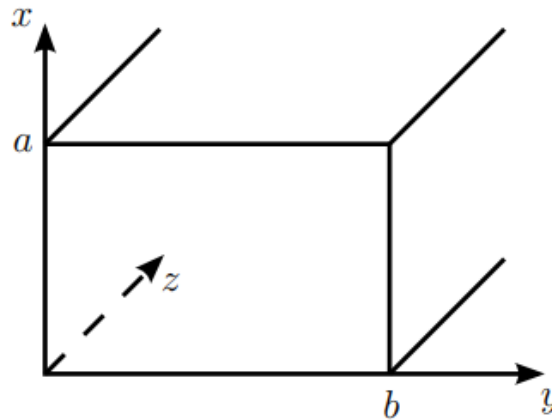


Aufgabe 1 - Hohlleiter

Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt aus unendlich gut leitendem Material. Die Kantenlängen des Querschnitts seien a und b , siehe Abbildung. Im Innern des Hohlleiters befinde sich ein Vakuum und es breite sich eine Welle mit den Wellenzahlen $k_x(m)$ und $k_y(n)$ in positive z -Richtung aus.



Gegeben ist die folgende Grenzflächenbedingung.

$$\underline{E}_z(a, y, z) = 0, \text{ aber } \underline{E}_z(x, y, z) \neq 0 \text{ im Allgemeinen}$$

- a) Handelt es sich bei der sich ausbreitenden Welle um eine H -Welle (TE -Welle) oder um eine E -Welle (TM -Welle)? Ergänzen Sie die Randbedingungen für die Longitudinalkomponente.

Gegeben sei der Ansatz $\underline{E}_z = E_0 P(x) Q(y) e^{j(\omega t - k_z z)}$ für die Longitudinalkomponente mit

$$\frac{1}{P(x)} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} = \text{const.} \quad \frac{1}{Q(y)} \frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} = \text{const.}$$

- b) Bestimmen Sie die Longitudinalkomponente $\underline{E}_z$ der sich ausbreitenden Welle. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
- Begründen Sie in einem Satz, warum der obige Ansatz gerechtfertigt ist.
 - Wählen Sie einen geeigneten Lösungsansatz für die Differentialgleichungen.
 - Nutzen Sie die Randbedingungen aus a) um die Wellenzahlen $k_x(m)$ und $k_y(n)$ zu bestimmen.
 - Geben Sie die vollständige Lösung an.
- c) Wie verändert sich die Lösung aus b), wenn der Hohlleiter in y -Richtung unendlich ausgedehnt ist? Begründen Sie kurz.
- d) Berechnen Sie, ab welcher Frequenz f_c die Fundamentalmode des Hohlleiters ausbreitungsfähig ist. Für die Kantenlängen gelte $b = 3a$.
Hinweis: Für die Wellenzahl in z -Richtung gilt: $k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2}$
- e) Berechnen Sie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Fundamentalmode in Abhängigkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 . Vereinfachen Sie so weit wie möglich. Ist die Phasengeschwindigkeit größer oder kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit?

Lösung Aufgabe 1 - Hohlleiter

- a) Es handelt sich um eine E -Welle (TM -Welle), da die Longitudinalkomponente des elektrischen Feldes nur an der Grenzfläche verschwindet, nicht aber im Allgemeinen bzw. im Innern des Hohlleiters.

$$\begin{aligned} \underline{E}_z(a, y, z) &= 0, & \underline{E}_z(0, y, z) &= 0 \\ \underline{E}_z(x, 0, z) &= 0, & \underline{E}_z(x, b, z) &= 0 \end{aligned}$$

- b) Der Ansatz ist gerechtfertigt, da die Erfüllung der Randbedingungen für eine stehende Welle in x - und y -Richtung vollständig unabhängig voneinander ist.

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(x)} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} &= \text{const.} = -k_x^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 P(x) \\ \frac{1}{Q(y)} \frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} &= \text{const.} = -k_y^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 Q(y) \end{aligned}$$

Gesucht sind somit Funktionen, deren zweite Ableitung ein Vielfaches ihrer selbst sind. Dies ist u.a. für eine Sinusfunktion der Fall.

$$P(x) = A \sin(k_x x) \quad Q(y) = B \sin(k_y y)$$

Damit folgt als Zwischenlösung

$$\underline{E}_z = E_0 A \sin(k_x x) B \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Die Parameter A und B ergeben sich aus den Randbedingungen in a).

$$\begin{aligned} \underline{E}_z(a, y, z) &= E_0 A \sin(k_x a) B \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0 \Leftrightarrow \sin(k_x a) = 0 \Leftrightarrow k_x a = m\pi, m \in \mathbb{N} \\ \underline{E}_z(x, b, z) &= E_0 A \sin(k_x x) B \sin(k_y b) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0 \Leftrightarrow \sin(k_y b) = 0 \Leftrightarrow k_y b = n\pi, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Als vollständige Lösung erhalten wir

$$\underline{E}_z = E_0 A \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

- c) Ist der Hohlleiter in y -Richtung unendlich ausgedehnt, so gilt $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ und die Randbedingungen in y -Richtung entfallen. Die Lösung verändert sich dann zu

$$\underline{E}_z = E_0 A \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

- d) Gesucht ist die Cut-off-Frequenz f_c der Fundamentalmode ($m=1, n=1$). Bei f_c hat die Ausbreitungskonstante eine Nullstelle.

$$\begin{aligned} k_z &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2} = 0 \\ \omega_c^2 \varepsilon \mu &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \omega_c &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]} \Leftrightarrow \\ f_c &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]} \end{aligned}$$

Mit $m=1$, $n=1$ und $b = 3a$ finden wir

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu} \left[\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{9a^2} \right]} \Leftrightarrow \\ f_c &= \sqrt{\frac{1}{4\pi^2\varepsilon\mu} \frac{10\pi^2}{9a^2}} \Leftrightarrow \\ f_c &= \sqrt{\frac{5}{18\varepsilon\mu} \frac{1}{a^2}} \end{aligned}$$

e)

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{10\pi^2}{9a^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{c_0\omega} \sqrt{\omega^2 - \frac{10\pi^2 c_0^2}{9a^2}}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{10\pi^2 c_0^2}{9a^2 \omega^2}}} > c_0$$

Aufgabe 2 - Hertzscher Dipol

Gegeben sei das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols in kartesischen Koordinaten. Die Parameter l und I bezeichnen dabei die Länge des Dipols und die Stromstärke.

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z \mathbf{e}_z$$

$$\underline{A}_z = \frac{\mu l}{4\pi r} I \exp(j\omega(t - r/c))$$

- a) Berechnen Sie das magnetische Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ des Hertzschen Dipols in Kugelkoordinaten.
- b) Berechnen Sie das elektrische Potential ϕ_{el} in Kugelkoordinaten. Nutzen Sie dazu die harmonische Zeitabhängigkeit aus und verwenden Sie die Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2} \frac{d\phi_{\text{el}}}{dt} = 0.$$

- c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}$ des Hertzschen Dipols mit Hilfe der zuvor berechneten Potentiale.

Hinweis: Es gilt:

$$\underline{\mathbf{E}} = - \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla \phi_{\text{el}} \right)$$

Das magnetische Feld sei gegeben mit $H_\varphi = \frac{I}{4\pi} \sin \vartheta \cdot \left(\frac{j\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})}$.

- d) Betrachten Sie nun die Fernfeldnäherung $kr \gg 1$. Geben Sie die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten im Fernfeld an.

Lösung Aufgabe 2 - Hertzscher Dipol

a) In Kugelkoordinaten ist das Vektorpotential für $\underline{A}_x = \underline{A}_y = 0$ gegeben mit

$$\begin{aligned}\underline{A}_r &= \underline{A}_z \cos \vartheta = \frac{\mu l}{4\pi r} I \exp(j\omega(t - r/c)) \cos \vartheta \\ \underline{A}_\vartheta &= -\underline{A}_z \sin \vartheta = -\frac{\mu l}{4\pi r} I \exp(j\omega(t - r/c)) \sin \vartheta \\ \underline{A}_\varphi &= 0\end{aligned}$$

b) Bei harmonischer Zeitabhängigkeit vereinfacht sich die zeitliche Ableitung zu einer Multiplikation mit $j\omega$ und die Lorenz-Eichung führt zu

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} + \frac{j\omega}{c^2} \phi_{el} = 0.$$

Das zeitlich oszillierende elektrische Potential ergibt sich unter Berücksichtigung von a) zu

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \underline{A}_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{A}_\vartheta \sin \vartheta) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\mu l I}{4\pi r} \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \cdot \cos \vartheta \right) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\mu l I}{4\pi r} \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \cdot (\sin \vartheta)^2 \right) \\ &= \frac{\mu l I}{4\pi} \cos \vartheta \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{r j\omega}{c} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot 2 \sin \vartheta \right] \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \\ &= -\frac{\mu l I}{4\pi} \cos \vartheta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{rc} \right) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})}\end{aligned}$$

Für das gesuchte elektrische Potential folgt

$$\begin{aligned}\phi_{el} &= \frac{j}{\omega} c^2 \cdot \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = \frac{j}{\omega} c^2 \cdot \left[-\frac{\mu l I}{4\pi} \cos \vartheta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{rc} \right) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \right] \\ \Rightarrow \phi_{el} &= \frac{\mu l I}{4\pi} \cos \vartheta \cdot \left(\frac{c}{r} - \frac{j c^2}{\omega r^2} \right) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})}\end{aligned}$$

c) Aus dem Hinweis $\underline{\mathbf{E}} = -(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla \phi_{el})$ folgt für die einzelnen Komponenten des $\underline{\mathbf{E}}$ -Felds

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= -\left(\frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) \\ &= \frac{\mu l I}{4\pi r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega(t - \frac{r}{c})}) \sin \vartheta - e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \cdot \left(\frac{c}{r} - \frac{j c^2}{\omega r^2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\cos \vartheta) \right] \\ \Rightarrow \underline{E}_\vartheta &= \frac{\mu l I}{4\pi} \sin \vartheta \cdot \left(\frac{j\omega}{r} + \frac{c}{r^2} - \frac{j c^2}{\omega r^3} \right) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \\ \underline{E}_r &= -\left(\frac{\partial \underline{A}_r}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{\mu l I}{4\pi} \cos \vartheta \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega(t - \frac{r}{c})}) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{c}{r} - \frac{j c^2}{\omega r^2} \right) e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \right) \right] \\ \Rightarrow \underline{E}_r &= \frac{\mu l I}{2\pi} \cos \vartheta \cdot \left(\frac{c}{r^2} - \frac{j c^2}{\omega r^3} \right) \cdot e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \\ \underline{E}_\varphi &= -\left(\frac{\partial \underline{A}_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\ \Rightarrow \underline{E}_\varphi &= 0\end{aligned}$$

- d) Mit der Näherung für das Fernfeld $kr \gg 1$ folgt $\frac{k}{r} \gg \frac{1}{r^2}$. Dadurch bleibt der dominierende Term $1/r$ übrig:

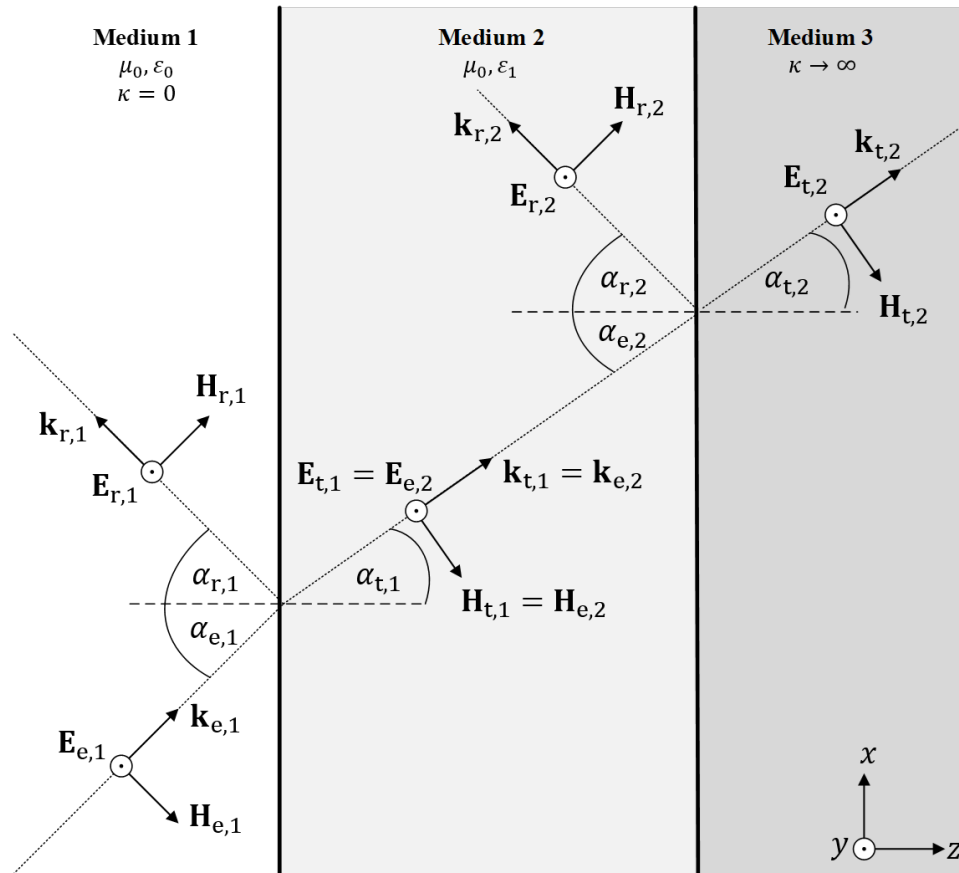
$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &\approx \frac{\mu l I}{4\pi} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{j\omega}{r} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\ \underline{E}_r &\approx 0 \\ \underline{H}_\varphi &\approx \frac{l I}{4\pi} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{j\omega}{rc} \cdot e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}\end{aligned}$$

Aufgabe 3 - Grenzflächenübergänge

Betrachtet werde eine homogene, ebene und harmonische Welle mit der elektrischen Feldstärke

$$\underline{E}_{e,1} = E_{e,1} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_{e,1} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y,$$

die sich im Medium 1 ausbreitet und bei $z = 0$ unter dem Winkel $\alpha_{e,1}$ auf die Grenzfläche zu einem Medium 2 trifft.

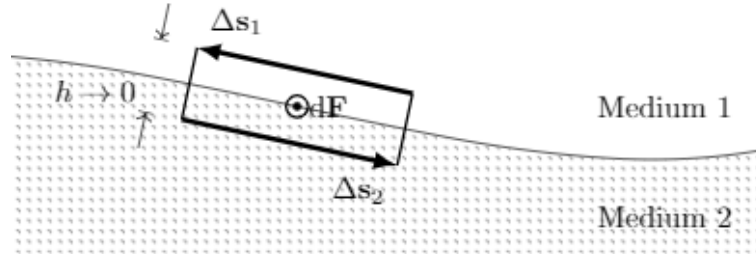


- Leiten Sie aus den allgemeinen Maxwellgleichungen in Integralform die Stetigkeitsbedingung für die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang von einem Medium 1 in ein zweites Medium 2 allgemein her.
- Leiten Sie aus der Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes das Brechungsgesetz her. Die Gleichung muss für alle $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x$ und $t = 0$ gelten.
Hinweis: Es ist sinnvoll zunächst die Wellenvektoren $\mathbf{k}_e$, $\mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_t$ komponentenweise mit Hilfe der Winkel α_e , α_r und α_t darzustellen.
- Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\underline{H}_{e,1}$ in Abhängigkeit von der elektrischen Feldamplitude $E_{e,1}$ unter Verwendung der Maxwellgleichungen.
- Bestimmen Sie das elektrische Feld der reflektierten Welle $\underline{E}_{r,1}$ und das elektrische Feld der transmittierten Welle $\underline{E}_{t,1}$ in Abhängigkeit der Feldamplitude der einfallenden Welle $E_{e,1}$.
Hinweis: Nutzen Sie die Stetigkeitsbedingungen für Felder an Grenzflächen:

$$E_{t,2} - E_{t,1} = 0, \quad H_{t,2} - H_{t,1} = i_F, \quad B_{n,2} - B_{n,1} = 0, \quad D_{n,2} - D_{n,1} = \sigma$$

- Geben Sie das elektrische Feld der reflektierten und transmittierten Welle am Übergang von Medium 2 (Dielektrikum) zu Medium 3 (idealen Leiter, $\kappa \rightarrow \infty$) an. Eine Herleitung ist nicht erforderlich.

Lösung Aufgabe 3 - Grenzflächenübergänge



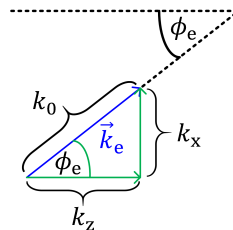
- a) Wegen $h \rightarrow 0$ verschwinden die Verschiebungsstromdichte und der magnetische Fluss in der Maxwellgleichung.

$$\oint_s \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{F} \Leftrightarrow E_{t,1} \Delta \mathbf{s}_1 + E_{t,2} \Delta \mathbf{s}_2 = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} h |\Delta \mathbf{s}_1| \Leftrightarrow$$

$$E_{t,1} \Delta \mathbf{s}_1 + E_{t,2} \Delta \mathbf{s}_2 = 0 \Leftrightarrow E_{t,1} \Delta \mathbf{s}_1 - E_{t,2} \Delta \mathbf{s}_1 = 0 \Leftrightarrow E_{t,1} = E_{t,2}$$

- b) Für die Wellenvektoren ergibt sich unter Ausnutzung geometrischer Beziehungen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{e,1} &= k_{e,1} \sin(\alpha_e) \mathbf{e}_x + k_{e,1} \cos(\alpha_e) \mathbf{e}_z, & \text{mit } k_{e,1} &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \\ \mathbf{k}_{r,1} &= k_{r,1} \sin(\alpha_r) \mathbf{e}_x - k_{r,1} \cos(\alpha_r) \mathbf{e}_z, & \text{mit } k_{r,1} &= k_{e,1} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \\ \mathbf{k}_{t,1} &= k_{t,1} \sin(\alpha_t) \mathbf{e}_x + k_{t,1} \cos(\alpha_t) \mathbf{e}_z, & \text{mit } k_{t,1} &= \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_0} \end{aligned}$$



Das elektrische Feld besitzt lediglich eine Tangentialkomponente. Aus dieser kann unter Ausnutzung des Hinweises $t = 0, \mathbf{r} = x \mathbf{e}_x$ sowie von $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1$ und $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0$ für $i \neq j$ das Brechungsgesetz abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} E_{t,1} &= E_{t,2} \Leftrightarrow \\ \underline{\mathbf{E}}_{e,t,1} + \underline{\mathbf{E}}_{r,t,1} &= \underline{\mathbf{E}}_{t,t,1} \Big|_{z=0} \Leftrightarrow \\ E_{e,1} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_{e,1} \cdot \mathbf{r})} + E_{r,1} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_{r,1} \cdot \mathbf{r})} &= E_{t,1} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_{t,1} \cdot \mathbf{r})} \Big|_{z=0} \Leftrightarrow \\ E_{e,1} e^{-jk_{e,1} \sin(\alpha_e) x} + E_{r,1} e^{-jk_{r,1} \sin(\alpha_r) x} &= E_{t,1} e^{-jk_{t,1} \sin(\alpha_t) x} \Big|_{z=0} \Leftrightarrow \\ E_{e,1} e^{-jk_{e,1} \sin(\alpha_e) x} + E_{r,1} e^{-jk_{r,1} \sin(\alpha_r) x} &= E_{t,1} e^{-jk_{t,1} \sin(\alpha_t) x} \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

Die Gleichung ist nichtlinear in x und muss für alle x , damit auch insbesondere für den trivialen Fall $x = 0$ erfüllt sein. Aus dem trivialen Fall folgt die Stetigkeit der Feldamplituden, $E_{e,1} + E_{r,1} = E_{t,1}$, die in die obige Gleichung eingesetzt wird. Es folgt

$$E_{e,1} e^{-jk_{e,1} \sin(\alpha_e) x} + E_{r,1} e^{-jk_{r,1} \sin(\alpha_r) x} = E_{e,1} e^{-jk_{t,1} \sin(\alpha_t) x} + E_{r,1} e^{-jk_{t,1} \sin(\alpha_t) x} \Big|_{z=0}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & -jk_{e,1} \sin(\alpha_e) x = -jk_{t,1} \sin(\alpha_t) x \\
 (2) \quad & -jk_{r,1} \sin(\alpha_r) x = -jk_{t,1} \sin(\alpha_t) x \Leftrightarrow \\
 (1) \quad & k_{e,1} \sin(\alpha_e) = k_{t,1} \sin(\alpha_t) \\
 (2) \quad & -k_{r,1} \sin(\alpha_r) = -k_{t,1} \sin(\alpha_t) = -k_{e,1} \sin(\alpha_e).
 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist das Snelliussche Brechungsgesetz, wohingegen die zweite Gleichung das Reflexionsgesetz darstellt.

- c) Wir verwenden das Induktionsgesetz mit $\underline{E}_{e,1,x} = \underline{E}_{e,1,z} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ aufgrund der Homogenität der ebenen Welle. Jedoch muss $\frac{\partial}{\partial x} \neq 0$ aufgrund des schrägen Einfalls berücksichtigt werden. Beim harmonischen Ansatz gilt zudem $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \underline{\mathbf{E}}_{e,1} &= -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_{e,1} \Leftrightarrow \\
 -\frac{\partial \underline{E}_{e,1}}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \underline{E}_{e,1}}{\partial x} \mathbf{e}_z &= -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_{e,1} \Leftrightarrow \\
 -\frac{\partial}{\partial z} [E_{e,1} e^{j(\omega t - (k_{e,1} \sin(\alpha_e)x - k_{e,1} \cos(\alpha_e)z))}] \mathbf{e}_x \\
 + \frac{\partial}{\partial x} [E_{e,1} e^{j(\omega t - (k_{e,1} \sin(\alpha_e)x - k_{e,1} \cos(\alpha_e)z))}] \mathbf{e}_z &= -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_{e,1} \Leftrightarrow \\
 jk_{e,1} \cos(\alpha_e) \underline{E}_{e,1} \mathbf{e}_x - jk_{e,1} \sin(\alpha_e) \underline{E}_{e,1} \mathbf{e}_z &= -j\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_{e,1} \Leftrightarrow \\
 \underline{\mathbf{H}}_{e,1} &= -\frac{k_{e,1}}{\omega\mu_0} \cos(\alpha_e) \underline{E}_{e,1} \mathbf{e}_x + \frac{k_{e,1}}{\omega\mu_0} \sin(\alpha_e) \underline{E}_{e,1} \mathbf{e}_z \Leftrightarrow \\
 \underline{\mathbf{H}}_{e,1} &= -\frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) \underline{E}_{e,1} \mathbf{e}_x + \frac{1}{Z_0} \sin(\alpha_e) \underline{E}_{e,1} \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

Alternativ kann das gleiche Ergebnis mit $\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z_0} \mathbf{e}_k \times \underline{\mathbf{E}}$ bestimmt werden.

- d) Mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe c) können wir für das magnetische Feld der reflektierten und transmittierten Welle schlussfolgern:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{H}}_{r,1} &= \frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_r) \underline{E}_{r,1} \mathbf{e}_x + \frac{1}{Z_0} \sin(\alpha_r) \underline{E}_{r,1} \mathbf{e}_z \\
 \underline{\mathbf{H}}_{t,1} &= -\frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t) \underline{E}_{t,1} \mathbf{e}_x + \frac{1}{Z_1} \sin(\alpha_t) \underline{E}_{t,1} \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

Aufgrund der endlichen Leitfähigkeit des Mediums 2 ergeben sich die Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponenten zu

$$E_{t,1} = E_{t,2} \quad H_{t,1} = H_{t,2}.$$

Für das magnetische Feldes entspricht die x -Komponente der Tangentialkomponente. Es ergeben sich für $z = 0, x = 0$ und $t = 0$ und mit $k_{e,1} = k_{r,1}$ und $\alpha_e = \alpha_r$ zwei unabhängige Gleichungen

$$\begin{aligned}
 E_{e,1} + E_{r,1} &= E_{t,1} \\
 -\frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) E_{e,1} + \frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_r) E_{r,1} &= -\frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t) E_{t,1}
 \end{aligned}$$

Die Amplitude des elektrischen Feldes der reflektierten Welle erhält man durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite und Auflösen nach $E_{r,1}$.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) E_{e,1} + \frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_r) E_{r,1} &= -\frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t) E_{e,1} - \frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t) E_{r,1} \Leftrightarrow \\
 E_{r,1} &= \frac{\frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) - \frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t)}{\frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) + \frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t)} E_{e,1} \Leftrightarrow \\
 E_{r,1} &= \frac{Z_1 \cos(\alpha_e) - Z_0 \cos(\alpha_t)}{Z_1 \cos(\alpha_e) + Z_0 \cos(\alpha_t)} E_{e,1} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Die Amplitude des elektrischen Feldes der transmittierten Welle erhält man durch Umformen der ersten Gleichung zu $E_{r,1} = E_{t,1} - E_{e,1}$, Einsetzen in die zweite und Auflösen nach $E_{t,1}$.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) E_{e,1} + \frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) E_{t,1} - \frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) E_{e,1} &= -\frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t) E_{t,1} \Leftrightarrow \\
 E_{t,1} &= \frac{\frac{2}{Z_0} \cos(\alpha_e)}{\frac{1}{Z_0} \cos(\alpha_e) + \frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_t)} E_{e,1} \Leftrightarrow \\
 E_{t,1} &= \frac{2Z_1 \cos(\alpha_e)}{Z_1 \cos(\alpha_e) + Z_0 \cos(\alpha_t)} E_{e,1} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Als Endergebnis ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{E}}_{r,1} &= \frac{Z_1 \cos(\alpha_e) - Z_0 \cos(\alpha_t)}{Z_1 \cos(\alpha_e) + Z_0 \cos(\alpha_t)} E_{e,1} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_{r,1} \mathbf{r})} \mathbf{e}_y, \\
 \underline{\mathbf{E}}_{t,1} &= \frac{2Z_1 \cos(\alpha_e)}{Z_1 \cos(\alpha_e) + Z_0 \cos(\alpha_t)} E_{e,1} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_{t,1} \mathbf{r})} \mathbf{e}_y,
 \end{aligned}$$

mit $\mathbf{k}_{r,1}$ und $\mathbf{k}_{t,1}$ von oben. Anmerkung: Die Verwendung von $x = 0$ ist nicht notwendig, da sich der Exponentialterm auch sonst aufgrund des Brechungsgesetzes herauskürzt.

- e) Das elektrische Feld der reflektierten Welle für die Reflexion am idealen Leiter mit $\kappa \rightarrow \infty$ ist schnell bestimmt, da die Welle vollständig reflektiert wird und eine Phasendrehung von 180 Grad auftritt (Reflexionsfaktor $R = -1$). Folglich existiert kein elektrisches Feld in Medium 3.

$$\begin{aligned}
 |\underline{\mathbf{E}}_{r,2}| &= -|\underline{\mathbf{E}}_{t,1}| = -|\underline{\mathbf{E}}_{e,2}| \\
 \Rightarrow \underline{\mathbf{E}}_{e,2} &= -\frac{2Z_1 \cos(\alpha_e)}{Z_1 \cos(\alpha_e) + Z_0 \cos(\alpha_t)} E_{e,1} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_{r,2} \mathbf{r})} \mathbf{e}_y, \\
 \underline{\mathbf{E}}_{t,2} &= 0
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 - Polarisation und dielektrischer Wellenleiter

Eine homogene, ebene und harmonische Welle breitet sich im Vakuum aus. Gegeben sei das elektrische Feld in x -Richtung.

$$\underline{E}_1 = E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \mathbf{e}_x$$

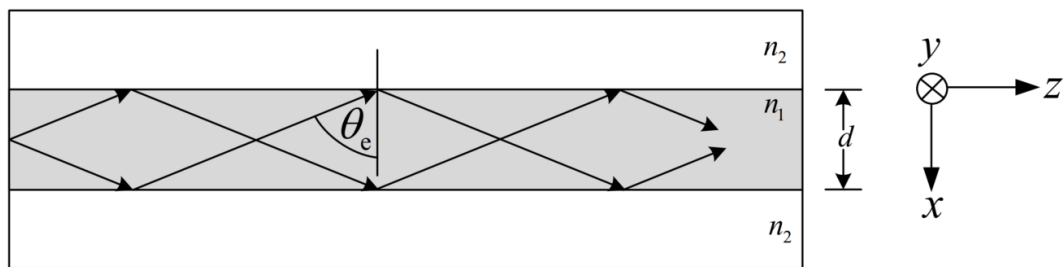
- Mit welchem zweiten elektrischen Feld $\underline{E}_2$ muss $\underline{E}_1$ überlagert werden, damit sich für die Superposition $\underline{E}_{\text{ges}}$ der Jones-Vektor $\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -j)^T$ ergibt? Wie nennt man den zugehörigen Polarisationszustand?
- Berechnen Sie die mittlere Leistungsdichte der superponierten Welle $\underline{E}_{\text{ges}}$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das zugehörige magnetische Feld indem Sie das Vorzeichen des Wellenwiderstandes Z_0 sinnvoll wählen. Nehmen Sie an, dass das magnetische und elektrische Feld in Phase schwingen.

Die Welle treffe nun unter einem Winkel θ_1 auf eine Grenzfläche.

- Weisen Sie rechnerisch nach, dass für einen Winkel von $\theta_1 = \arctan\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right) = 90^\circ - \theta_2$ nur senkrechte Polarisationsanteile reflektiert werden. Wie wird dieser Winkel genannt?
Hinweis: Der Reflexionsfaktor bezogen auf das elektrische Feld sei für die parallele Polarisation gegeben mit

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\theta_1) - \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\theta_2)}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\theta_1) + \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\theta_2)}.$$

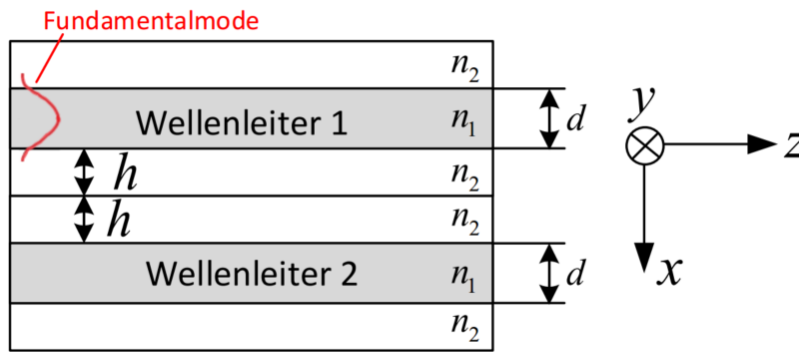
Gegeben sei ein dielektrischer Plattenleiter, siehe untenstehendes Bild.



Damit sich im Wellenleiter ein konstantes, in z -Richtung laufendes Wellenbild ergibt, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$2k_1 d \cos(\theta_e) + 2\varphi_s = m2\pi, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

- Beschreiben Sie in Stichpunkten die verschiedenen Terme in der Gleichung sowie die anschauliche Bedeutung der Bedingung.



- e) Ein Teil der Leistung der im obigen Bild skizzierten Fundamentalmode des Wellenleiters 1 soll in den Wellenleiter 2 gekoppelt werden. Berechnen Sie die maximale Dicke h des Wellenleitermantels in Abhängigkeit der Brechungsindizes n_1 und n_2 , wenn mindestens 50% der Feldamplitude übertragen werden sollen.

Hinweis: Nutzen Sie das Brechungsgesetz $n_1 \sin(\theta_e) = n_2 \sin(\theta_t)$ um die Wellenzahl $k_{2,x}$ im Mantel in Abhängigkeit der Brechungsindizes n_1 und n_2 auszudrücken.

Lösung Aufgabe 4 - Polarisation und dielektrischer Wellenleiter

- a) Damit der Jones-Vektor $\underline{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -j)^T$ für das Gesamtfeld resultiert, muss $\underline{\mathbf{E}}_2$ in y -Richtung schwingen, betragsmäßig mit $\underline{\mathbf{E}}_1$ übereinstimmen und um $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ in der Phase verdreht sein. Es gilt dann

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{ges}} = E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \mathbf{e}_x - j E_0 e^{j(\omega t - k_1 z)} \mathbf{e}_y$$

- b) Die Amplitude des zugehörigen magnetischen Feldes kann über den Wellenwiderstand ermittelt werden. Das magnetische Feld steht senkrecht auf dem elektrischen Feld, wobei die Vorzeichen derart gewählt werden, dass sich mathematisches Rechtssystem ergibt.

$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{ges}} = \frac{E_0}{Z_0} e^{j(\omega t - k_1 z)} \mathbf{e}_y + j \frac{E_0}{Z_0} e^{j(\omega t - k_1 z)} \mathbf{e}_x$$

Die mittlere Leistungsdichte bzw. Energieflussdichte kann als Realteil des komplexen Poynting-Vektors ermittelt werden. Jedoch ist bei der Berechnung des Poynting-Vektors zu beachten, dass das Superpositionsprinzip nur für Felder, nicht aber für Leistungen gilt. Bei der komplexen Konjugation muss das Vorzeichen aller Terme mit j gedreht werden.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}_{\text{ges}} &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}_{\text{ges}} \underline{\mathbf{H}}_{\text{ges}}^* \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} [(e^{j(\omega t - k_1 z)} (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)) \times (e^{-j(\omega t - k_1 z)} (\mathbf{e}_y - j\mathbf{e}_x))] \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} [(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) \times (\mathbf{e}_y - j\mathbf{e}_x)] \\ &= \frac{E_0^2}{2Z_0} [\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y - j\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y - j\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x + j^2 \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x] = \frac{E_0^2}{Z_0} \mathbf{e}_z \\ \Rightarrow |\Re\{\underline{\mathbf{S}}_{\text{ges}}\}| &= \frac{E_0^2}{Z_0} \end{aligned}$$

- c) Die Bedingung für den Winkel θ_1 lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right) \Leftrightarrow \tan(\theta_1) = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right) \Leftrightarrow \frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right) \Leftrightarrow \\ \cos(\theta_1) &= \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) \sin(\theta_1) \Leftrightarrow \cos(\theta_1) = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) \cos(90^\circ - \theta_1) \Leftrightarrow \\ \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\theta_1) &= \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\theta_1) \Leftrightarrow \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\theta_1) - \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\theta_1) = 0 \end{aligned}$$

Der Term auf der linken Seite der hergeleiteten Gleichung entspricht gerade dem Zähler des Reflexionsfaktors für die parallele Polarisation. Folglich ist der Polarisationsfaktor $r_p = 0$ und es wird nur die senkrechte Polarisation reflektiert.

- d) Die Bedeutung der Bedingung wird durch eine leichte Umformung schnell ersichtlich.

$$2k_1 d \cos(\theta_e) + \varphi_s = m2\pi$$

- Es genügt die senkrechten Wegkomponenten zwischen den Grenzflächen zu betrachten.
- Damit sich eine stehende Welle (ein konstantes Wellenbild) ergibt, muss nach dem Hochlaufen in $-x$ - und Herunterlaufen in x -Richtung die ursprüngliche Phase oder ein ganzzahliges Vielfaches dieser vorliegen. Dies erklärt den Term $m2\pi$.

- Die Phasenänderung entlang des Weges kommt zustande durch die Ausbreitung entlang der Strecke $2d$ mit der Wellenzahl $k_x = k \cos(\theta_e)$ sowie die Phasensprünge φ_s bei den beiden Reflexionen.
- e) In x -Richtung klingt das elektrische Feld exponentiell ab (evaneszentes Feld). Der Dämpfungsterm ist durch eine reelle Exponentialfunktion gegeben, welche mit der Wellenfunktion $E_0 e^{j(\omega t - k_z z)}$ multipliziert wird. Damit 50% der Feldamplitude in Wellenleiter 2 eingekoppelt werden kann, muss gelten:

$$e^{-\alpha 2h} = 0,5 \Leftrightarrow h = -\frac{\ln(0,5)}{2\alpha}$$

Die Dämpfungskonstante α entspricht gerade der rein imaginären Wellenzahl in x -Richtung. Unter Ausnutzung des Hinweises ergibt sich

$$\begin{aligned}
 k_{2,x} &= k_2 \cos(\theta_t) = k_2 \sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)} = k_2 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\theta_e)} \quad \text{mit } \theta_t \text{ imaginär} \\
 \Rightarrow k_{2,x}^{(i)} &= k_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\theta_e) - 1} = \frac{2\pi}{\lambda_2 n_2} \sqrt{n_1^2 \sin^2(\theta_e) - n_2^2} \\
 \Rightarrow h &= -\frac{\ln(0,5) \lambda_2 n_2}{4\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2(\theta_e) - n_2^2}}
 \end{aligned}$$