓ die azimuthale und n die radiale Modenzahl darstellt.

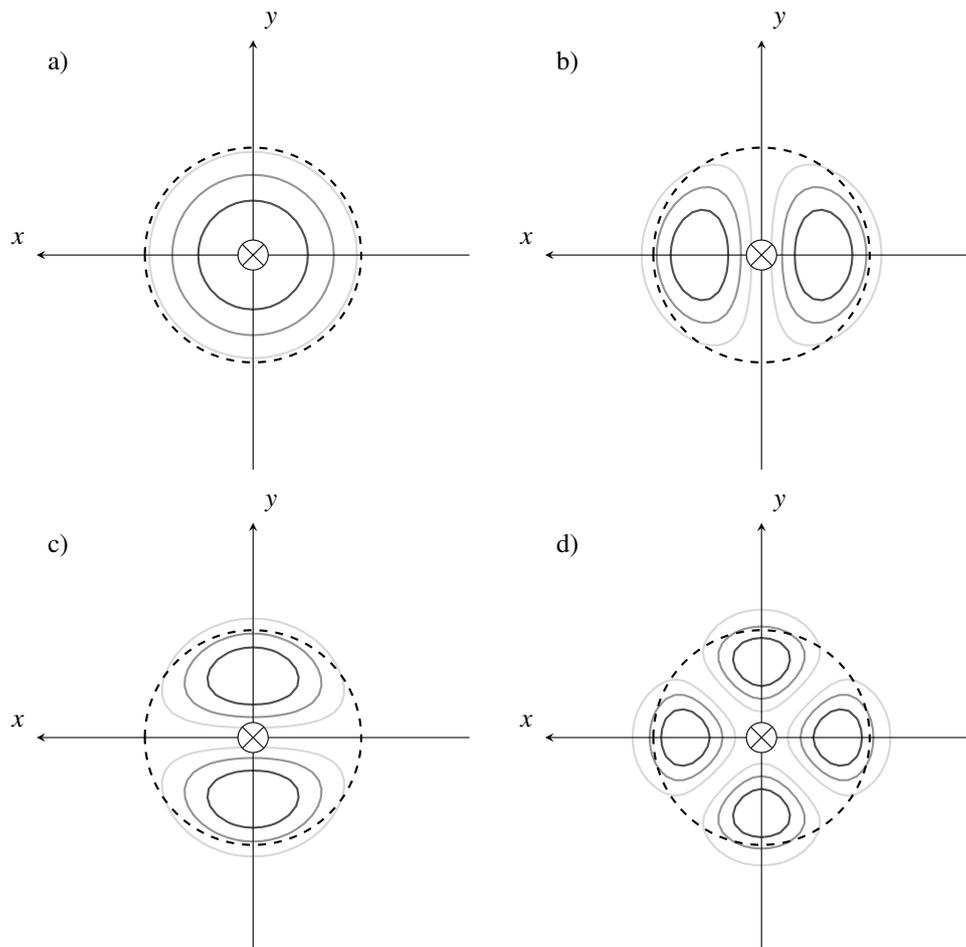


Abbildung 7: Die Konturlinien stellen den Betrag der Feldkomponente dar. Je dunkler die Linie, desto größer der Betrag und umgekehrt. Die gestrichelte Linie zeigt die Kern-Mantel-Grenzfläche.

Der Radius des Faserkerns betrage nun $a = 4,5 \mu\text{m}$. Die Brechzahlen im Kern und Mantel seien $n_1 = 1,45$ und $n_2 = 1,447$.

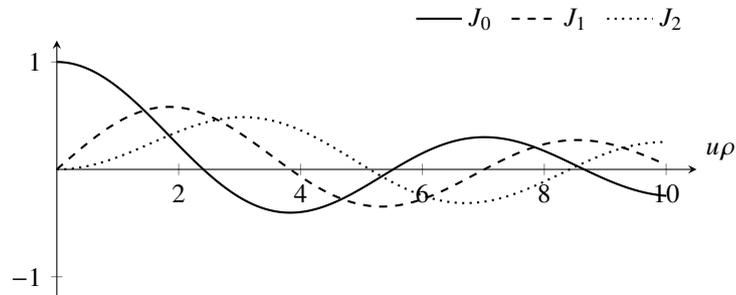
- g) Wie viele Moden können sich in der Stufenindexfaser bei einer Wellenlänge von $\lambda_1 = 1550 \text{ nm}$ ausbreiten? Wie viele Moden sind es bei $\lambda_2 = 1300 \text{ nm}$? Das BV-Diagramm der linear polarisierten Moden in der Stufenindexfaser finden Sie in Abbildung 8.

Hinweis: In der Stufenindexfaser berechnet sich die normierte Frequenz V gemäß $V = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

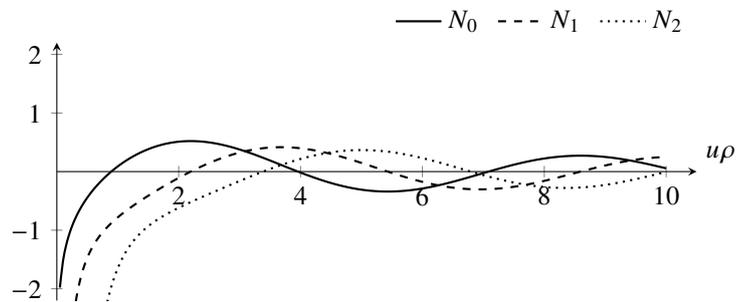
Funktionenklasse Graphische Darstellung

Lösungen der Besselschen Differentialgleichung: *Besselfunktionen*

1. Gattung $J_\ell(u\rho)$

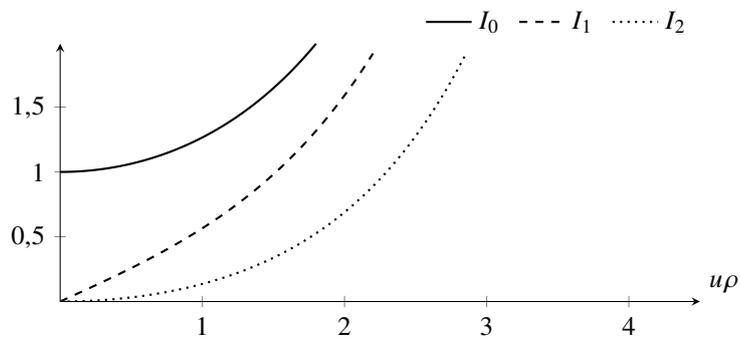


2. Gattung $N_\ell(u\rho)$



Lösungen der modifizierten Besselschen Differentialgleichung: *Modifizierte Besselfunktionen*

1. Gattung $I_\ell(u\rho)$



2. Gattung $K_\ell(u\rho)$

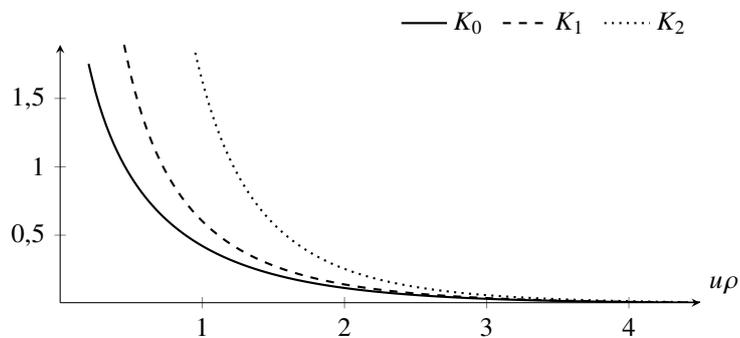


Tabelle 3

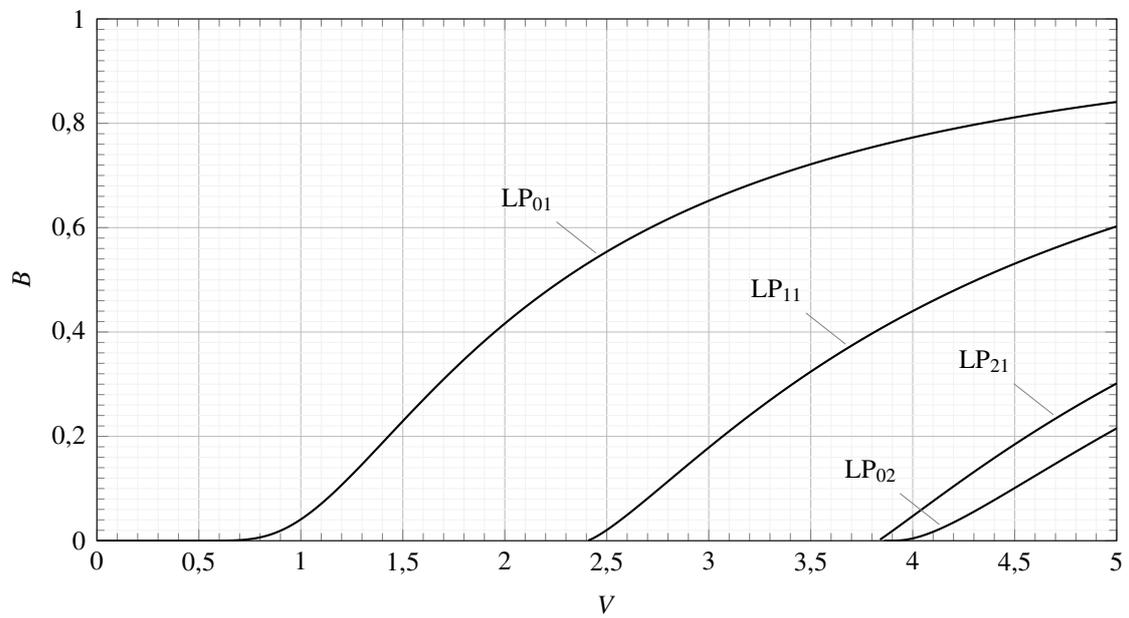


Abbildung 8: Normierte Ausbreitungskonstante B aufgetragen über der normierten Frequenz V für die linear polarisierten Moden in der Stufenindexfaser.

Lösung zu Aufgabe 1: Grenzflächen (21 Punkte)

- a) Die einfallende Welle hat sowohl senkrechte, als auch parallel polarisierte elektrische Feldanteile. Dies wird anhand der Orientierung der Einheitsvektoren im Bezug zu der Einfallsebene ersichtlich. Die Einfallsebene wird durch die Wellenvektoren aufgespannt (0.5) und liegt in der $y - z$ -Ebene (0.5). Der Wellenanteil in \mathbf{e}_x -Richtung steht orthogonal auf der Einfallsebene (0.5) und bezeichnet damit den senkrechten Wellenanteil (0.5). Das Kreuzprodukt ($\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_x$) ist orthogonal zum Wellenvektor und liegt in der Einfallsebene (0.5). Dieser Wellenanteil bezeichnet demnach eine parallele Polarisation (0.5).

Merke: Ebene Wellen müssen nicht ausschließlich senkrecht oder parallel polarisiert sein. Auch Superpositionen beider Ausrichtungen, also geneigte Ausrichtungen der elektrischen Feldkomponenten, sind möglich (das Konstellationsdiagramm ist nur ein mathematisches Konstrukt). Für solche Wellen, müssen immer beide Feldausrichtungen separat berücksichtigt werden.

Gesamt: 3 Punkte

- b) Da die beiden orthogonalen elektrischen Feldkomponenten durch den selben Phasenterm $e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})}$ beschrieben werden, haben sie eine Phasendifferenz von $\Delta\varphi = 0$ (1). Dies resultiert in einer linearen Polarisation. (1)

Gesamt: 2 Punkt

- c) Beide Regionen sind nichtleitend ($\kappa = 0$). Das Dielektrikum kann durch die Brechungsindizes $n_1 = \sqrt{\epsilon_1} = 1$ sowie $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_1}} = Z_0 \\ \underline{Z}_2 &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_2}} = \frac{1}{n_2} Z_0 \quad (1) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten vereinfachen sich somit zu

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} & t_s &= 1 + r_s \\ r_p &= \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)} & t_p &= \frac{1}{n_2} (1 + r_p) \quad (1) \end{aligned}$$

Da die Welle sowohl senkrechte, als auch parallele Feldanteile besitzt, muss die Reflexion/Transmission ebenso für beide Fälle betrachtet werden. Der reflektierte, senkrechte bzw. parallele Anteil ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_{r,s} &= \frac{\cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \quad (1) \\ \underline{\mathbf{E}}_{r,p} &= \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)} \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{k_r} \times \mathbf{e}_x) e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \quad (1) \end{aligned}$$

Die gesamte reflektierte Welle resultiert somit zu

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{\cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \mathbf{e}_x + \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)} (\mathbf{e}_{k_r} \times \mathbf{e}_x) \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} .$$

Analog das Vorgehen für die transmittierte Welle:

$$\underline{\mathbf{E}}_{t,s} = \frac{2 \cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})} \quad (1)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{t,p} = \frac{2 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)} \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{k_t} \times \mathbf{e}_x) e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})} \quad (1)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{2 \cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \mathbf{e}_x + \frac{2 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)} (\mathbf{e}_{k_t} \times \mathbf{e}_x) \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})} .$$

Gesamt: 6 Punkte

- d) Für den Brewsterschen Polarisationswinkel gilt $r_p = 0$ (1). Von einer beliebig polarisierten Welle, welche unter dem Winkel α_1 auf die Grenzfläche einfällt, wird lediglich der senkrecht polarisierte Anteil reflektiert. Die reflektierte Welle ist folglich senkrecht polarisiert (1).

Gesamt: 2 Punkte

- e) Es gilt

$$r_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)} \stackrel{!}{=} 0 .$$

Daraus folgt, dass der Zähler gleich Null sein muss.

$$n_2 = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} \quad (1)$$

Mit Hilfe des Snelliuschen Brechungsgesetzes $\sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ (1) und $k_{1,2} = k_0 n_{1,2}$, lässt sich dieser zu

$$n_2 = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}$$

erweitern. Die Gleichung

$$\frac{\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1)} = 1 \quad (1)$$

hat die triviale Lösung $\alpha_2 = \alpha_1$ und die nicht-triviale Lösung $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ (1). Damit ergibt sich

$$n_2 = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} = \tan(\alpha_1) \quad (1)$$

Schließlich resultiert der Brewster-Winkel zu

$$\alpha_1 = \arctan(n_2) . \quad (1)$$

Gesamt: 6 Punkte

- f) Für den Brewster-Winkel wird der parallel polarisierte Teil der Welle gar nicht reflektiert sondern vollständig transmittiert. Die reflektierte Welle ergibt sich somit zu

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \frac{E_0 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{\sqrt{2} \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \mathbf{e}_x e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})} \quad (1)$$

und die transmittierte Welle resultiert zu

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{2 \cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \mathbf{e}_x + \frac{1}{n_2} (\mathbf{e}_{k_t} \times \mathbf{e}_x) \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})} . \quad (1)$$

Gesamt: 2 Punkte

Lösung zu Aufgabe 2: Hertzscher Dipol (20 Punkte)

a) Mit $\underline{A}_x = \underline{A}_y = 0$ vereinfacht sich die Darstellung des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten zu

$$\underline{A}_r = \underline{A}_z \cos(\vartheta) = \frac{\mu \Delta s I_0 k}{4\pi} \frac{1}{kr} \cos(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \quad (1)$$

$$\underline{A}_\vartheta = -\underline{A}_z \sin(\vartheta) = -\frac{\mu \Delta s I_0 k}{4\pi} \frac{1}{kr} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \quad (1)$$

$$\underline{A}_\phi = 0. \quad (1)$$

Das gesamte Feld resultiert somit zu

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_r \mathbf{e}_r + \underline{A}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta.$$

Gesamt: 3 Punkt

b) Mit dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \underline{A}_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi \quad (1) \\ &= \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi} \left(\frac{j}{k^2 r} + \frac{1}{k^3 r^2} \right) \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\phi \quad (1) \end{aligned}$$

und für das elektrische Feld mit $\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}})$ (1)

$$\begin{aligned} \underline{E}_r &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial(\sin(\vartheta) \underline{H}_\phi)}{\partial \vartheta} \\ &= \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi\omega\epsilon} 2 \left(\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{j}{k^3 r^3} \right) \cos(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \quad (1) \\ \underline{E}_\vartheta &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\phi)}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi} \frac{1}{r} \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{j}{k^2} + \frac{1}{k^3 r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \right] \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi} \frac{1}{r} \sin(\vartheta) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^3 r^2} - \frac{j}{k^2 r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \\ &= \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi\omega\epsilon} \sin(\vartheta) \left(\frac{j}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} - \frac{j}{k^3 r^3} \right) e^{j(\omega t - kr)} \quad (1) \\ \underline{E}_\phi &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Gesamt: 6 Punkte

c) Weit weg vom Hertzschen Dipol, d.h. für $r \gg 2\pi/k = \lambda$ (1) spielen in der Klammer jeweils nur die Terme proportional $1/r$ eine Rolle und wir erhalten

$$\underline{H}_\phi \approx j \frac{\Delta s I_0 k}{4\pi} \frac{1}{r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \quad (1)$$

$$\underline{E}_r \approx 0 \quad (1)$$

$$\underline{E}_\vartheta \approx j \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi\omega\epsilon} \frac{1}{kr} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \quad (1)$$

Gesamt: 4 Punkte

d) Der komplexe Poynting-Vektor ergibt sich mit $\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*)$ zu

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \\ &= \frac{1}{2}E_{\vartheta}H_{\phi}^* \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(\frac{\Delta s I_0}{4\pi} \right)^2 \frac{k^3}{r^2} \sin^2(\vartheta) \mathbf{e}_r. \quad (1)\end{aligned}$$

Der komplexe Poynting-Vektor beschreibt bereits den zeitlichen Mittelwert der Energieflussdichte. Das bedeutet, man muss lediglich das Kugelintegral bilden, um die gesamte abgestrahlte Leistung zu berechnen. Einsetzen des Poynting-Vektors in das Kugelintegral ergibt

$$\begin{aligned}P_S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underline{\mathbf{S}} r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(\frac{\Delta s I_0}{4\pi} \right)^2 k^3 \sin^3(\vartheta) d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(\frac{\Delta s I_0}{4\pi} \right)^2 k^3 \int_0^{\pi} \sin^3(\vartheta) d\vartheta \quad (1) \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(\frac{\Delta s I_0}{4\pi} \right)^2 k^3 \int_0^{\pi} \sin^3(\vartheta) d\vartheta \quad (1) \\ &= \frac{1}{4 \cdot 16\pi} \frac{1}{\omega \varepsilon} (\Delta s I_0)^2 k^3 \left[-3 \cos(\vartheta) + \frac{1}{3} \cos(3\vartheta) \right]_0^{\pi} \quad (1) \\ &= \frac{1}{4 \cdot 16\pi} \frac{1}{\omega \varepsilon} (\Delta s I_0)^2 k^3 \left(3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12\pi} \frac{1}{\omega \varepsilon} (\Delta s I_0)^2 k^3 \quad (1)\end{aligned}$$

Gesamt: 4 Punkte

e) Die Energieflussdichte normiert auf die mittlere Leistung pro Kugelflächelement ist

$$\begin{aligned}D(\vartheta, \phi) &= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(\frac{\Delta s I_0}{4\pi} \right)^2 \frac{k^3}{r^2} \sin^2(\vartheta)}{\frac{1}{12\pi} \frac{1}{\omega \varepsilon} (\Delta s I_0)^2 k^3 \frac{1}{4\pi r^2}} \\ &= \frac{3}{2} \sin^2(\vartheta) \quad (1)\end{aligned}$$

Jeweils (1) Punkt für Richtdiagramm

Gesamt: 3 Punkte

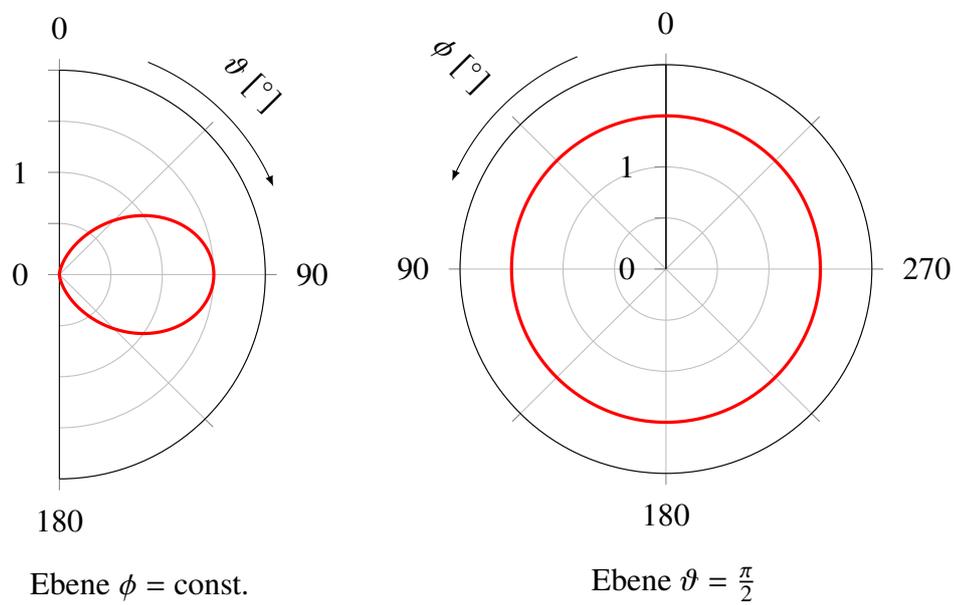


Abbildung 9: Vertikaldiagramm (links) und Horizontaldiagramm (rechts) des Hertzschen Dipols.

Lösung zu Aufgabe 3: Rundhohlleiter (25 Punkte)

- a) Da bei Welle (1) lediglich das magnetische Feld eine longitudinale Komponente aufweist, d.h. es gilt $E_z = 0$ und $H_z \neq 0$, handelt es sich um eine H-Welle bzw. TE-Welle (1).

Gesamt: 1 Punkt

- b) Welle (1):

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_\rho^{m,n} &= -j \frac{k_{z,1}^{m,n}}{(k_{t,1}^{m,n})^2} \left(\frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{k_{z,1}^{m,n}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \varphi} \right) \\
 &= -j \frac{\omega \mu}{(k_{t,1}^{m,n})^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \varphi} \quad (1) \\
 &= -j \frac{\omega \mu}{(k_{t,1}^{m,n})^2} \underline{H}_0^{m,n} J_m(k_{t,1}^{m,n} \rho) \exp\left(j(\omega t - k_{z,1}^{m,n} z)\right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \cos(m\varphi + \psi_1)}{\partial \varphi} \\
 &= j \frac{\omega \mu}{(k_{t,1}^{m,n})^2} \underline{H}_0^{m,n} \frac{J_m(k_{t,1}^{m,n} \rho)}{\rho} m \sin(m\varphi + \psi_1) \exp\left(j(\omega t - k_{z,1}^{m,n} z)\right) \quad (1) \\
 \underline{E}_\varphi^{m,n} &= -j \frac{k_{z,1}^{m,n}}{(k_{t,1}^{m,n})^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{k_{z,1}^{m,n}} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \rho} \right) \\
 &= j \frac{\omega \mu}{(k_{t,1}^{m,n})^2} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \rho} \quad (1) \\
 &= j \frac{\omega \mu}{(k_{t,1}^{m,n})^2} \underline{H}_0^{m,n} \cos(m\varphi + \psi_1) \exp\left(j(\omega t - k_{z,1}^{m,n} z)\right) \frac{\partial J_m(k_{t,1}^{m,n} \rho)}{\partial \rho} \\
 &= j \frac{\omega \mu}{k_{t,1}^{m,n}} \underline{H}_0^{m,n} \cos(m\varphi + \psi_1) J'_m(k_{t,1}^{m,n} \rho) \exp\left(j(\omega t - k_{z,1}^{m,n} z)\right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

- Welle (2):

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_\rho^{m,n} &= -j \frac{k_{z,2}^{m,n}}{(k_{t,2}^{m,n})^2} \left(\frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{k_{z,2}^{m,n}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \varphi} \right) \\
 &= -j \frac{k_{z,2}^{m,n}}{(k_{t,2}^{m,n})^2} \frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \rho} \quad (1) \\
 &= -j \frac{k_{z,2}^{m,n}}{(k_{t,2}^{m,n})^2} \underline{E}_0^{m,n} \cos(m\varphi + \psi_2) \exp\left(j(\omega t - k_{z,2}^{m,n} z)\right) \frac{\partial J_m(k_{t,2}^{m,n} \rho)}{\partial \rho} \\
 &= -j \frac{k_{z,2}^{m,n}}{k_{t,2}^{m,n}} \underline{E}_0^{m,n} J'_m(k_{t,2}^{m,n} \rho) \cos(m\varphi + \psi_2) \exp\left(j(\omega t - k_{z,2}^{m,n} z)\right) \quad (1) \\
 \underline{E}_\varphi^{m,n} &= -j \frac{k_z^{m,n}}{(k_t^{m,n})^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{k_z^{m,n}} \frac{\partial \underline{H}_z^{m,n}}{\partial \rho} \right) \\
 &= -j \frac{k_z^{m,n}}{(k_t^{m,n})^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z^{m,n}}{\partial \varphi} \quad (1) \\
 &= -j \frac{k_z^{m,n}}{(k_t^{m,n})^2} \underline{E}_0^{m,n} J_m(k_{t,2}^{m,n} \rho) \exp\left(j(\omega t - k_{z,2}^{m,n} z)\right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \cos(m\varphi + \psi_2)}{\partial \varphi} \\
 &= j \frac{k_z^{m,n}}{(k_t^{m,n})^2} \underline{E}_0^{m,n} \frac{J_m(k_{t,2}^{m,n} \rho)}{\rho} m \sin(m\varphi + \psi_2) \exp\left(j(\omega t - k_{z,2}^{m,n} z)\right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Gesamt: 8 Punkte

- c) \underline{E}_φ und \underline{E}_z sind die komplexen Amplituden der tangentialen elektrischen Feldkomponenten (1). Da ideale Leiter stets feldfrei sind, muss aufgrund der Grenzflächenbedingungen (siehe Formelsammlung) für diese Tangentialkomponenten gelten, dass

$$\underline{E}_\varphi(\rho = a) = 0 \quad (1) \qquad \underline{E}_z(\rho = a) = 0 \quad (1)$$

Gesamt: 3 Punkte

- d) Welle (1): Es gilt überall $\underline{E}_z = 0$, weshalb lediglich

$$\underline{E}_\varphi^{m,n}(\rho = a) = j \frac{\omega\mu}{k_{t,1}^{m,n}} H_0^{m,n} \cos(m\varphi + \psi_1) J'_m(k_{t,1}^{m,n} a) \exp(j(\omega t - k_{z,1}^{m,n} z)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$J'_m(k_{t,1}^{m,n} a) = 0 \quad (1)$$

erfüllt sein muss. Folglich muss $k_{t,1}^{m,n} a$ Nullstelle der ersten Ableitung der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $J'_{m,n}$ sein. Es gilt also

$$k_{t,1}^{m,n} = \frac{j'_{m,n}}{a} \quad (1)$$

Welle (2): Im Allgemeinen sind \underline{E}_φ und \underline{E}_z von null verschieden. Es müssen also

$$\underline{E}_\varphi^{m,n}(\rho = a) = j \frac{k_z^{m,n}}{(k_t^{m,n})^2} E_0^{m,n} \frac{J_m(k_{t,2}^{m,n} a)}{a} m \sin(m\varphi + \psi_2) \exp(j(\omega t - k_{z,2}^{m,n} z)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$J_m(k_{t,2}^{m,n} a) = 0 \quad (1)$$

$$\underline{E}_z^{m,n}(\rho = a) = E_0^{m,n} \cos(m\varphi + \psi_2) J_m(k_{t,2}^{m,n} a) \exp(j(\omega t - k_{z,2}^{m,n} z)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$J_m(k_{t,2}^{m,n} a) = 0 \quad (1)$$

erfüllt sein muss. Allerdings besitzen die φ - und z -Komponenten offenbar in radialer Richtung die gleichen Nullstellen, weshalb $k_{t,2}^{m,n} a$ Nullstelle der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $J_{m,n}$ sein muss. Es gilt also

$$k_{t,2}^{m,n} = \frac{j_{m,n}}{a} \quad (1)$$

Gesamt: 5 Punkte

- e) Aus den gegebenen Tabellen lesen wir ab, dass die erste Mode der H-Welle (1) die (1,1)-Mode ist, da $j'_{1,1} \approx 1,8412$ die kleinste Nullstelle der ersten Ableitung der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $J'_{m,n}$ darstellt (1). Die erste Mode der E-Welle (2) ist hingegen die (0,1)-Mode ist, da $j_{0,1} \approx 2,4048$ die kleinste Nullstelle der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $J_{m,n}$ ist (1). Da $j'_{1,1} < j_{0,1}$ ist die (1,1)-Mode der H-Welle (1) die Grundmode des Rundhohlleiters (1). Solange $k_t a$ größer gleich $j'_{1,1}$ aber kleiner als $j_{0,1}$ ist, ist ausschließlich diese Grundmode ausbreitungsfähig (1). Allgemein erhalten wir für die Grenzfrequenzen der (m, n) -ten Moden (für ausbreitungsfähige Moden muss $k_z^2 \geq 0$ gelten)

$$(k_c^{m,n})^2 = \frac{(\omega_c^{m,n})^2}{c^2} = (k_t^{m,n})^2 \iff f_c^{m,n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} k_t^{m,n} \quad (1).$$

Infolgedessen bereitet sich für alle Frequenzen f im folgenden Intervall ausschließlich die Grundmode im Rundhohlleiter aus

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{j'_{1,1}}{a} \leq f < \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{j_{0,1}}{a} \quad (1)$$

Gesamt: 6 Punkte

- f) Für H-Wellen wie die Welle (1) erhalten wir nur dann eine nicht-verschwindende radiale elektrische Feldkomponente, wenn die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ von null verschieden ist (1). Dementsprechend kann das elektrische Feld an der Kreisscheibe keine H-Wellen, sondern nur E-Wellen (wie die Welle (2)) anregen (1). Bei den letztgenannten verschwindet für $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ nur die azimuthale Komponente des elektrischen Felds, nicht jedoch die radiale.

Gesamt: 2 Punkte

Auch ohne Begründung gibt es noch 1 Punkt (Wissen könnte noch aus Übung vorhanden sein)

Lösung zu Aufgabe 4: Stufenindexfaser (24 Punkte)

- a) Die Wellenführung in einem dielektrischen Wellenleiter basiert auf dem Phänomen der Totalreflexion (1). Dabei wird Licht, das sich in einem Medium mit dem Brechungsindex n_1 ausbreitet und auf die Grenzfläche zu einem Medium mit Brechungsindex $n_2 < n_1$ trifft, für hinreichend große Winkel gegenüber der Grenzflächennormalen vollständig reflektiert (1).

Gesamt: 2 Punkte

- b) Da alle involvierten Medien nichtleitend sind, können weder Oberflächenströme noch Flächenladungen existieren. Zudem gilt $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_0 n_{1,2}^2$ sowie $\mu = \mu_0$. Es gilt folglich (siehe Grenzflächenbedingungen aus Formelsammlung)

$$\begin{aligned} E_{t,1} &= E_{t,2} & (0,5) & & H_{t,1} &= H_{t,2} & (0,5) \\ n_1^2 E_{n,1} &= n_2^2 E_{n,2} & (0,5) & & H_{n,1} &= H_{n,2} & (0,5) \end{aligned}$$

Infolgedessen sind alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten bis auf die Normalkomponente des elektrischen Felds stetig. Bislang haben wir allerdings die Annahme über die normierte Brechzahldifferenz $\Delta \ll 1$ nicht ausgenutzt. Schreiben wir die Bedingung für die elektrischen Normalkomponenten um, erhalten wir

$$E_{n,1} = \frac{n_2^2}{n_1^2} E_{n,2} \iff E_{n,1} = \frac{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2}{n_1^2} E_{n,2} \iff E_{n,1} = (1 - 2\Delta) E_{n,2} \quad (1)$$

Mit $\Delta \ll 1$ erhalten wir also $E_{n,1} \approx E_{n,2}$ (1).

Auch ausreichende Alternative:

Wegen $\Delta \ll 1$ muss $n_1 \approx n_2$ gelten (1). Mit $\Delta \ll 1$ erhalten wir also $E_{n,1} \approx E_{n,2}$ (1).

Gesamt: 4 Punkte

- c) Im Fall von $\Delta \ll 1$ sprechen wir von schwacher Führung (1). Die Näherungslösungen, die wir unter Annahme der schwachen Führung erhalten, nennen wir linear polarisierte Moden oder kurz LP-Moden (**quasi-TEM Wellen ist dieses Mal auch in Ordnung**) (1).

Gesamt: 2 Punkte

- d) Die skalare Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten lautet

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_x = 0.$$

Da die Wellenzahl k von dem betrachteten Medium abhängig ist, führen wir eine Fallunterscheidung durch (1) (**diesen Punkt gibt es für die korrekte Zuordnung der Wellenzahlen zum Kern/Mantel**). Beachten wir, dass eine ausbreitungsfähige Welle stets $n_2 k_0 < k_z < n_1 k_0$ erfüllen muss, können wir die Differenzialgleichungen für die Funktion $R(\rho)$ ermitteln:

Kern $\rho \leq a$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + n_1^2 k_0^2 \underline{E}_x &= 0 \\ \cos(\ell\varphi + \psi) \exp(-j k_z z) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{\ell^2}{\rho^2} R(\rho) - k_z^2 R(\rho) + n_1^2 k_0^2 R(\rho) \right) &= 0 \quad (2) \\ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left((n_1^2 k_0^2 - k_z^2) \rho^2 - \ell^2 \right) R(\rho) &= 0 \quad (1) \\ \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \underbrace{\left((n_1^2 k_0^2 - k_z^2) \rho^2 - \ell^2 \right)}_{u^2} R(\rho) &= 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Diese Differenzialgleichung entspricht mit $u^2 = n_1^2 k_0^2 - k_z^2$ gerade der Besselschen Differenzialgleichung, was zu zeigen war.

Mantel $\rho > a$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + n_2^2 k_0^2 \underline{E}_x &= 0 \\ \cos(\ell\varphi + \psi) \exp(-j k_z z) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{\ell^2}{\rho^2} R(\rho) - k_z^2 R(\rho) + n_2^2 k_0^2 R(\rho) \right) &= 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left((n_2^2 k_0^2 - k_z^2) \rho^2 - \ell^2 \right) R(\rho) &= 0 \\ \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} - \underbrace{\left((k_z^2 - n_2^2 k_0^2) \rho^2 + \ell^2 \right)}_{w^2} R(\rho) &= 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Diese Differenzialgleichung entspricht mit $w^2 = k_z^2 - n_2^2 k_0^2$ gerade der modifizierten Besselschen Differenzialgleichung, was zu zeigen war.

Da die Rechenschritte im Kern und Mantel quasi identisch sind, wird für die zweite DGL lediglich ein Punkt vergeben.

Gesamt: 6 Punkte

- e) Die Lösungen im Faserkern bzw. im Mantel müssen für alle $\rho \leq a$ bzw. $\rho > a$ physikalisch sinnvoll sein, d.h. sie müssen endliche Energie aufweisen. Folglich stellen im Kern nur die Besselfunktionen erster Gattung, d.h. $J_\ell(u\rho)$, sinnvolle Lösungen dar (1), da die Besselfunktionen zweiter Gattung bei $\rho = 0$ eine Singularität haben (0.5). Im Mantel stellen hingegen nur die modifizierten Besselfunktionen zweiter Gattung, d.h. $K_\ell(w\rho)$ sinnvolle Lösungen dar (1), da die modifizierten Besselfunktionen erster Gattung für große ρ divergieren (0.5).

Gesamt: 3 Punkte

- f) a) Die abgebildete Mode ist konstant entlang der azimuthalen Koordinate konstant und besitzt lediglich ein Extremum in radialer Richtung $(\ell, n) = (0, 1)$ (1).
 b) Die abgebildete Mode weist eine Periode entlang der azimuthalen Achse auf und besitzt lediglich ein Extremum auf der Faserachse $(\ell, n) = (1, 1)$ (1). *Optional:* Für $\varphi = 0$ weist \underline{E}_x ein Extremum auf, es gilt also $\psi = 0$.

- c) Die abgebildete Mode weist eine Periode entlang der azimuthalen Achse auf und besitzt lediglich ein Extremum auf der Faserachse $(\ell, n) = (1,1)$ (1). *Optional:* In $\varphi = 0$ besitzt \underline{E}_x eine Nullstelle, es gilt also $\psi = \frac{\pi}{2}$.
- d) Die abgebildete Mode weist zwei Perioden entlang der azimuthalen Achse auf und besitzt lediglich ein Extremum auf der Faserachse $(\ell, n) = (2,1)$ (1). *Optional:* Für $\varphi = 0$ weist \underline{E}_x ein Extremum auf, es gilt also $\psi = 0$.

Gesamt: 4 Punkte

Sehr gnädige Korrektur: Immer ein halber Punkt pro richtiger Modenzahl

- g) Im Fall von $\lambda_1 = 1550$ nm bzw. $\lambda_2 = 1300$ nm erhalten wir $V \approx 1,701$ (1) bzw. $V \approx 2,028$ (1). Bei $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ sind also ausschließlich die LP₀₁-Mode, d.h. nur eine einzige Mode, ausbreitungsfähig (1).

Gesamt: 3 Punkte