

# Schriftliche Prüfung zur Vorlesung „Elektromagnetische Wellen“

am 04. März 2021, 15:30 - 17:30 Uhr

| Name | Vorname | Matrikelnummer |
|------|---------|----------------|
|      |         |                |

Prüfungsdauer: 120 Minuten

## Hinweise zur Prüfung:

- Zur Prüfung sind folgende Hilfsmittel zugelassen: Schreibgerät, Lineal, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und die ausgeteilte Formelsammlung.
- Prüfen Sie die Anzahl der Aufgabenblätter (21 inkl. Titelblatt) auf Vollständigkeit.
- Tragen Sie Namen, Vornamen und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein. Sollten Sie zusätzliches Papier verwenden, geben Sie auch auf **jedem** zusätzlichen Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
- Verwenden Sie für Zeichnungen **keinen** Bleistift. Die Farben rot und grün sind für die Korrektur vorgesehen und dürfen daher auch nicht verwendet werden.
- Nach jeder Aufgabe ist Platz für die Lösung vorgesehen. Falls Sie zusätzlich Papier benötigen, wenden Sie sich an das Aufsichtspersonal. Die Verwendung von eigenem Schreibpapier ist nicht gestattet.
- Auf den Lösungsblättern ist **klar zu kennzeichnen**, zu welcher Teilaufgabe ein Resultat gehört.
- Anfang und Ende der Bearbeitungszeit werden vom Aufsichtspersonal für alle verbindlich angesagt. Eine Bearbeitung der Klausur während des Austeilens und Einsammelns der Aufgabenblätter ist nicht gestattet.

| Aufgabe        | 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ | Bonus | $\Sigma$ |
|----------------|---|---|---|---|----------|-------|----------|
| Punkte         |   |   |   |   |          | 6     |          |
| davon erreicht |   |   |   |   |          |       |          |

## Aufgabe 1: Hohlleiter

Gegeben ist ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt und den Kantenlängen  $b$  und  $a$ , siehe Abbildung 1. Das Innere des Hohlleiters ist mit Vakuum gefüllt und seine Randflächen bestehen aus einem Material mit unendlich hoher Leitfähigkeit ( $\kappa \rightarrow \infty$ ). Im Inneren des Hohlleiters breitet sich eine Welle mit den transversalen Wellenzahlen  $k_x = \frac{m\pi}{a}$  und  $k_y = \frac{n\pi}{b}$  in  $z$ -Richtung aus.

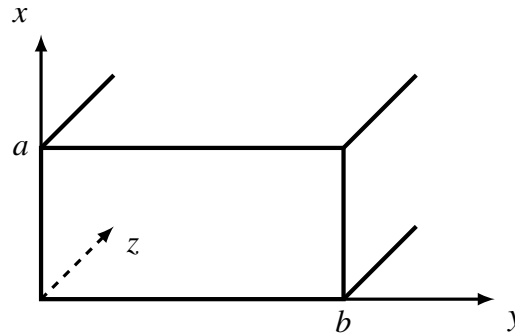


Abbildung 1

- a) Geben Sie *alle* Randbedingungen für die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an den Grenzflächen an. Begründen Sie anschaulich, wie diese Randbedingungen zustande kommen.

Gegeben seien nun die folgenden elektrischen Feldkomponenten.

$$\underline{E}_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{E}_y = 0$$

$$\underline{E}_z = 0$$

- b) Berechnen Sie alle magnetischen Feldkomponenten der Welle mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen. Um welche Mode handelt es sich? Begründen Sie.
- c) Leiten Sie aus der Helmholtz-Gleichung unter Beachtung der Randbedingungen eine allgemeine Darstellung für das elektrische Feld  $\underline{E}_x$  her. Welche Einschränkungen gelten für die Modenzahlen  $m$  und  $n$  in diesem Fall?

*Hinweis:* Gemäß des Produktansatzes von Bernoulli (Separation der Variablen) kann das elektrische Feld geschrieben werden als  $\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_x \mathbf{e}_x = E_0 X(x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_x$ .

- d) Bestimmen Sie die Cut-off-Frequenz und die Grenzwellenlänge für die Mode aus b). Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

*Hinweis 1:* Es gilt  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ .

*Hinweis 2:* Sollten Sie Aufgabe b) nicht gelöst haben, berechnen Sie die Cut-off-Frequenz und Grenzwellenlänge der TE<sub>20</sub>-Mode (H<sub>20</sub>-Mode).

- e) Begründen Sie kurz, warum die in  $z$ -Richtung propagierende Welle für endliches  $\kappa$  gedämpft wird, obwohl der Hohlleiter mit Vakuum gefüllt ist.







## Aufgabe 2: Dielektrische Platte

Gegeben ist eine dielektrische Platte mit  $\mu_2 = \mu_0$  und  $\varepsilon_2 = 12,25\varepsilon_0$ , die von Vakuum umgeben ist ( $\mu_1 = \mu_0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ), siehe Abbildung 2. Längs dieses Wellenleiters, d.h. in  $z$ -Richtung, breitet sich eine elektromagnetische Welle aus.

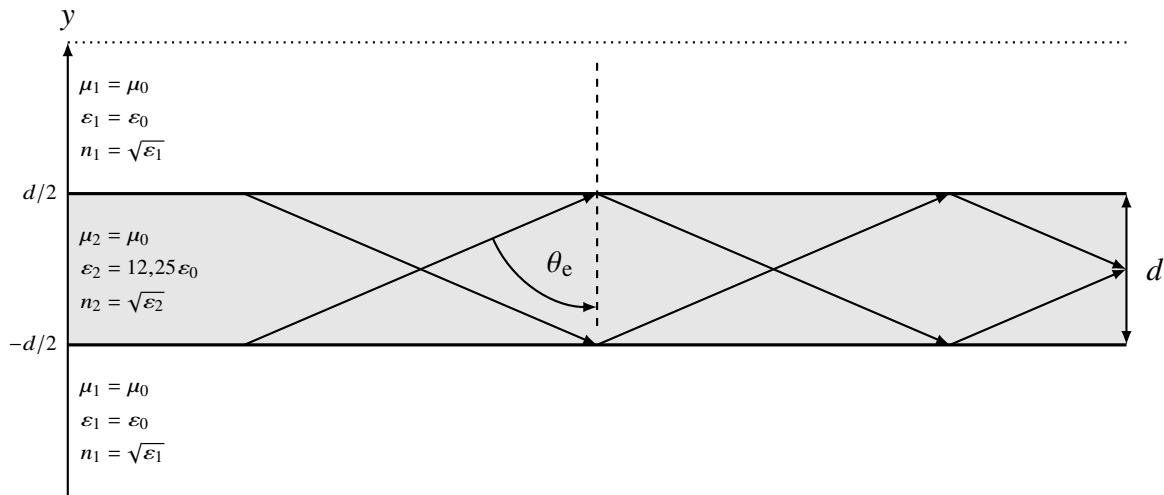


Abbildung 2

- a) Berechnen Sie den kritischen Winkel der Totalreflexion  $\theta_{e,\text{krit}}$ .

*Hinweis:* Gesucht ist ein konkreter Zahlenwert!

- b) Erläutern Sie die Bedingung der Eigenwertgleichung  $2dk_2 \cos(\theta_e) = 2\varphi_{s,p} + m2\pi$ , mit  $m \in \mathbb{N}_0$  für die Wellenführung in Stichpunkten.

- c) Wie viele TE-Moden sind für  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 3$  in der dielektrischen Platte ausbreitungsfähig? Markieren Sie diese in Abbildung 3 und skizzieren Sie die elektrische Feldstärke dieser Moden über dem Querschnitt des Wellenleiters in Abbildung 5 auf Seite 8. Achten Sie dabei auf die korrekte Benennung der Moden in Abbildung 3 und in Abbildung 5.

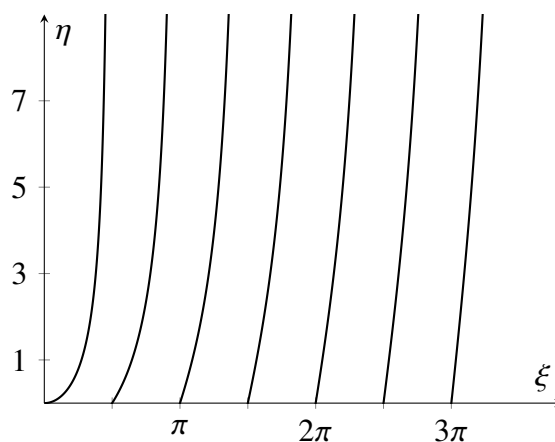


Abbildung 3

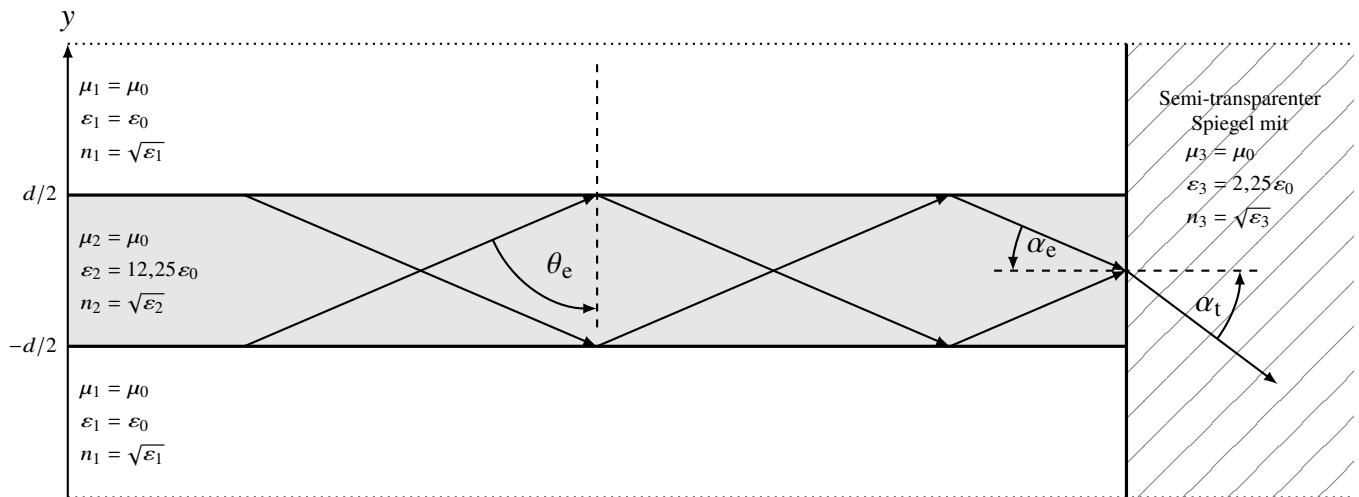


Abbildung 4

Im Folgenden wird die dielektrische Platte auf der rechten Seite durch einen semi-transparenten Spiegel mit  $\mu_3 = \mu_0$  und  $\varepsilon_3 = 2,25\varepsilon_0$  begrenzt, siehe Abbildung 4.

- d) Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Auskopplungswinkel  $\alpha_t$  für ein konstantes, sich in  $z$ -Richtung ausbreitendes Feldmuster.

*Hinweis:* Gesucht ist ein allgemeiner Ausdruck, keine Zahlenwerte.

- e) Berechnen Sie den Transmissionsgrad am semi-transparenten Spiegel für  $\theta_e = 65^\circ$ . Nehmen Sie an, dass für diesen Winkel  $\theta_e$  eine TE-Mode angeregt wird.

*Hinweis:* Die Formel für den Reflexionsfaktor ist gegeben mit

$$r_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_e) - n_3 \cos(\alpha_t)}{n_2 \cos(\alpha_e) + n_3 \cos(\alpha_t)}$$

- f) In welchem Abstand  $L$  links von dem semi-transparenten Spiegel müsste ein zweiter, vollständig reflektierender Spiegel im Wellenleiter platziert werden, damit sich für gegebenes  $k$  auch in  $z$ -Richtung eine stehende Welle ausbildet? Geben Sie den Abstand in Abhängigkeit des Winkels  $\alpha_e$  an. Vernachlässigen Sie etwaige Phasensprünge bei der Reflexion an den Spiegeln. Wie groß müsste die Dämpfung / Verstärkung  $\alpha = \Im\{k_z\}$  des Materials sein, damit sich trotz Auskopplung eine stehende Welle konstanter Amplitude ausbildet?

*Hinweis:*  $\Im$  bezeichnet den Imaginärteil.

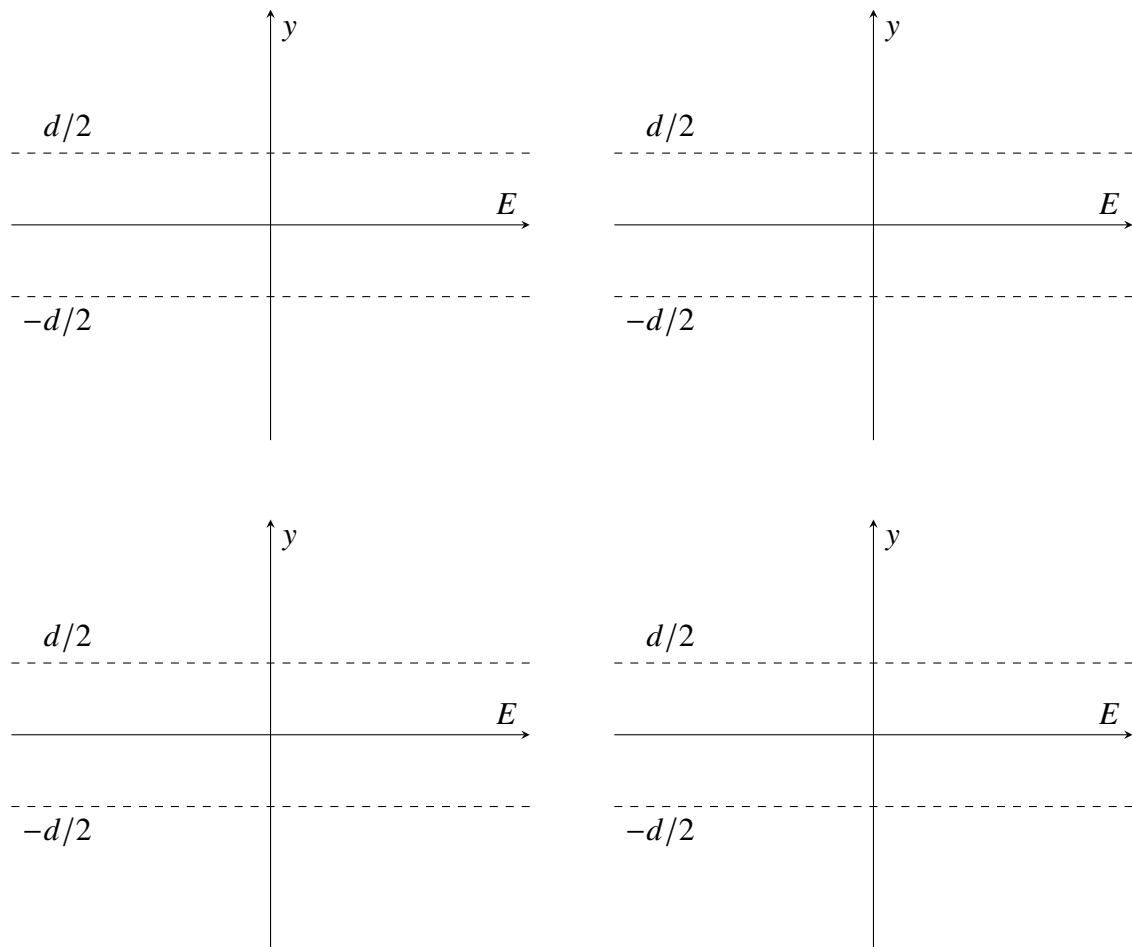


Abbildung 5







### Aufgabe 3: Grenzflächen

Betrachtet werde eine homogene, ebene und harmonische Welle mit der magnetischen Feldstärke

$$\underline{\mathbf{H}}_e = \underline{\mathbf{H}}_{e,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{r})} = -\underline{H}_0 e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y,$$

die sich im Medium 1 ausbreitet und bei  $z = 0$  unter einem Winkel  $\alpha_e$  auf die Grenzfläche zu einem Medium 2 trifft. Die Situation ist in Abbildung 6 dargestellt, wobei  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  und  $\kappa_1 = 0$  gelte.

- Geben Sie zunächst die Einfallsebene an. Welche Polarisation weist die elektromagnetische Welle auf? Begründen Sie.
- Geben Sie die Komponenten der Wellenvektoren  $\underline{\mathbf{k}}_e$ ,  $\underline{\mathbf{k}}_r$  und  $\underline{\mathbf{k}}_t$  in Abhängigkeit der Winkel  $\alpha_e$  und  $\alpha_t$  an. Ermitteln Sie weiterhin die Komponenten des einfallenden elektrischen Felds  $\underline{\mathbf{E}}_e$ . Geben Sie die Lösungen in Abhängigkeit von  $\underline{H}_0$  an.

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren an der Grenzfläche in  $z = 0$  lauten für senkrechte bzw. parallele Polarisation

$$r_s = \frac{\underline{Z}_2 \cos \alpha_1 - \underline{Z}_1 \cos \alpha_2}{\underline{Z}_2 \cos \alpha_1 + \underline{Z}_1 \cos \alpha_2}$$

$$t_s = 1 + r_s$$

$$r_p = \frac{\underline{Z}_1 \cos \alpha_1 - \underline{Z}_2 \cos \alpha_2}{\underline{Z}_1 \cos \alpha_1 + \underline{Z}_2 \cos \alpha_2}$$

$$t_p = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} (1 + r_p).$$

Die Leitfähigkeit betrage zunächst  $\kappa_2 = 0$ .

- Geben Sie die reflektierten und transmittierten Anteile des elektrischen Felds  $\underline{\mathbf{E}}_r$  und  $\underline{\mathbf{E}}_t$  an. Zeichnen Sie anschließend die entsprechenden Feldvektoren in Abbildung 6 ein.

*Hinweis:* Berücksichtigen Sie in Ihrer Zeichnung mögliche Phasensprünge und führen Sie bei Bedarf eine Fallunterscheidung durch.

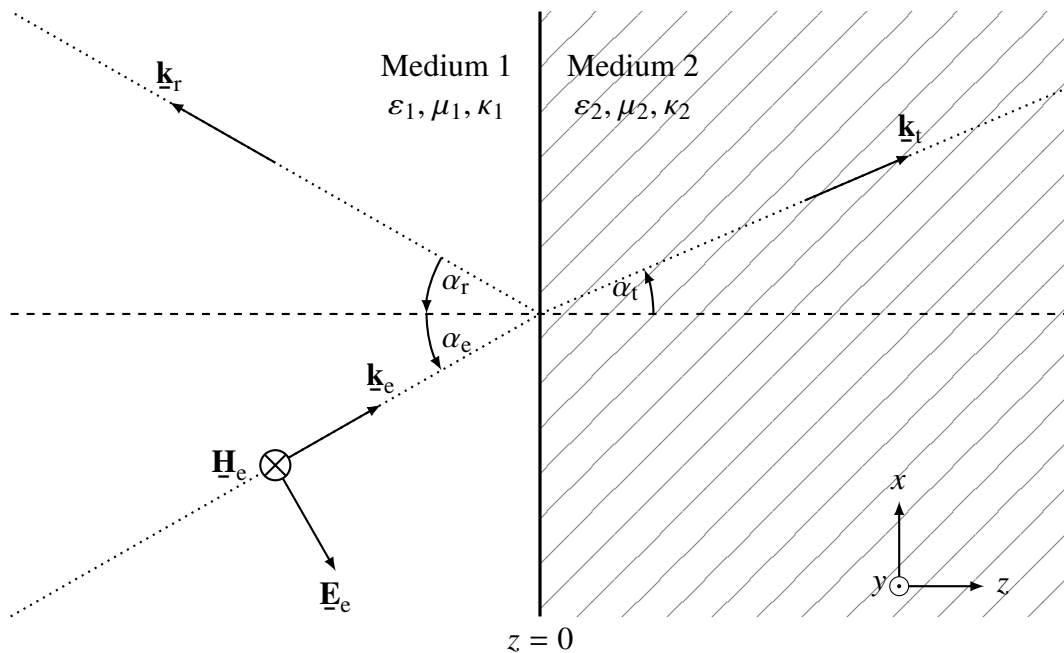


Abbildung 6

- d) Es gelte nun  $\kappa_2 > 0$ . Wie ändert sich der Wellenvektor  $\mathbf{k}_t$ ? Weisen Sie rechnerisch nach, dass die endliche Leitfähigkeit zu einer Dämpfung der transmittierten Welle führt.

*Hinweis:*

$$\sin\left(\frac{1}{2} \arctan x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$
$$\cos\left(\frac{1}{2} \arctan x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

- e) Es gelte nun  $\kappa_2 \rightarrow \infty$ . Ermitteln Sie das elektrische Feld im *gesamten* Raum.

*Hinweis:* Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin(x) = \frac{1}{2j} \left( e^{jx} - e^{-jx} \right)$$
$$\cos(x) = \frac{1}{2} \left( e^{jx} + e^{-jx} \right).$$







## Aufgabe 4: Hertzscher Dipol

Zunächst werde ein Hertzscher Dipol der Länge  $\delta$  im Vakuum betrachtet, welcher das Magnetfeld

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{H}_\phi \mathbf{e}_\phi = \frac{\delta I}{4\pi} \sin \vartheta \left( \frac{j k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\phi$$

hervorrufen.

- Ermitteln Sie das resultierende elektrische Feld mithilfe der Maxwell-Gleichungen.
- Unterteilen Sie das magnetische und elektrische Feld in Nah- und Fernfeld. Berechnen Sie anschließend den komplexen Poynting-Vektor im Nahfeld und weisen Sie auf diese Weise nach, dass im Nahfeld primär Blindleistung umgesetzt wird.

Im Folgenden soll das Fernfeld zweier linearer Antennen infinitesimaler Dicke der Länge  $2h = \frac{\lambda}{2}$  betrachtet werden (vgl. Abbildung 7 auf Seite 18). Dabei werden gegenseitige Beeinflussungen der Antennen vernachlässigt. Wir nehmen an, dass die Stromverteilung auf beiden Antennen identisch und durch

$$I(z, t) = I_0 \sin(k(h - |z|)) e^{j\omega t}$$

gegeben ist. Der Mittelpunkt der Antenne 1 befinde sich im Punkt  $(0, -d, 0)^T$  mit Abstand  $r_1$  zum Beobachtungspunkt  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ , der Mittelpunkt der Antenne 2 in  $(0, d, 0)^T$  mit Abstand  $r_2$  zu  $\mathbf{r}$ .

- Wie groß muss der Abstand der Antennen vom Koordinatenursprung  $d$  sein, damit das resultierende Fernfeld aufgrund destruktiver Interferenz verschwindet? Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Ermitteln Sie zunächst die elektrischen Fernfelder der einzelnen Antennen. Nehmen Sie an, dass sich die beobachteten elektrischen Felder aus der Superposition der Felder Hertzscher Dipole ergeben, welche entlang der  $z$ -Achse angeordnet sind. Wählen Sie dementsprechend den folgenden Ansatz

$$\underline{E}_{\vartheta, i} = \int_{-h}^h I(z, t) \frac{e^{-jkr'_i}}{r'_i} \sin \vartheta \, dz, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}$$

wobei der Index  $i$  die erste bzw. zweite Antenne kennzeichnet.

*Hinweis:* Im Fernfeld gilt  $r \gg h$  und  $r \gg d$ . Entsprechend können Sie für alle  $z \in [-h, h]$  und  $y \in [-d, d]$  die folgenden Näherungen verwenden

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &\approx \text{const}, \\ \frac{1}{r} &\approx \frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{r'_i}, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}, \\ r'_i &\approx r_i - z \cos \vartheta, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\int_0^h \sin(k(h-z)) \cos(kz \cos \vartheta) \, dz = \frac{\cos(kh \cos \vartheta) - \cos(kh)}{k \sin^2 \vartheta}.$$

- Bestimmen Sie das resultierende Fernfeld durch Superposition der Einzelfelder.
- Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Gangunterschied der superponierten Wellen und dem Abstand der Antennen vom Koordinatenursprung  $d$  her. Wie muss  $d$  gewählt werden, um die Auslöschung zu erreichen?

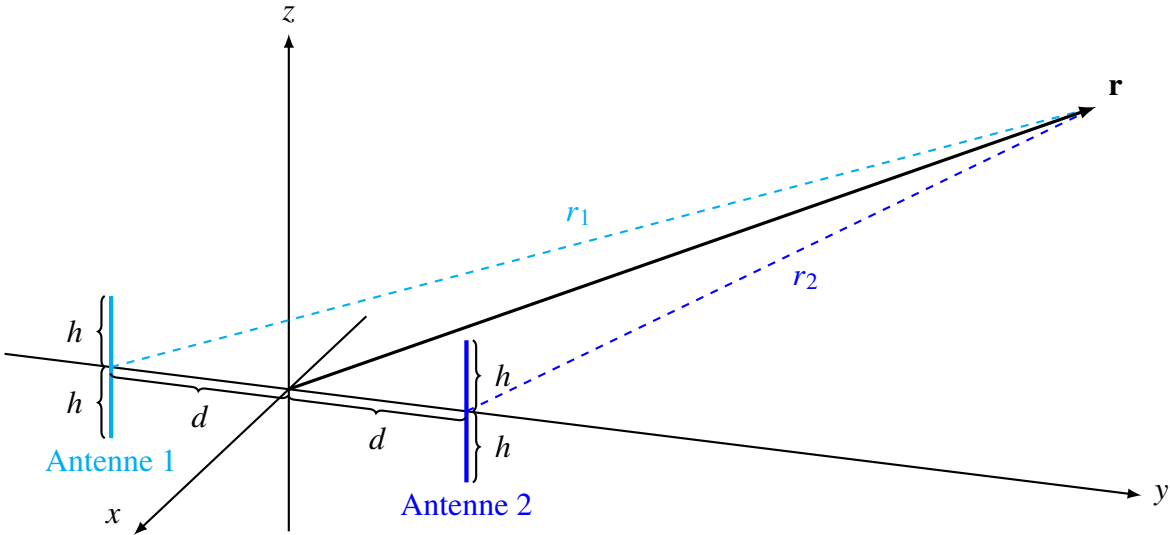


Abbildung 7







# EMW Klausur

2. Juli 2021

## Lösung zu Aufgabe 1:

- a) An einem Grenzflächenübergang müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke stetig sein. Da die elektrischen Feldkomponenten auf den Randflächen aufgrund der unendlich hohen Leitfähigkeit ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) verschwinden, gilt somit

$$\begin{aligned} \underline{E}_x(x, 0, z, t) &= 0 & \underline{E}_x(x, b, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_y(0, y, z, t) &= 0 & \underline{E}_y(a, y, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_z(0, y, z, t) &= 0 & \underline{E}_z(a, y, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_z(x, 0, z, t) &= 0 & \underline{E}_z(x, b, z, t) &= 0. \end{aligned}$$

- b) Wegen  $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$  und der Tatsache, dass im Intervall  $y \in [0, \pi]$  keine weitere Nullstelle der Sinusfunktion existiert, weist das elektrische Feld  $\underline{E}_x$  im Innern des Hohlleiters nur eine Extremstelle entlang der  $y$ -Richtung auf. Daraus folgt  $n = 1$ . Aus der verschwindenden Feldkomponente  $\underline{E}_y$  folgt weiterhin  $m = 0$ . Unter Berücksichtigung von  $\underline{E}_z = 0$  handelt es sich daher um die  $\text{TE}_{01}$ - oder  $\text{H}_{01}$ -Mode. Für TE-Moden gilt  $m, n \in \mathbb{N}_0$  mit der Einschränkung, dass  $m = n = 0$  nicht erlaubt ist.

Die magnetischen Felder können aus dem Induktionsgesetz unter Berücksichtigung der harmonischen Anregung bestimmt werden. Mit  $\underline{E}_y = \underline{E}_z = 0$  vereinfacht sich der Rotationsoperator.

$$\begin{aligned} \nabla \underline{E} &= -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = -j \omega \mu \underline{H} \Leftrightarrow \\ \underline{H} &= \frac{j}{\omega \mu} \left[ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} \underline{e}_y - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \underline{e}_z \right] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &= 0 \\ \underline{H}_y &= \frac{j}{\omega \mu} (-j k_z) \underline{E}_x = \frac{k_z}{\omega \mu} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\ \underline{H}_z &= -\frac{j}{\omega \mu} E_0 \frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi}{b} y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}. \end{aligned}$$

- c) Die Helmholtzgleichung für die Feldkomponente  $\underline{E}_x$  ist gegeben mit

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_x = 0.$$

Einsetzen des Produktansatzes und zweifaches Ableiten nach  $z$  führen auf

$$\begin{aligned} E_0 \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + E_0 X(x) e^{j(\omega t - k_z z)} \frac{\partial^2 \sin(k_y y)}{\partial y^2} + \\ (k^2 - k_z^2) E_0 X(x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} = 0. \end{aligned}$$

Durch zweifaches Ableiten nach  $y$  und Division durch den Produktansatz ergibt sich

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + (k^2 - k_z^2 - k_y^2) = 0.$$

Mit der Definition des Wellenvektors ( $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ) lässt sich die Gleichung vereinfachen zu

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 X(x),$$

was eine gewöhnliche Differentialgleichung darstellt. Gesucht ist also eine Funktion  $X(x)$  deren zweifache Ableitung nach  $x$  ein Vielfaches der Funktion selbst ist. Gleichzeitig muss die Funktion  $X(x)$  auf eine Gleichung für  $\underline{E}_x$  führen, welche die Randbedingungen aus a) erfüllt. Aufgrund der sich auf den Randflächen ausbildenden Flächenladungsdichten darf an den Orten  $(0, y, z, t)$  und  $a, y, z, t$  nur die Tangentialkomponente  $\underline{E}_y$ , nicht aber die Normalkomponente  $\underline{E}_x$  verschwinden. Daher kommt als Lösung nur eine Kosinusfunktion in Frage, d.h.

$$\underline{E}_x = E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)},$$

Für die Modenzahlen gilt bei der TE-Welle  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , wobei der Fall  $m = n = 0$  nicht erlaubt ist.

- d) Die Cut-off-Frequenz ist die Frequenz, ab welcher die  $TE_{01}$ -Mode ( $m = 0, n = 1$ ) ausbreitungsfähig und somit die Ausbreitungskonstante  $k_z$  reell wird. Sie kann somit durch Nullsetzen von  $k_z$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned} k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} &\stackrel{!}{=} 0 \iff \\ k_c^2 - k_x^2 - k_y^2 &= 0 \iff \\ \omega_c^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 &= 0 \iff \\ \omega_c^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 &= 0 \iff \\ \omega_c &= \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{\pi}{b} \iff \\ f_c &= \frac{1}{2b\sqrt{\mu \epsilon}} \end{aligned}$$

Für die Grenzwellenlänge ergibt sich mit  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$  daher  $\lambda_c = \frac{c}{f_c} = 2b$ .

- e) Obwohl der Hohlleiter mit Vakuum gefüllt ist, indem sich eine Welle ungedämpft ausbreiten kann, kommt es zu einer Dämpfung entlang der Ausbreitungsrichtung. Dies ist auf die ohmschen Verluste zurückzuführen, welche aufgrund der Oberflächenströme im leitfähigen Rand des Hohlleiters auftreten. Dies mag im ersten Moment unintuitiv erscheinen, da die Leitfähigkeit des Materials unendlich groß ist ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), jedoch hängt mit  $P = UI = RI^2$  die dissipierte ohmsche Leistung nur linear von der Leitfähigkeit, aber quadratisch von der Stromdichte ab.

## Lösung zu Aufgabe 2:

- a) Der kritische Winkel der Totalreflexion ist erreicht, wenn kein reeller Winkel  $\theta_t$  mehr das Brechungsgesetz erfüllen kann. Er ergibt sich mit

$$\theta_{e,\text{kritisch}} = \arcsin\left(\frac{k_t}{k_e}\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) \approx 16,6^\circ$$

- b) Es genügt die senkrechten Wegkomponenten zwischen den Grenzflächen zu betrachten.

- Damit sich ein konstantes Wellenbild ergibt, muss sich die Welle nach zweimaliger Reflexion reproduzieren, d.h. die Phase darf sich lediglich um ein ganzzahliges Vielfaches  $m$  von  $2\pi$  unterscheiden. Die Eigenwertgleichung wird daher auch als Selbstkonsistenzbedingung bezeichnet.
  - $\varphi_{s,p}$  beschreibt die Phasensprünge bei der Reflexion an der Grenzfläche des Wellenleiters für die senkrechte oder parallele Polarisierung.
  - Der Term  $2dk_2 \cos(\theta_e) = 2dk_{2,y}$  beschreibt die auf der Wegkomponente senkrecht zur Grenzfläche mit der Länge  $d$  akkumulierte Phase, wobei der Faktor 2 dadurch bedingt ist, dass die Wegkomponente einmal in positive und einmal in negative Richtung zurückgelegt wird.
- c) Die Variable  $\gamma$  beschreibt den Radius des Viertelkreises, der für eine TE-Mode die rechte Seite der Eigenwertgleichung darstellt. Die ausbreitungsfähigen ergeben sich als Schnittpunkte des Viertelkreises mit den Tangens- und Kotangens-Halmen, welche die linke Seite der Eigenwertgleichung repräsentieren. Für den Fall  $\gamma = 3$  sind zwei Moden ausbreitungsfähig, siehe Abbildung 1. Abbildung 2 zeigt die elektrische Feldstärke dieser Moden über dem Querschnitt des Wellenleiters.

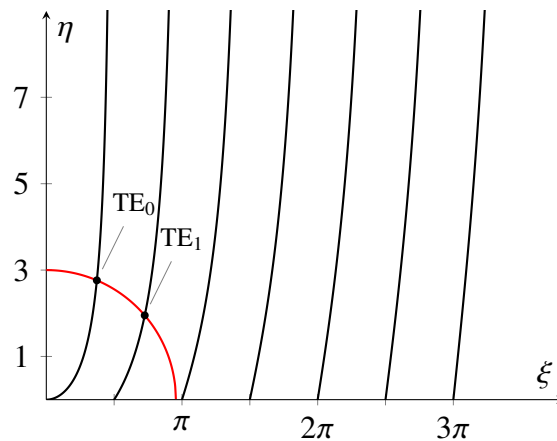


Abbildung 1

- d) Der Auskopplungswinkel  $\alpha_t$  wird dann besonders klein, wenn der Winkel  $\alpha_e$  minimal wird. Aus geometrischen Überlegungen ergibt sich  $\alpha_e = 90^\circ - \theta_e$ , sodass  $\theta_e$  maximal werden muss. Gleichzeitig muss jedoch eine ausbreitungsfähige Mode vorliegen. Der Winkel  $\theta_e$  lässt sich daher aus der Eigenwertgleichung mit  $m = 0$  bestimmen (niedrigste ausbreitungsfähige Mode = größter Winkel), die Bedingung für Totalreflexion ist dann automatisch erfüllt.

$$\tilde{\theta}_e = \arccos\left(\frac{\varphi_{s,p}}{dk_2}\right)$$

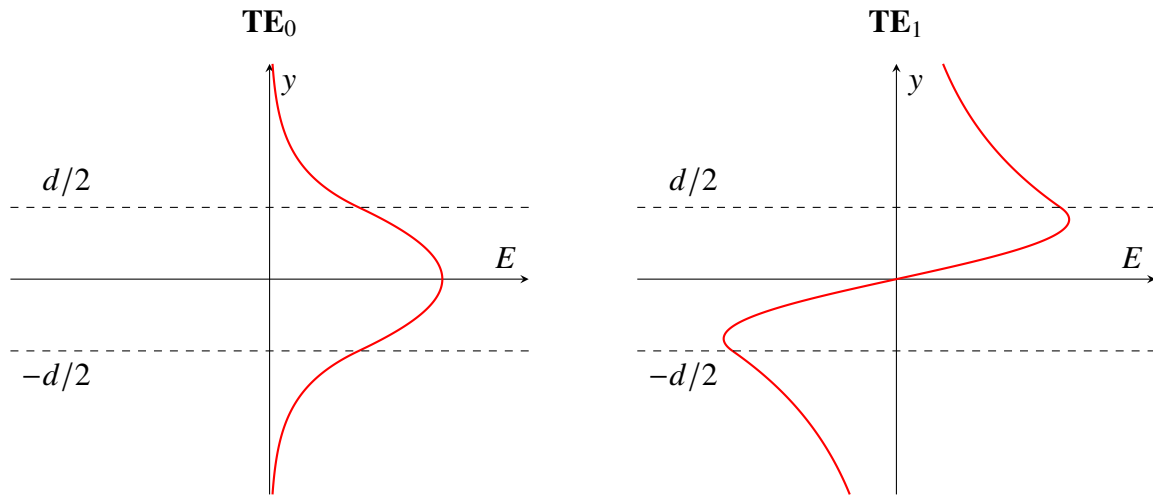


Abbildung 2

Aus dem Brechungsgesetz  $k_2 \sin(\alpha_e) = k_3 \sin(\alpha_t)$  folgt dann für den Auskopplungswinkel

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \arcsin\left(\sin(\alpha_e) \frac{k_2}{k_3}\right) = \arcsin\left(\sin(90^\circ - \tilde{\theta}_e) \frac{n_2}{n_3}\right) \\ &= \arcsin\left(\cos(\tilde{\theta}_e) \frac{n_2}{n_3}\right) = \arcsin\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{\varphi_{s,p}}{dk_2}\right)\right) \frac{n_2}{n_3}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{\varphi_{s,p} n_2}{dk_2 n_3}\right) = \arcsin\left(\frac{\varphi_{s,p}}{dk_0 n_3}\right)\end{aligned}$$

- e) Aus  $\theta_e = 65^\circ$  folgt  $\alpha_e = 90^\circ - \theta_e = 25^\circ$ . Die Formel für den Auskopplungswinkel ist bereits bekannt und liefert

$$\alpha_t = \arcsin\left(\sin(\alpha_e) \frac{n_2}{n_3}\right) = \arcsin\left(\sin(\alpha_e) \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_3}}\right) \approx 80,44^\circ.$$

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung folgt durch Einsetzen von  $n_2, n_3, \alpha_e$  und  $\alpha_t$ , dass  $r_p \approx 0,854$ . Daraus ergibt sich für den Reflexionsgrad  $R_p = |r_p|^2 \approx 0,729 \approx 73\%$  und für den Transmissionsgrad  $T_p = 1 - R_p \approx 27\%$ .

- f) Wir nehmen an, dass es bei der Reflexion nicht zu Phasensprüngen kommt und sich der Term  $\varphi_{s,p}$  vernachlässigen lässt. Ansonsten ergibt sich die Bedingung für die stehende Welle erneut dadurch, dass sich die Welle nach zwei Reflexionen reproduzieren muss, d.h., dass ihre Phase sich lediglich durch ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden darf.

$$\begin{aligned}2Lk_{2,z} &= m2\pi, \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \\ \iff L &= \frac{m2\pi}{2k_{2,z}} = \frac{m\pi}{k_{2,z}} = \frac{m\pi}{k_0 n_2 \cos(\alpha_e)}\end{aligned}$$

Mit der Definition der Wellenzahl  $\underline{k}_z = \Re(\underline{k}_z) - j\Im(\underline{k}_z) = \Re(\underline{k}_z) - j\alpha$  ergibt sich ein zusätzlicher Exponentialterm mit reellem Exponenten  $e^{-\alpha z}$ , welcher die Verstärkung / Dämpfung beschreibt. Mit  $z = 2L$  folgt

$$e^{-\alpha 2L} = \frac{1}{\sqrt{R_p}} \iff \alpha = -\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{R_p}}\right)}{2L} \iff \alpha = \frac{\ln(r_p)}{2L},$$

wobei  $\frac{1}{\sqrt{R_p}}$  der Verstärkungsfaktor bezogen auf das elektrische Feld ist.

**Lösung zu Aufgabe 3:**

Betrachtet werde eine homogene, ebene und harmonische Welle mit der magnetischen Feldstärke

$$\underline{\mathbf{H}}_e = \underline{\mathbf{H}}_{e,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{r})} = -\underline{H}_0 e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_y,$$

die sich im Medium 1 ausbreitet und bei  $z = 0$  unter einem Winkel  $\alpha_e$  auf die Grenzfläche zu einem Medium 2 trifft. Die Situation ist in Abbildung 3 dargestellt.

*Hinweis:* Es gelte  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  und  $\kappa_1 = 0$ .

- Die Einfallsebene ist die  $xz$ -Ebene. Entsprechend liegt das elektrische Feld in der Einfallsebene und die elektromagnetische Welle ist parallel polarisiert.
- Für die Wellenvektoren  $\underline{\mathbf{k}}_e$ ,  $\underline{\mathbf{k}}_r$  und  $\underline{\mathbf{k}}_t$  gilt aufgrund des Reflexionsgesetzes  $\alpha_e = \alpha_r$  und folglich

$$\underline{\mathbf{k}}_e = \underline{k}_1 (\sin \alpha_e \mathbf{e}_x + \cos \alpha_e \mathbf{e}_z) = \underline{k}_1 \mathbf{e}_e$$

$$\underline{\mathbf{k}}_r = \underline{k}_1 (\sin \alpha_e \mathbf{e}_x - \cos \alpha_e \mathbf{e}_z) = \underline{k}_1 \mathbf{e}_r$$

$$\underline{\mathbf{k}}_t = \underline{k}_2 (\sin \alpha_t \mathbf{e}_x + \cos \alpha_t \mathbf{e}_z) = \underline{k}_2 \mathbf{e}_t$$

Da  $\kappa_1 = 0$  gilt, treten keine freien Ströme im Medium 1 auf und  $\underline{k}_1 = k_1$ . Das Durchflutungsgesetz für harmonische Felder vereinfacht sich damit zu

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\mathbf{E}} = \frac{-j}{\omega \varepsilon} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}.$$

Da das Magnetfeld nur eine  $y$ -Komponente aufweist, welche von  $x$  und  $z$  abhängt, erhalten wir für die Rotation

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_e &= \frac{j}{\omega \varepsilon_1} \underline{H}_0 \begin{pmatrix} -(-j k_1 \cos \alpha_e) \\ 0 \\ -j k_1 \sin \alpha_e \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_1 (\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} \\ &= \underbrace{\frac{k_1}{\omega \varepsilon_1}}_{=: Z_1} \underline{H}_0 \begin{pmatrix} -\cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_1 (\sin(\alpha_e)x + \cos(\alpha_e)z))} \end{aligned}$$

- Nun sei zunächst auch  $\kappa_2 = 0$ . Da die elektromagnetische Welle parallel polarisiert ist, erhalten wir

$$r = r_p = \frac{Z_1 \cos \alpha_1 - Z_2 \cos \alpha_2}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2} \quad t = t_p = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}.$$

Wegen  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  sind die Wellenwiderstände  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  rein reell und wir schreiben

$$r = r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \alpha_e - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_t}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \alpha_e + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_t} \quad t = t_p = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_e}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \alpha_e + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_t}.$$

Dabei fällt auf, dass  $r_p$  positive und negative Werte annehmen kann. Für den Fall, dass  $r_p \geq 0$  erfährt das magnetische Feld bei der Reflexion einen Phasensprung um  $180^\circ$ . Im verbleibenden Fall  $r_p < 0$  unterliegt das elektrische Feld dem Vorzeichenwechsel. Entsprechend sind zwei Ausrichtungen des elektrischen und magnetischen Felds nach der Reflexion möglich (siehe Abbildung 3). Unter Berücksichtigung der Änderung der Ausbreitungsrichtung erhalten wir durch Einsetzen

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \alpha_e - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_t}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \alpha_e + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_t} Z_1 \underline{H}_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_1(\sin(\alpha_e)x - \cos(\alpha_e)z))}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_e}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \alpha_e + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_t} Z_1 \underline{H}_0 \begin{pmatrix} -\cos \alpha_t \\ 0 \\ \sin \alpha_t \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_2(\sin(\alpha_t)x + \cos(\alpha_t)z))}.$$

d) Für  $\kappa_2 > 0$  gilt

$$\underline{\mathbf{k}}_t = k_2 (\sin \alpha_t \mathbf{e}_x + \cos \alpha_t \mathbf{e}_z),$$

wobei

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon_2}}$$

$$= \frac{\omega}{c} \sqrt[4]{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}} e^{-j \arctan(\frac{\kappa}{\omega \varepsilon_2})/2}.$$

Verwenden wir nun

$$\cos(\arctan(x)/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\arctan(x))}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\sin(\arctan(x)/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\arctan(x))}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

erhalten wir mit der Eulerschen Formel

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt[4]{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}}}} - j \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}}}} \right) = \beta - j \alpha.$$

Da nun für  $\kappa_2 > 0$  der Imaginärteil von  $k_2$  stets kleiner null ist, erfährt eine Welle, die sich gemäß  $e^{-j k_2 \xi}$  ausbreitet, mit zunehmendem  $\xi$  eine exponentielle Dämpfung.

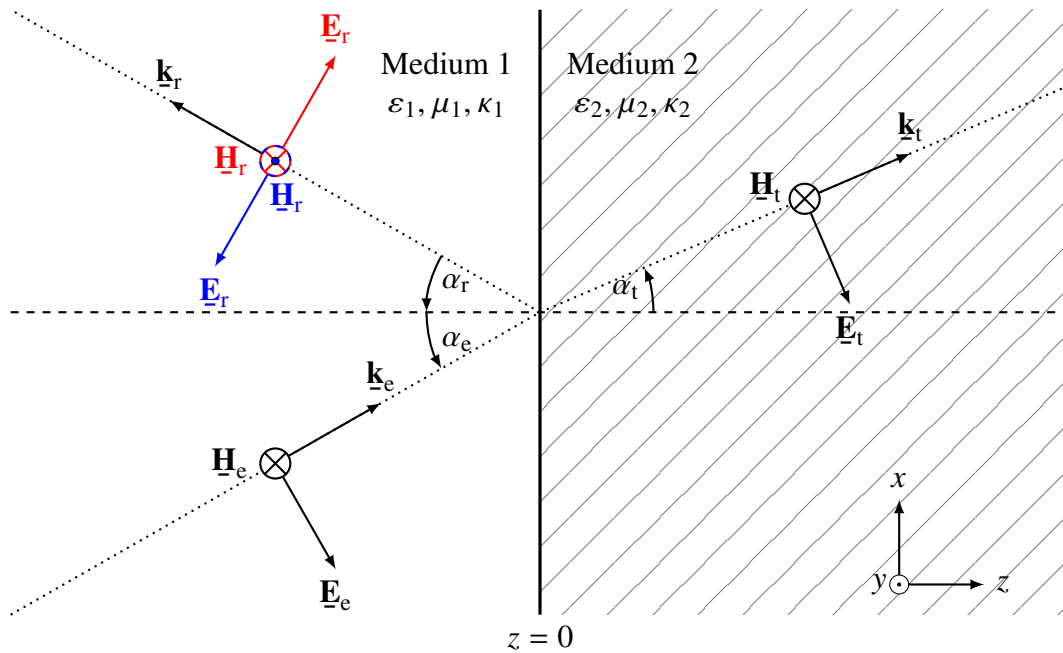
e) Für  $\kappa_2 \rightarrow \infty$  können wir zeigen, dass

$$\lim_{\kappa_2 \rightarrow \infty} Z_2 = \lim_{\kappa_2 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2} \frac{1 + j \frac{\kappa_2}{\omega \varepsilon_2}}{1 + \frac{\kappa_2^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}}} \rightarrow 0$$

Entsprechend erhalten wir  $r_p = 1$  und damit vollständige Reflexion der einfallenden Welle. Folglich ist der Halbraum mit  $z > 0$  feldfrei, d.h.  $\underline{E}_2 = \mathbf{0}$ . Im Medium 1 (Halbraum  $z < 0$ ) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_1 &= \underline{E}_e + \underline{E}_r \\
 &= Z_1 \underline{H}_0 \begin{pmatrix} -\cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_1(\sin \alpha_e x + \cos \alpha_e z))} + Z_1 \underline{H}_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha_e \\ 0 \\ \sin \alpha_e \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_1(\sin \alpha_e x - \cos \alpha_e z))} \\
 &= Z_1 \underline{H}_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha_e (e^{j k_1 \cos \alpha_e z} - e^{-j k_1 \cos \alpha_e z}) \\ 0 \\ \sin \alpha_e (e^{j k_1 \cos \alpha_e z} + e^{-j k_1 \cos \alpha_e z}) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_1 \sin \alpha_e x)} \\
 &= 2Z_1 \underline{H}_0 \begin{pmatrix} j \cos \alpha_e \sin(k_1 \cos \alpha_e z) \\ 0 \\ \sin \alpha_e \cos(k_1 \cos \alpha_e z) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_1 \sin \alpha_e x)}
 \end{aligned}$$

für jede nicht-verschwindende Komponente des elektrischen Felds eine stehende Welle entlang  $z$ .



**Abbildung 3:** Die rot-markierten reflektierten Feldvektoren repräsentieren den Fall  $r_p < 0$ , während die blau-markierten Vektoren im Falle  $r_p \geq 0$  von auftreten.

## Lösung zu Aufgabe 4: Hertzscher Dipol

Zunächst werde ein Hertzscher Dipol im Vakuum betrachtet, welcher das Magnetfeld

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{H}_\phi \mathbf{e}_\phi = \frac{\delta I}{4\pi} \sin \vartheta \left( \frac{j k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\phi$$

hervorrufen.

- a) Da sich der Hertzsche Dipol der Länge  $\delta$  im Vakuum befindet treten keine freien Ströme auf und wir erhalten das resultierende elektrische Feld aus

$$j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}} = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}.$$

In Kugelkoordinaten können wir die Rotation schreiben als

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial(\sin \vartheta \underline{H}_\phi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \underline{H}_\vartheta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \underline{H}_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r \underline{H}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi, \end{aligned}$$

und erhalten aufgrund von  $\underline{H}_r = \underline{H}_\vartheta = 0$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta \underline{H}_\phi)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sin \vartheta \underline{H}_\phi)}{\partial \vartheta} &= \frac{\delta I}{4\pi} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{j k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} = 2 \cos \vartheta \underline{H}_\phi \\ \frac{\partial(r \underline{H}_\phi)}{\partial r} &= \frac{\delta I}{4\pi} \sin \vartheta \left( k^2 - \frac{j k}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \end{aligned}$$

erhalten wir für das elektrische Feld schließlich

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= -\frac{j}{\omega \varepsilon} \frac{\delta I}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \left( 2 \cos \vartheta \left( \frac{j k}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \left( \frac{k^2}{r} - \frac{j k}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{e}_\vartheta \right) \\ &= \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\delta I}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \left( 2 \cos \vartheta \left( \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \left( \frac{j k^2}{r} + \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) \mathbf{e}_\vartheta \right). \end{aligned}$$

- b) Im Nahfeld dominieren die Terme mit höchster negativer Ordnung. Entsprechend erhalten wir für das elektrische und magnetische Feld

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}^{\text{Nah}} &= -\frac{j}{\omega \varepsilon} \frac{\delta I}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \left( 2 \cos \vartheta \frac{1}{r^3} \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \frac{1}{r^3} \mathbf{e}_\vartheta \right) \\ \underline{\mathbf{H}}^{\text{Nah}} &= \frac{\delta I}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \sin \vartheta \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

Im Fernfeld hingegen dominieren die Terme mit niedrigster negativer Ordnung. Entsprechend erhalten wir für das elektrische und magnetische Feld

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}^{\text{Fern}} &= \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\delta I}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \sin\vartheta \frac{k^2}{r} \mathbf{e}_\vartheta \\ \underline{\mathbf{H}}^{\text{Fern}} &= j \frac{\delta I}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \sin\vartheta \frac{k}{r} \mathbf{e}_\phi.\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir für den Poynting-Vektor im Nahfeld

$$\underline{\mathbf{S}}^{\text{Nah}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}^{\text{Nah}} \times \underline{\mathbf{H}}^{*\text{Nah}} = -\frac{1}{2} \frac{j}{\omega\epsilon} \left( \frac{\delta I}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{\sin^2\vartheta}{r^5} \mathbf{e}_r - \frac{2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{r^5} \mathbf{e}_\vartheta \right).$$

Da der Poynting-Vektors im Nahfeld rein imaginär ist, wird in diesem Bereich primär Blindleistung umgesetzt. Im Gegensatz dazu ist der Poynting-Vektor im Fernfeld rein reell, weshalb Leistung von dem Hertzschen Dipol abgestrahlt wird.

*Alternativ:* Werden im Nahfeld die Terme der Ordnung  $\frac{1}{r^2}$  gegenüber  $\frac{1}{r^3}$  nicht vernachlässigt, erhalten wir für  $\underline{\mathbf{E}}$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\text{Nah}} = \frac{1}{\omega\epsilon} \frac{\delta I}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \left( 2 \cos\vartheta \left( \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) \mathbf{e}_r + \sin\vartheta \left( \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) \mathbf{e}_\vartheta \right),$$

und damit für den Poynting-Vektor

$$\underline{\mathbf{S}}^{\text{Nah}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}^{\text{Nah}} \times \underline{\mathbf{H}}^{*\text{Nah}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega\epsilon} \left( \frac{\delta I}{4\pi} \right)^2 \left( \sin^2\vartheta \left( \frac{k}{r^4} - \frac{j}{r^5} \right) \mathbf{e}_r - 2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left( \frac{k}{r^4} - \frac{j}{r^5} \right) \mathbf{e}_\vartheta \right),$$

wobei wegen  $\frac{1}{r^5} > \frac{k}{r^4}$  für  $r \ll 1$  der Blindleistungsanteil überwiegt.

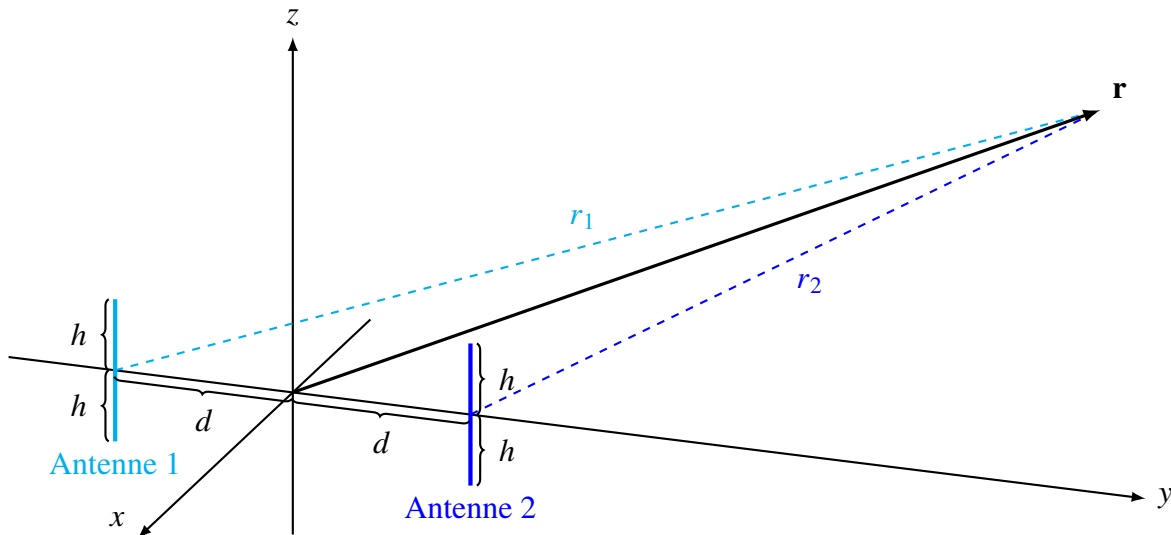


Abbildung 4

Im Folgenden soll das Fernfeld zweier linearer Antennen infinitesimaler Dicke der Länge  $2h = \frac{2\lambda}{4}$  betrachtet werden (vgl. Abbildung 4). Dabei werden gegenseitige Beeinflussungen der Antennen vernachlässigt. Wir nehmen an, dass die Stromverteilung auf beiden Antennen identisch und durch

$$I(z) = I_0 \sin(k(h - |z|))$$

gegeben ist. Der Mittelpunkt der Antenne 1 befinde sich im Punkt  $(0, -d, 0)^T$  mit Abstand  $r_1$  zum Beobachtungspunkt  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ , der Mittelpunkt der Antenne 2 in  $(0, d, 0)^T$  mit Abstand  $r_2$  zu  $\mathbf{r}$ .

- c) Die Koordinate  $r'_i$  gibt den Abstand der Abstrahlposition zum Beobachtungspunkt an, welcher einen Abstand  $r$  vom Ursprung bzw.  $r_i$  zur jeweiligen Antenne aufweist. Wenden wir nun die im Hinweis gegebenen Näherungen an, erhalten wir

$$\underline{E}_{\vartheta,i} = I_0 \sin \vartheta \frac{e^{j(\omega t - kr_i)}}{r} \int_{-h}^h \sin(k(h - |z|)) e^{jkz \cos \vartheta} dz$$

und gemäß der Eulerschen Formel

$$\underline{E}_{\vartheta,i} \propto \underbrace{\int_{-h}^h \sin(k(h - |z|)) \cos(kz \cos \vartheta) dz}_{=: I_1} + j \underbrace{\int_{-h}^h \sin(k(h - |z|)) \sin(kz \cos \vartheta) dz}_{=: I_2}.$$

Da die Integrale symmetrische Grenzen aufweisen, der Integrand von  $I_1$  eine gerade und der von  $I_2$  eine ungerade Funktion ist, gilt i.A.  $I_1 \neq 0$  und  $I_2 = 0$ . Wenn wir zudem die Symmetrie von  $I_1$  ausnutzen, erhalten wir damit

$$\underline{E}_{\vartheta,i} = 2I_0 \sin \vartheta \frac{e^{j(\omega t - kr_i)}}{r} \int_0^h \sin(k(h - z)) \cos(kz \cos \vartheta) dz.$$

Mit dem Hinweis

$$\int_0^h \sin(k(h - z)) \cos(kz \cos \vartheta) dz = \frac{\cos(kh \cos \vartheta) - \cos(kh)}{k \sin^2 \vartheta},$$

erhalten wir schließlich

$$\underline{E}_{\vartheta,i} = 2I_0 \frac{e^{j(\omega t - kr_i)}}{r} \frac{\cos(kh \cos \vartheta) - \cos(kh)}{k \sin \vartheta}.$$

Für das Gesamtfeld der beiden Antennen erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\vartheta} &= \underline{E}_{\vartheta,1} + \underline{E}_{\vartheta,2} \\ &= 2I_0 \frac{e^{j\omega t}}{r} \frac{\cos(kh \cos \vartheta) - \cos(kh)}{k \sin \vartheta} \left( e^{-jkr_1} + e^{-jkr_2} \right) \\ &= 2I_0 \frac{e^{j\omega t}}{r} \frac{\cos(kh \cos \vartheta) - \cos(kh)}{k \sin \vartheta} e^{-jkr_1} \left( 1 + e^{-jk(r_2 - r_1)} \right). \end{aligned}$$

Die Bedingung für die Auslöschung der beiden Felder lautet entsprechend

$$e^{-jk(r_2 - r_1)} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad k|r_2 - r_1| = (2m - 1)\pi, \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}.$$

Mit  $r_1 = \sqrt{x^2 + (y - d)^2 + z^2}$  und  $r_2 = \sqrt{x^2 + (y + d)^2 + z^2}$  können wir  $|r_2 - r_1|$  schreiben als

$$\begin{aligned} |r_2 - r_1| &= \left| \sqrt{x^2 + (y - d)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y + d)^2 + z^2} \right| \\ &= \left| \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + d^2 - 2yd} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + 2yd} \right| \\ &= r \left| \sqrt{1 + \frac{d^2 - 2yd}{r^2}} - \sqrt{1 + \frac{d^2 + 2yd}{r^2}} \right|. \end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung  $d \ll r$  können wir die Wurzelausdrücke durch die ersten zwei Terme ihrer Taylorentwicklung nähern ( $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$  für  $x \ll 1$ ) und erhalten

$$\begin{aligned} |r_2 - r_1| &\approx r \left| 1 + \frac{d^2 - 2yd}{2r^2} - 1 - \frac{d^2 + 2yd}{2r^2} \right| \\ &= r \left| \frac{d^2 - 2yd}{2r^2} - \frac{d^2 + 2yd}{2r^2} \right| = \left| \frac{-2yd}{r} \right| = \frac{2d}{r} |y|. \end{aligned}$$

Somit können wir in Abhängigkeit von  $r$  und  $y$  die folgende Bedingung an  $d$  stellen:

$$d = \frac{(2m-1)\pi}{2k} \frac{r}{|y|} = (2m-1) \frac{\lambda}{4} \frac{r}{|y|} \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}.$$