

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung „Elektromagnetische Wellen“

am 10. März 2022, 16:00 - 18:00 Uhr

Name	Vorname	Matrikelnummer

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Hinweise zur Prüfung:

- Zur Prüfung sind folgende Hilfsmittel zugelassen: Schreibgerät, Lineal, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und die ausgeteilte Formelsammlung.
- Prüfen Sie die Anzahl der Aufgabenblätter (22 inkl. Titelblatt) auf Vollständigkeit.
- Tragen Sie Namen, Vornamen und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein. Sollten Sie zusätzliches Papier verwenden, geben Sie auch auf **jedem** zusätzlichen Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
- Verwenden Sie für Zeichnungen **keinen** Bleistift. Die Farben rot und grün sind für die Korrektur vorgesehen und dürfen daher auch nicht verwendet werden.
- Nach jeder Aufgabe ist Platz für die Lösung vorgesehen. Falls Sie zusätzlich Papier benötigen, wenden Sie sich an das Aufsichtspersonal. Die Verwendung von eigenem Schreibpapier ist nicht gestattet.
- Auf den Lösungsblättern ist **klar zu kennzeichnen**, zu welcher Teilaufgabe ein Resultat gehört.
- Anfang und Ende der Bearbeitungszeit werden vom Aufsichtspersonal für alle verbindlich angesagt. Eine Bearbeitung der Klausur während des Austeilens und Einsammelns der Aufgabenblätter ist nicht gestattet.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	Bonus	Σ
Punkte	14	26	25	25	90	6	90
davon erreicht							

Aufgabe 1: Grenzflächen

Ein Retroreflektor ist ein optisches System, welches eine einfallende elektromagnetische Welle unabhängig vom Einfallswinkel in die Richtung aus der sie gekommen ist, zurückstrahlt. Im Folgenden soll untersucht werden, ob sich ein Prisma, wie in Abbildung 1 dargestellt, als ein solcher Rückstrahler eignet. Die einfallende Welle mit den Feldvektoren $\underline{H}_e$ und $\underline{E}_e$ propagiert in Luft ($n_1 = 1$) und trifft

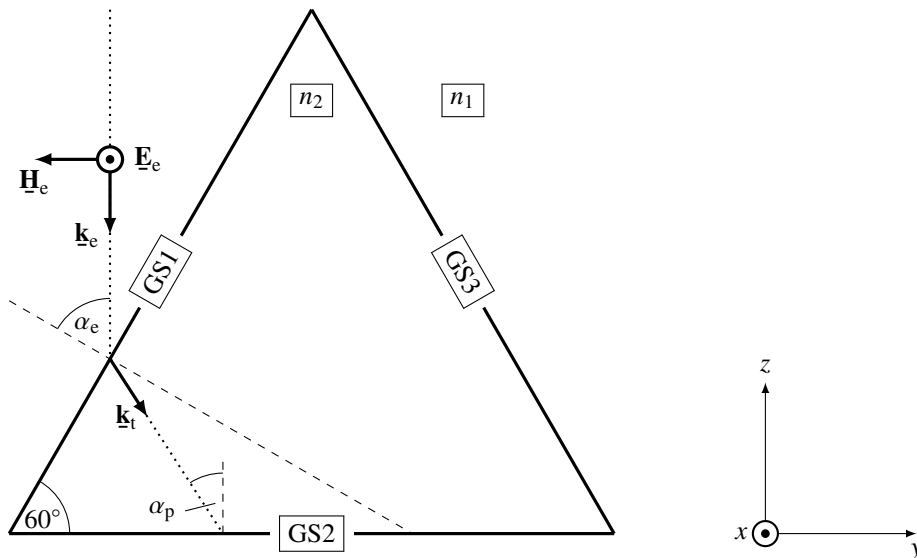


Abbildung 1

unter einem Einfallswinkel von $\alpha_e = 60^\circ$ auf die Grenzschicht 1 (GS1) zu einem gleichschenkligen Glas-Prisma mit Brechungsindex $n_2 = 1,9$.

Hinweis: Das Snelliussche Brechungsgesetz ist im Allgemeinen definiert als

$$n_e \sin(\alpha_e) = n_t \sin(\alpha_t) .$$

- Geben Sie zunächst die Einfallsebene an. Welche Polarisation weist die elektromagnetische Welle auf? Begründen Sie.
- Berechnen Sie den Winkel α_p unter welchem der transmittierte Anteil der Welle auf die GS2 des Prismas trifft.
- Welcher physikalische Effekt muss an GS2 auftreten, um eine möglichst effiziente Rückführung des Strahls zu ermöglichen? Geben Sie die mathematische Bedingung für den Einfallswinkel α_p an und prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.
- Die an der GS2 reflektierte Welle trifft anschließend auf die GS3. Vervollständigen Sie den Propagationspfad der Welle im Prisma und der austretenden Welle in Abbildung 2. Geben Sie den Austrittswinkel der Welle zur Grenzflächennormalen der GS3 für $\alpha_e = 60^\circ$ an.
- Der Eintrittswinkel an GS1 sei nun $\alpha_e = 20^\circ$. Welcher Austrittswinkel ergibt sich dadurch an GS3? Fungiert das Prisma auch bei diesem Eintrittswinkel als Retroreflektor? Begründen Sie in Stichworten.

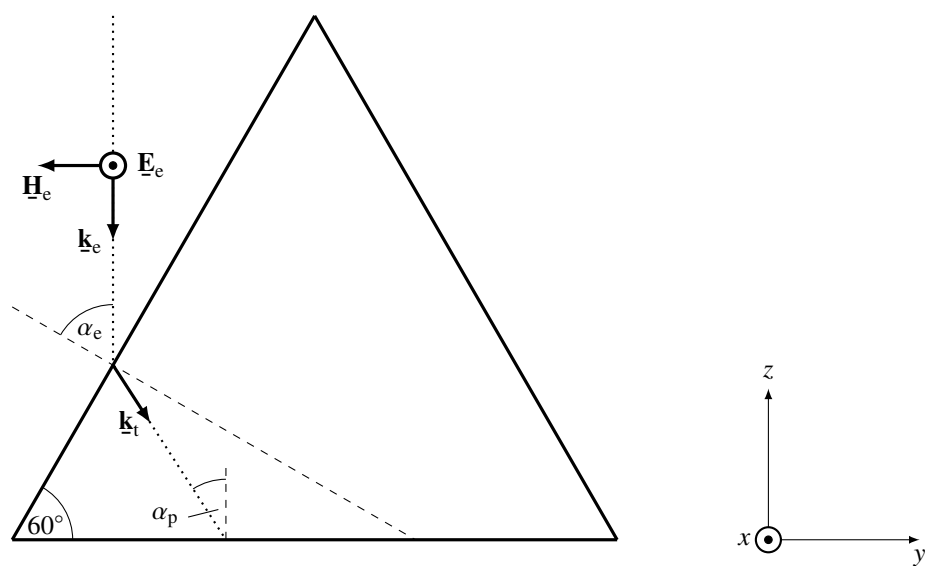


Abbildung 2

Aufgabe 2: Parallelplattenleiter

Ein Parallelplattenleiter bestehe aus zwei in x - und z -Richtung unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Platten im Abstand a , wie in Abbildung 3 dargestellt. Der Raum zwischen den Platten sei vakuumiert. Für das elektrische Feld im Wellenleiter stehen folgende Ansätze zur Verfügung

$$\underline{E}_z(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \quad (1)$$

$$\underline{E}_z(\mathbf{r}, t) = E_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \quad (2)$$

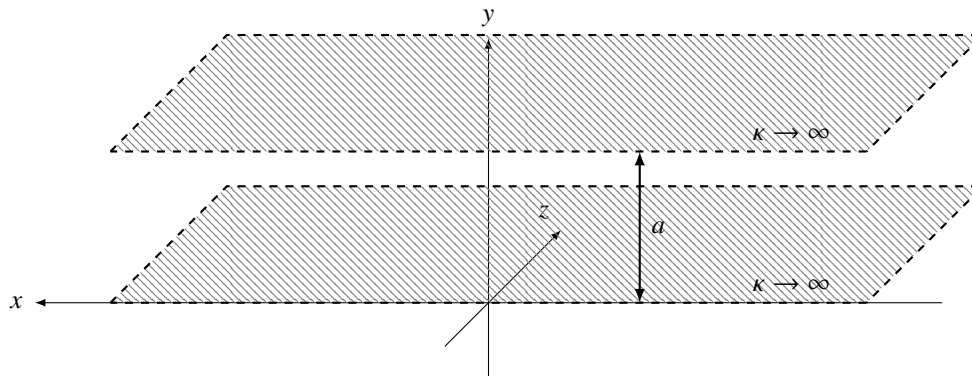


Abbildung 3: Der Koordinatenursprung befindet sich im Schnittpunkt der Koordinatenachsen.

- Geben Sie alle Randbedingungen für das elektrische Feld im Wellenleiter an und bestimmen Sie die gültige Feldverteilung für $\underline{E}_z$.
- Handelt es sich um eine E- oder H-Welle? Geben Sie die Modenzahl an und begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie ausgehend von den allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form, dass für die transversalen Feldkomponenten

$$\underline{E}_x = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

$$\underline{E}_y = \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{H}_x = \frac{j \omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{H}_y = \frac{-j \omega \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

gilt. Begründen Sie die Annahmen, welche Sie treffen.

- Nutzen Sie die geometrischen Eigenschaften des Parallelplattenleiters um die transversalen Feldkomponenten aus Aufgabenteil c) weiter zu vereinfachen. Begründen Sie Ihre Annahme.
- Berechnen Sie alle Feldkomponenten der gegebenen Mode.
- Skizzieren und kennzeichnen Sie nun den Verlauf des Real- und Imaginärteils aller Feldkomponenten über dem Querschnitt des Parallelplattenleiters zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $z = 0$ in Abbildung 4.

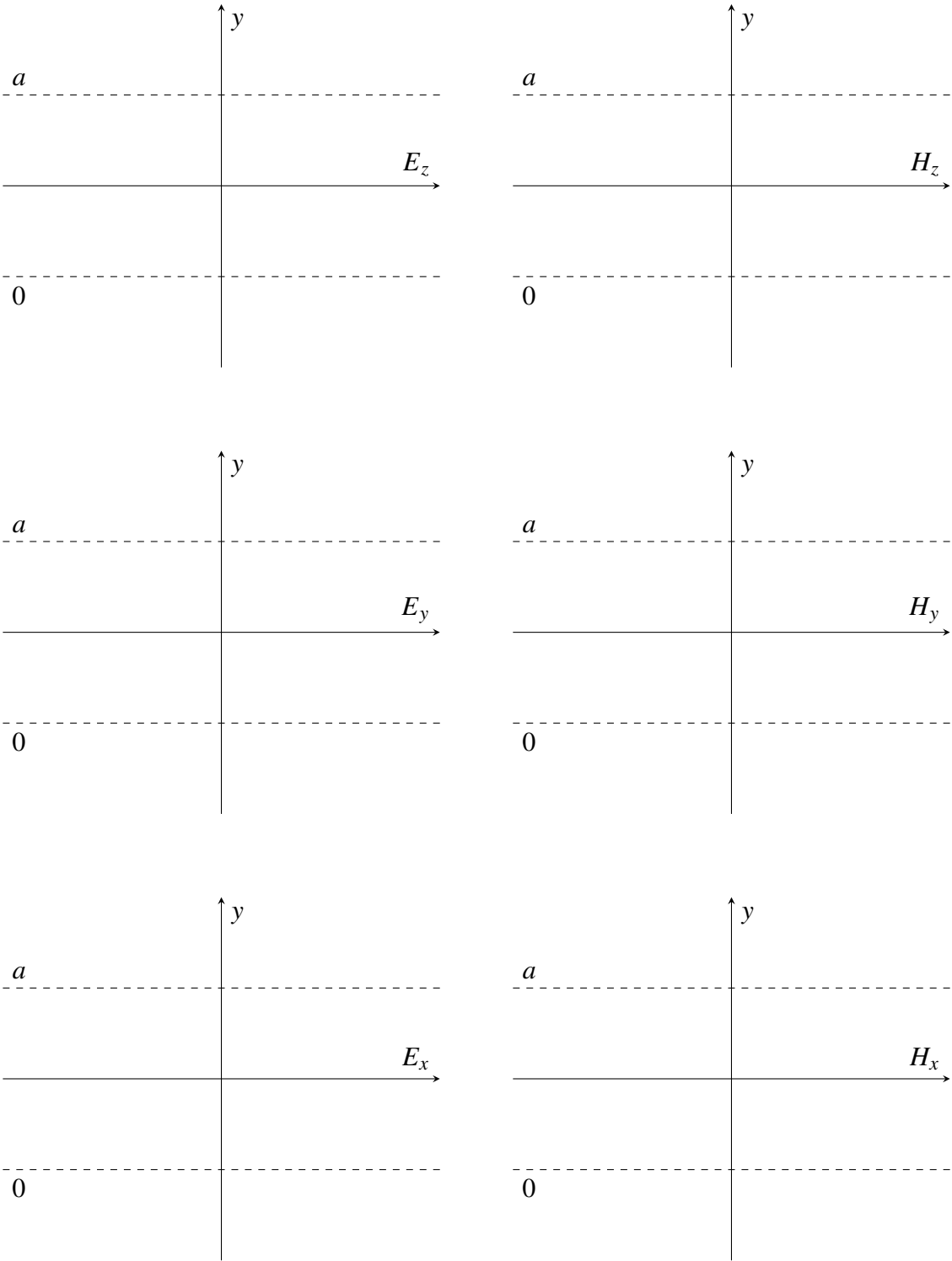


Abbildung 4

Aufgabe 3: Gaußscher Strahl, Beugung & Strahlenoptik

Gegeben sei das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle mit Wellenlänge λ bzw. Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ in der Ebene $z = 0$. Das Feld weise lediglich eine x -Komponente auf und die Amplitudenverteilung ist durch den Gaußschen Fleck

$$E_x(x, y, z = 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{w_0^2}\right),$$

mit dem $1/e$ -Strahlradius w_0 gegeben. Die Welle breite sich in positive z -Richtung in den Halbraum $z > 0$ hinein aus. Der gesamte Raum befinde sich im Vakuum. Mithilfe des Kirchhoffschen Beugungsintegrals unter der Fresnelschen Näherung

$$\underline{U}(x, y, z) = j \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', z = 0) \exp\left(-j k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right) dx' dy', \quad (3)$$

können wir in guter Näherung die Entwicklung einer komplexen Amplitude $\underline{U}$ entlang z beschreiben.

- a) Transformieren Sie die allgemeine Darstellung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals (3) in ein doppeltes Fourierintegral mit den Ortsfrequenzen $\xi = \frac{x}{\lambda z}$ und $\nu = \frac{y}{\lambda z}$.

Hinweis: Sie sollten einen Ausdruck der Form

$$\underline{U}(x, y, z) = j \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \underline{f}(x, y, z) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', z = 0) \underline{f}(x', y', z) \exp(j 2\pi(\xi x' + \nu y')) dx' dy'$$

erhalten.

- b) Welche Bedingung muss z erfüllen, damit wir das erhaltene Fourierintegral für $\underline{U}(x, y, z) = E_x(x, y, z)$ vereinfachen und das Fraunhofersche Beugungsintegral

$$\underline{U}(x, y, z) = j \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', z = 0) \exp(j 2\pi(\xi x' + \nu y')) dx' dy',$$

verwenden können? Begründen Sie.

Hinweis: Berücksichtigen Sie dabei, welchen Einfluss die Verteilung von $\underline{U}(x, y, z = 0)$ auf das Integral hat.

- c) Nehmen Sie die Gültigkeit der Fraunhoferschen Näherung an, um E_x im Halbraum $z > 0$ zu ermitteln. Vereinfachen Sie soweit möglich.

Hinweis: Zerlegen Sie dafür das zweidimensionale Beugungsintegral in das Produkt zweier eindimensionaler Integrale und nutzen Sie aus, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{w_0^2}\right) \exp(j 2\pi \xi x') dx' = \sqrt{\pi} w_0 \exp\left(-\pi^2 w_0^2 \xi^2\right).$$

- d) Zeigen Sie, dass das Ergebnis aus c) gerade dem Gaußschen Strahl

$$E_x^{\text{Gauß}}(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-j \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right) \exp(j \varphi_G(z)),$$

im Fall $z \gg z_R$ entspricht.

Hinweis: Es gilt

$$z_R = \frac{k w_0^2}{2} \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right) \quad \varphi_G(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right).$$

- e) Welche Bedeutung haben die beiden Strahlparameter $w(z)$ und $R(z)$?
- f) Bei $z = L \gg z_R$ treffe die betrachtete elektromagnetische Welle auf eine unendlich ausgedehnte dünne Linse. Welche Brennweite f benötigt die Linse, damit die Phasenfront von $\underline{E}_x$ direkt hinter der Linse keine Krümmung mehr aufweist?

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$ wobei R_1 bzw. R_2 die Krümmungsradien vor bzw. nach der Linse mit Brennweite f bezeichnen.

Aufgabe 4: Stufenindexfaser

Nun betrachten wir einen Glasfaser mit Stufenindexprofil und Kernradius a , in der sich eine elektromagnetische Welle in z -Richtung ausbreitet. Der Faserquerschnitt ist in Abbildung 5 dargestellt. Die Medien seien nichtleitend, raumladungsfrei und nichtmagnetisch mit $\mu = \mu_0$. Die Brechzahl im Kern bzw. im Mantel sei n_1 bzw. n_2 .

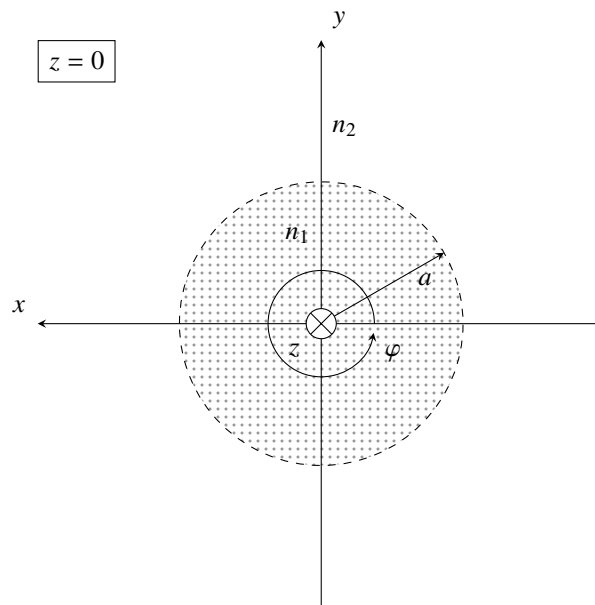


Abbildung 5

- a) Welche Stetigkeitsbedingungen müssen für das tangentielle und das normale E-Feld an der Kern-Mantel-Grenze der betrachteten Stufenindexfaser gelten? Wie lauten die entsprechenden Bedingungen für das H-Feld? Vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit möglich.

Für die normierte Brechzahldifferenz gelte nun $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \ll 1$.

- b) Welche Rolle spielt diese Eigenschaft bei der Wellenausbreitung und welche Näherung können wir damit für die Stetigkeitsbedingungen des E- und H-Felds treffen?

Wir nehmen im Folgenden an, dass sich in der Faser eine in y -Richtung linear polarisierte Welle ausbreitet, d.h., es gilt $\underline{E}_x = 0$ und $\underline{E}_y \neq 0$. Zur Bestimmung von $\underline{E}_y$ wählen wir mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ den Ansatz

$$\underline{E}_y(\rho, \varphi, z; t) = \underline{E}_{y,0} R(\rho) \exp(j \ell \varphi) \exp(j(\omega t - k_z z)) .$$

- c) Setzen Sie den Ansatz für $\underline{E}_y$ in die *skalare* Wellengleichung ein und ermitteln Sie eine Differenzialgleichung für $R(\rho)$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\underline{E}_y$ in Zylinderkoordinaten gegeben ist.

Die Besselfunktionen $J_\ell(u\rho)$ und $N_\ell(u\rho)$ lösen die Besselsche Differentialgleichung

$$\rho^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + (u^2 \rho^2 - \ell^2) w = 0 ,$$

und die modifizierten Besselfunktionen $I_\ell(u\rho)$ und $K_\ell(u\rho)$ lösen die modifizierte Besselsche Differentialgleichung

$$\rho^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} - (u^2 \rho^2 + \ell^2) w = 0 .$$

- d) Führen Sie die Variablen $\beta_t^2 = n_1^2 k_0^2 - k_z^2$ und $\alpha_t^2 = k_z^2 - n_2^2 k_0^2$ ein und zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung für $R(\rho)$ im Faserkern der Besselschen bzw. im Mantel der modifizierten Besselschen Differenzialgleichung entspricht.
- e) Welche der in Tabelle 1 dargestellten Funktionen stellen physikalisch sinnvolle Lösungen der Differenzialgleichungen für das elektrische Feld im Kern bzw. im Mantel dar? Begründen Sie Ihre Wahl.
- f) Spezifizieren Sie auf Basis Ihrer Auswahl in e) den Ansatz für $\underline{E}_y$. Welche Stetigkeitsbedingung muss $\underline{E}_y$ erfüllen? Ist die Erfüllung dieser Stetigkeitsbedingung ausreichend, um die longitudinalen und transversalen Ausbreitungskonstanten zu bestimmen? Erläutern Sie.

Der Radius des Faserkerns betrage nun $a = 4 \mu\text{m}$. Die Brechzahlen im Kern und Mantel seien $n_1 = 1,4485$ und $n_2 = 1,4470$.

- g) Wie viele Moden können sich in der Stufenindexfaser bei einer Wellenlänge von $\lambda_1 = 1,55 \mu\text{m}$ ausbreiten? Wie viele Moden sind es bei blauem Licht mit $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$? Das BV-Diagramm der linear polarisierten Moden in der Stufenindexfaser finden Sie in Abbildung 6.

Hinweis: In der Stufenindexfaser berechnet sich die normierte Frequenz V gemäß $V = ak_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

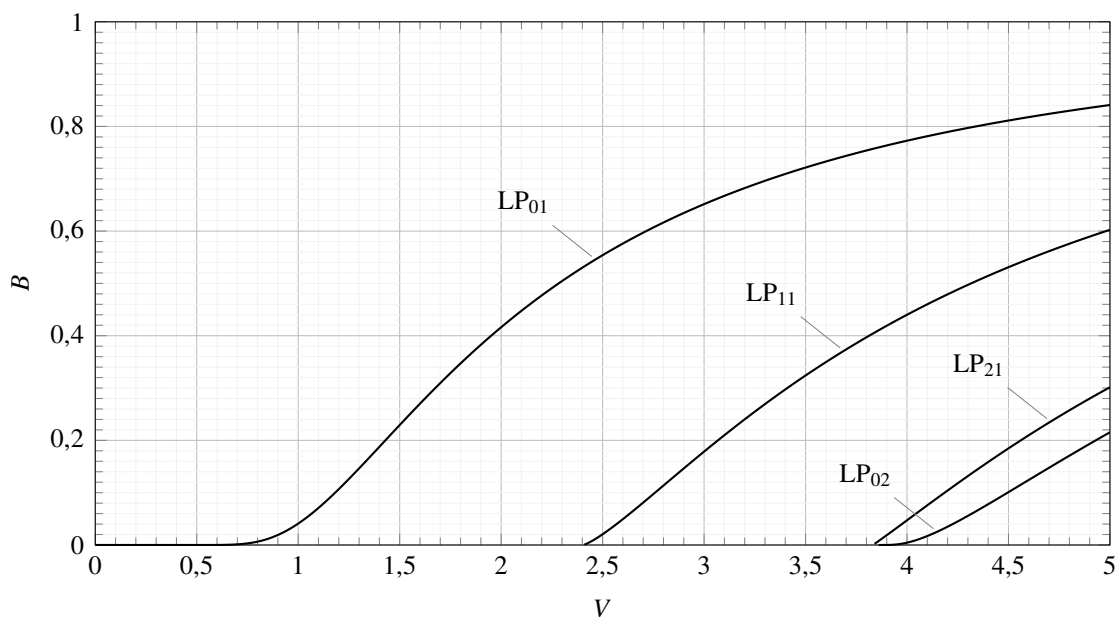
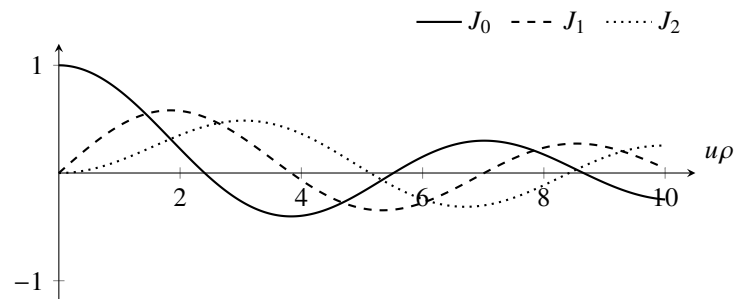


Abbildung 6: Normierte Ausbreitungskonstante B aufgetragen über der normierten Frequenz V für die linear polarisierten Moden in der Stufenindexfaser.

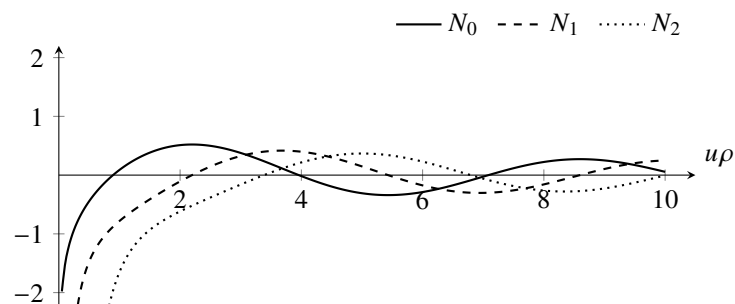
Funktionenklasse**Graphische Darstellung**

Lösungen der Besselschen Differenzialgleichung: *Besselfunktionen*

1. Gattung $J_\ell(u\rho)$

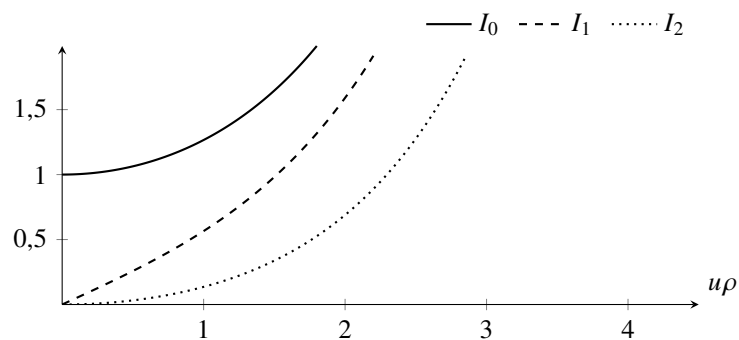


2. Gattung $N_\ell(u\rho)$



Lösungen der modifizierten Besselschen Differenzialgleichung: *Modifizierte Besselfunktionen*

1. Gattung $I_\ell(u\rho)$



2. Gattung $K_\ell(u\rho)$

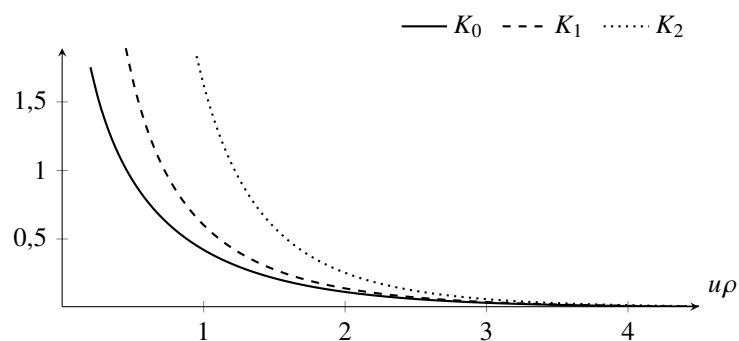


Tabelle 1

Lösungsvorschlag zur EMW Klausur

10. März 2022

Lösung zu Aufgabe 1: Grenzflächen

- a) Die Einfallsebene wird **durch die Wellenvektoren $\underline{k}_e$ und $\underline{k}_r$ aufgespannt**. Demnach liegt die Einfallsebene in der **yz-Ebene. (1)**
Da das elektrische Feld senkrecht zur Einfallsebene steht, handelt es sich um eine senkrecht polarisierte Welle. (1)

Gesamt: 2 Punkte

- b) Der Winkel zur Grenzflächennormalen der transmittierten Welle an GS1 lässt sich mit dem Brechungsgesetz bestimmen

$$n_1 \sin(\alpha_e) = n_2 \sin(\alpha_t)$$

$$\alpha_t = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha_e)\right) \quad (1)$$

Die Grenzflächennormale der GS1 und GS2, sowie der Pfad der transmittierten Welle ergeben ein Dreieck. Der Winkel zwischen den beiden Grenzflächennormalen ergibt sich aus der Neigung des Prismas zu $90^\circ + (90^\circ - 60^\circ) = 120^\circ$ (Summe aller Winkel eines Dreiecks ist 180°) **(2)**. Daraus ergibt sich α_p zu

$$\alpha_p = 180^\circ - \alpha_t - 120^\circ$$

$$= 60^\circ - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha_e)\right) = 32,8834^\circ \quad (1)$$

Gesamt: 4 Punkte

- c) Der Retroreflektor soll möglichst viel Leistung der einfallenden Welle in dieselbe Richtung zurückführen. Um an GS2 die Welle vollständig zu reflektieren muss Totalreflexion auftreten. Damit dies möglich ist, muss der Winkel α_p größer als der kritische Winkel α_{krit} sein:

$$\alpha_p > \alpha_{\text{krit}} = \arcsin \frac{n_1}{n_2} = 31,7569^\circ$$

Die transmittierte Welle erfüllt also die Bedingung für die vollständige Reflexion.
(Erkennen der Totalreflexion (1), Formel für α_{krit} (1), Bedingungen $\alpha_p > \alpha_{\text{krit}}$ und korrekte Folgerung ob erfüllt (1).)

Gesamt: 3 Punkte

- d) Pfad: Siehe Abbildung 7 **(1)**. Da das Prisma symmetrisch ist, trifft auch auf der rechten Seite die Welle unter einem Winkel α_t gegenüber der Grenzflächennormalen auf GS3. Entsprechend dem Brechungsgesetzes ist der Austrittswinkel dann gleich dem Eintrittswinkel

$$\alpha_a = \alpha_e = 60^\circ \quad (1)$$

Gesamt: 2 Punkte

- e) Zunächst stellt sich die Frage, ob immer noch Totalreflexion auftritt. Da α_e nun kleiner ist, wird α_p größer. Das heißt, Totalreflexion tritt auch unter dem veränderten Eintrittswinkel auf. Analog zu der Argumentation in Aufgabenteil d), ist der Austrittswinkel α_a aufgrund der Totalreflexion und der Symmetrie des Prismas gleich dem Eintrittswinkel α_e . Die Welle propagiert nach Austritt an der GS3 also zur rechten Seite unter einem Winkel von 20° (1). Da die Welle nicht in die Richtung zurückgelenkt wird, aus der sie eintrifft, lässt sich mit dem Prisma **kein Retroreflektor realisieren** (2).

Das Erklären und Zeigen, dass immer noch Totalreflexion auftritt, gibt zusätzlich (1) Punkt, falls nicht die volle Punktzahl erreicht wurde.

Gesamt: 3 Punkte

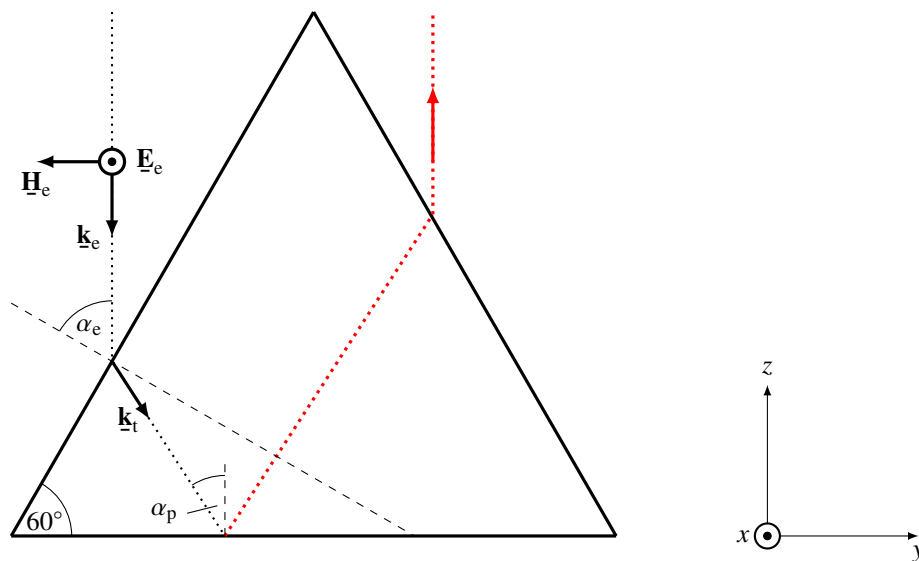


Abbildung 7

Lösung zu Aufgabe 2: Parallelplattenleiter

a) Folgende Randbedingungen müssen für das elektrische Feld erfüllt sein:

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(y=0, t) &= 0 & \underline{E}_z(y=a, t) &= 0 \\ \underline{E}_x(y=0, t) &= 0 & \underline{E}_x(y=a, t) &= 0\end{aligned}$$

(Bedingung für x -Komponente (1). Bedingung für z -Komponente (1))

Einsetzen von Ansatz 1 mit jeweils $y = 0$ und $y = a$ ergibt

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(y=0, t) &= E_0 \cos(0) \exp(j(\omega t - k_z z)) = E_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \neq 0 \quad (1) \\ \underline{E}_z(y=a, t) &= E_0 \cos(2\pi) \exp(j(\omega t - k_z z)) = E_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \neq 0\end{aligned}$$

und erfüllt offensichtlich nicht die Randbedingungen. Einsetzen von Ansatz 2

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(y=0, t) &= E_0 \sin(0) \exp(j(\omega t - k_z z)) = 0 \quad (1) \\ \underline{E}_z(y=a, t) &= E_0 \sin(2\pi) \exp(j(\omega t - k_z z)) = 0\end{aligned}$$

zeigt, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

(Zeigen für Kosinus (1). zeigen für Sinus (1). Wenn das mathematische Beweisen für den Kosinus oder Sinus fehlt, dafür aber das Folgern der korrekten Feldverteilung richtig ist, gibt dies einen halben Punkt.)

Gesamt: 4

- b) Da eine $\underline{E}_z$ -Feldkomponente ungleich Null vorhanden ist, handelt es sich um eine **E-Welle (1)**. Da für die Wellenzahl $k_y = \frac{m\pi}{a}$ gilt, lässt sich hieraus die **Modenzahl $m = 2$** ablesen. (E-Welle (1) + Modenzahl (1) + Erklärung der Modenzahl (1))

Alternativ: Da die $\underline{E}_z$ -Feldkomponente entlang y zwei Extrema aufweist, gilt für die Modenzahl $m = 2$.

Gesamt: 3 Punkte

- c) Aus dem Induktionsgesetz $\nabla \times \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = -j \omega \mu \underline{H}$ ergibt sich

$$-j \omega \mu \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ \underline{H}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Mit $\underline{H}_z = 0$ (1/2) und $\partial/\partial z = -j k_z$ (1/2) lassen sich diese Differentialgleichungen vereinfachen zu

$$\underline{H}_x = \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega \mu} \underline{E}_y \quad (4)$$

$$\underline{H}_y = \frac{k_z}{\omega \mu} \underline{E}_x - \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \quad (5)$$

$$\underline{H}_z = 0 \quad (1) \quad (6)$$

Analog erhält man aus dem Durchflutungsgesetz $\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{D}}}{\partial t} = j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$ (mit $\underline{\mathbf{J}} = 0$ da ideal leitende Leiterplattenwände)

$$j \omega \varepsilon \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Und schließlich mit $\underline{H}_z = 0$ und $\partial/\partial z = -j k_z$ zwei Ausdrücke, welche jeweils das E- und H-Feld miteinander verknüpfen

$$\underline{E}_x = \frac{k_z}{\omega \varepsilon} \underline{H}_y \quad (7)$$

$$\underline{E}_y = -\frac{k_z}{\omega \varepsilon} \underline{H}_x \quad (8)$$

Einsetzen von Gleichung (6) in Gleichung (4) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{H}_y &= \frac{-j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu \varepsilon} \underline{H}_y \quad (1) \\ \underline{H}_y \left(1 - \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu \varepsilon} \right) &= \frac{-j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \underline{H}_y &= \frac{\frac{-j}{\omega \mu}}{1 - \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu \varepsilon}} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \underline{H}_y &= \frac{-j \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \quad (1) \quad \square \end{aligned}$$

Das $\underline{E}_x$ -Feld lässt sich schließlich aus der Beziehung in Gleichung (6) ermitteln

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= \frac{k_z}{\omega \varepsilon} \frac{-j \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ &= \frac{-j k_z}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \quad (1) \quad \square \end{aligned}$$

Einsetzen von Gleichung (7) in Gleichung (3) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &= \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu \varepsilon} \underline{H}_x \quad (1) \\ \underline{H}_x \left(1 - \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu \varepsilon} \right) &= \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \\ \underline{H}_x &= \frac{\frac{j}{\omega \mu}}{1 - \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu \varepsilon}} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \\ \underline{H}_x &= \frac{j \omega \varepsilon}{\omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \quad (1) \quad \square \end{aligned}$$

Das $\underline{E}_y$ -Feld lässt sich schließlich aus der Beziehung in Gleichung (7) ermitteln

$$\begin{aligned}\underline{E}_y &= -\frac{k_z}{\omega\epsilon} \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \quad (1) \\ &= \frac{-j k_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \quad \square\end{aligned}$$

Gesamt: 11 Punkte

- d) Da der Parallelplattenleiter in die x -Richtung unendlich weit ausgedehnt ist, verändert sich das Feld nicht in x -Richtung (1). Dadurch gilt $\partial/\partial x = 0$ (1) und die transversalen Feldkomponenten vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned}\underline{E}_x &= 0 & \underline{E}_y &= \frac{-j k_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \\ \underline{H}_x &= \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} & \underline{H}_y &= 0(1) .\end{aligned}$$

Gesamt: 3 Punkte

- e) Aus Aufgabenteil d) bzw. mit den Maxwellschen Gleichungen, welche in Aufgabenteil c) gegeben sind, lassen sich alle Feldkomponenten berechnen:

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(y, z, t) &= E_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ \underline{E}_x(y, z, t) &= 0 \\ \underline{E}_y(y, z, t) &= \frac{-j k_z E_0}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{2\pi}{a} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \quad (1) \\ \underline{H}_z(y, z, t) &= 0 \\ \underline{H}_x(y, z, t) &= \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \frac{2\pi}{a} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \exp(j(\omega t - k_z z)) \quad (1) \\ \underline{H}_y(y, z, t) &= 0\end{aligned}$$

Gesamt: 2 Punkte

- f) siehe Abbildung 8

Je Feldkomponente (1)

Gesamt: 3 Punkte

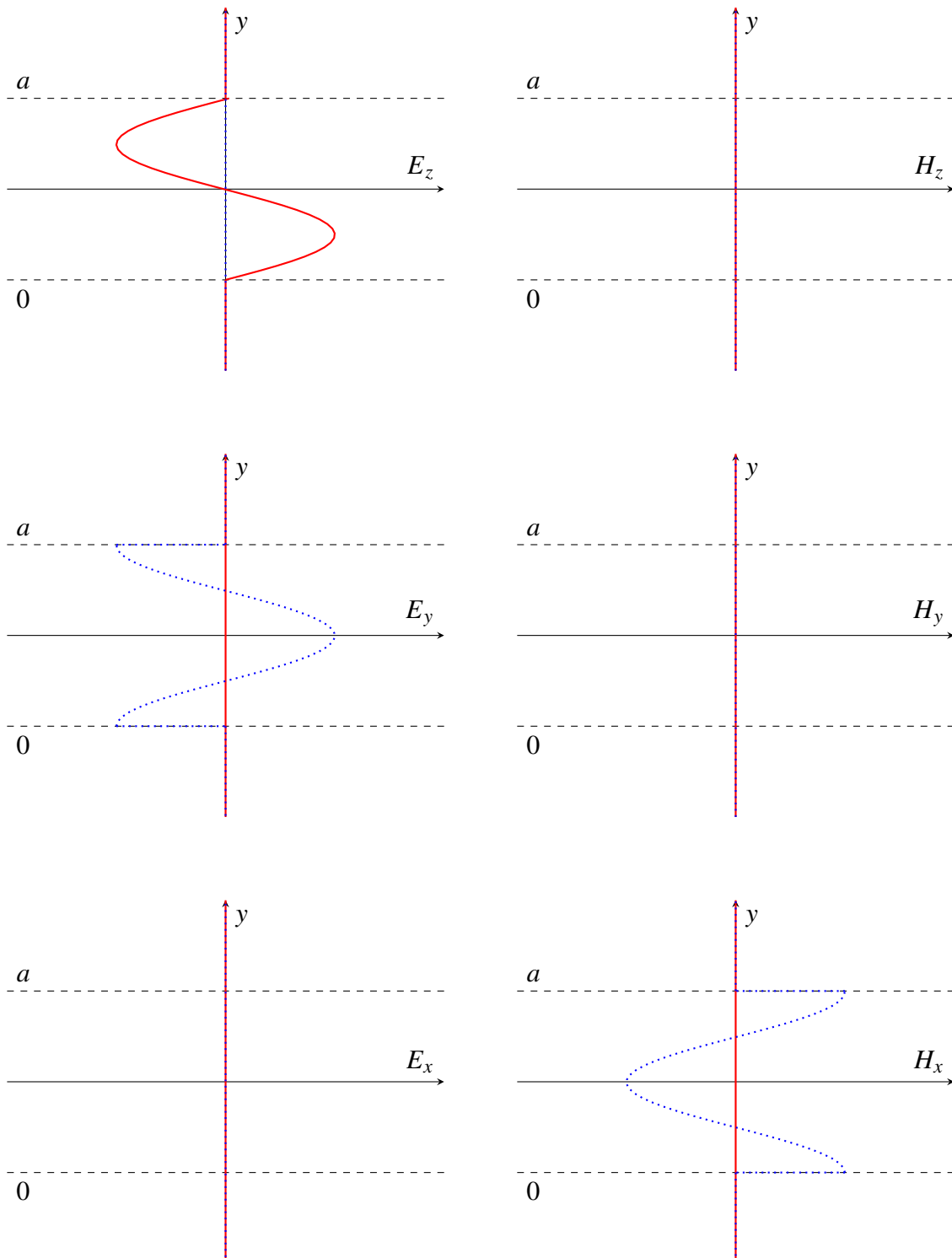


Abbildung 8: Realteil: Durchgängige rote Linien. Imaginärteil: Gepunktete blaue Linien.

Lösung zu Aufgabe 3: Gaußscher Strahl, Beugung & Strahlenoptik (25 Punkte)

- a) Um das Fresnelsche Beugungsintegral als Fourierintegral zu schreiben, multiplizieren wir zunächst das Argument der komplexen Exponentialfunktion im Integranden aus

$$k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} = \frac{k}{2z} (x^2 + y^2 - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2) \quad (1).$$

Davon ausgehend können wir an

$$\underline{U}(x, y, z) = j \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', z=0) \exp\left(-j k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right) dx' dy'}_{=: I}$$

folgende Umformungen durchführen (**Einsetzen & Aufteilen Exponentialterme (1), Herausziehen aus Integral (1), Einsetzen für k (1), Erhalt von Fourier-Term (1)**):

$$\begin{aligned} I &= \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', 0) \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \exp\left(j \frac{k}{z} (xx' + yy')\right) \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) dx' dy' \\ &= \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', 0) \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp\left(j \frac{k}{z} (xx' + yy')\right) dx' dy' \\ &= \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', 0) \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp\left(j 2\pi \left(\frac{x}{\lambda z} x' + \frac{y}{\lambda z} y'\right)\right) dx' dy' \\ &= \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', 0) \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp(j 2\pi (\xi x' + \nu y')) dx' dy'. \end{aligned}$$

Alternativ zu Einsetzen, Aufteilen und Herausziehen auch Zuordnung von $f(x, y, z)$ bzw. $f(x', y', z)$ möglich.

Das Integral (und damit auch der Ausdruck für $\underline{U}(x, y, z)$) weist nun die Form eines Fourierintegrals auf. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \underline{U}(x, y, z) &= j \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', 0) \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp(j 2\pi (\xi x' + \nu y')) dx' dy' \bigg|_{\substack{\xi = \frac{x}{\lambda z} \\ \nu = \frac{y}{\lambda z}}} \end{aligned}$$

Gesamt: 5 Punkte

- b) Wir erhalten die Fraunhofersche Näherung, wenn wir $f(x', y', z) \approx 1$ annehmen bzw. den Exponenten $-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}$ vernachlässigen (1). Diese Näherung dürfen wir nur durchführen, wenn der Betrag des besagten Exponenten viel kleiner als 2π ist (1) (**akzeptiere auch Exponent $\rightarrow 0$ bzw. $x'^2 + y'^2 \ll z$, nicht aber $z \rightarrow \infty$ oder $z > 0$**). Eine Ausnahme stellt der Fall dar, in dem $\underline{U}(x', y', z=0)$ vernachlässigbaren Beitrag liefert: Dann können wir diese strenge Forderung unberücksichtigt lassen, da der gesamte Integrand des Beugungsintegrals verschwindet (1). Wir betrachten nun $\underline{E}_x$. Gilt $x'^2 + y'^2 \geq w_0^2$, so nimmt $\underline{E}_x(x', y', 0)$ einen Wert kleiner gleich $1/e$ an. Folglich ist $\underline{E}_x(x', y', 0)$ für $x'^2 + y'^2 \gg w_0^2$ vernachlässigbar (1) und die Fraunhofersche Näherung gilt wenn

$$k \frac{w_0^2}{2z} \ll 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad z \gg \frac{w_0^2}{2\lambda}. \quad (1)$$

Der letzte Punkt wird für die mathematische Formulierung der verallgemeinerten Gültigkeitsbedingung aufgrund von $\underline{E}_x(x', y', 0) \rightarrow 0$ für $x'^2 + y'^2 \gg w_0^2$ vergeben.

Gesamt: 5 Punkte

- c) Gilt die Fraunhofersche Näherung, vereinfacht sich das Beugungsintegral zu

$$\underline{E}_x(x, y, z) = j \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{E}_x(x', y', 0) \exp(j 2\pi (\xi x' + \nu y')) dx' dy'.$$

Setzen wir nun für $\underline{E}_x(x', y', z = 0)$ ein, und teilen das Integral gemäß dem Hinweis auf, erhalten wir (1) (für die Aufteilung in Produkt zweier Integrale)

$$\underline{E}_x(x, y, z) = \frac{j \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) X(x) Y(y),$$

wobei (1)

$$X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{w_0^2}\right) \exp(j 2\pi \xi x') dx' = \sqrt{\pi} w_0 \exp\left(-\pi^2 w_0^2 \xi^2\right)$$

$$Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y'^2}{w_0^2}\right) \exp(j 2\pi \nu y') dy' = \sqrt{\pi} w_0 \exp\left(-\pi^2 w_0^2 \nu^2\right).$$

Führen wir die Teilergebnisse wieder zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{E}_x(x, y, z) &= j \pi w_0^2 \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \exp\left(-\pi^2 w_0^2 (\xi^2 + \nu^2)\right) \quad (1) \\ &= j \pi w_0^2 \frac{\exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 w_0^2}{\lambda^2 z^2} (x^2 + y^2)\right) \\ &= j \frac{k w_0^2}{2z} \exp(-j k z) \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \exp\left(-\frac{k^2 w_0^2}{4z^2} (x^2 + y^2)\right). \end{aligned}$$

Gesamt: 3 Punkte

- d) Zunächst führen wir $z_R = \frac{k w_0^2}{2}$ ein. Im Zuge der Fraunhoferschen Näherung haben wir gefordert, dass

$$k \frac{w_0^2}{2z} = \frac{z_R}{z} \ll 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad z \gg z_R$$

gilt. Dementsprechend können wir im Zuge dieser Näherung die Parameter des Gaußschen Strahls folgendermaßen approximieren

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \approx w_0 \frac{z}{z_R} \quad (1)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right) \approx z \quad (1)$$

$$\varphi_G = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \approx \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Stellen wir nun $\underline{E}_x$ mithilfe von z_R dar, erhalten wir

$$\underline{E}_x(x, y, z) = j \frac{z_R}{z} \exp(-j k z) \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \exp\left(-\frac{k z_R}{2z} (x^2 + y^2)\right). \quad (1)$$

Der Vergleich mit dem Gaußschen Strahl zeigt mit $\frac{k w_0}{2z} = \frac{z_R}{w_0 z} \approx \frac{1}{w(z)}$, dass wir unter Verwendung der obigen Näherungen das Ergebnis aus Aufgabenteil c) erhalten: **Für das korrekte Einsetzen und Umformen jeder der drei Näherungen je (1)**

$$\begin{aligned} \text{Näherungen} &\Rightarrow \frac{w_0}{w(z)} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-j \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right) \exp(j \varphi_G(z)) \\ &\Leftrightarrow j \frac{z_R}{z} \exp(-j k z) \exp\left(-\frac{k z_R}{2z} (x^2 + y^2)\right) \exp\left(-j \frac{k(x^2 + y^2)}{2z}\right) \exp\left(j \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Alternative: Wir setzen direkt die Näherungen in den Gaußschen Strahl ein und formen diesen Ausdruck anschließend so um, dass wir den Ausdruck aus c) erhalten. Dann entsprechend je (1) für korrektes Anwenden jeder der drei Näherungen sowie (1) für das abschließende Umformen.

Gesamt: 7 Punkte

- e) $w(z)$ beschreibt den 1/e-Strahlradius (1), $R(z)$ den Krümmungsradius der Phasenfront in Abhängigkeit von z (1).

Gesamt: 2 Punkte

- f) Bei $z = L \gg z_R$ beträgt der Krümmungsradius der Phasenfront von $\underline{E}_x$ unter der Fraunhoferschen Näherung $R(L) = L$ (1). Soll die Phasenfront nach der Linse keine Krümmung mehr aufweisen, so muss der Krümmungsradius unendlich groß werden und damit $\frac{1}{R_2} = 0$ gelten (1). Es folgt also für die Brennweite der Linse

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = R_1 = L. \quad (1)$$

Letzter Punkt für korrekte Umformung nach f .

Gesamt: 3 Punkte

Lösung zu Aufgabe 4: Stufenindexfaser (25 Punkte)

- a) Da alle Medien in der Faser nichtleitend und raumladungsfrei sind gilt mit $\mu = \mu_0$ (0.5) pro Bedingung für E und H

$$\begin{aligned} E_{t,1} - E_{t,2} &= 0 & H_{t,1} - H_{t,2} &= 0 \\ n_1^2 E_{n,1} - n_2^2 E_{n,2} &= 0 & H_{n,1} - H_{n,2} &= 0. \end{aligned}$$

Damit sind alle Komponenten bis auf die Normalkomponente des elektrischen Felds an der Grenzfläche stetig.

Gesamt: 2 Punkte

- b) Ist die normierte Brechzahldifferenz sehr klein, so ist nur für sehr große Winkel die Bedingung für Totalreflexion erfüllt (1) und der Wellenvektor und die Faserachse sind nahezu parallel zueinander. Aufgrund der Rechte-Hand-Regel überwiegen dann die transversalen Komponenten des elektrischen und magnetischen Felds (1). Alternativ zu Überwiegen transversaler Komponenten: LP-Moden (1)

Berücksichtigen wir nun bei den Stetigkeitsbedingungen auch die schwache Führung, können wir zudem $n_1^2/n_2^2 \approx 1$ annehmen. Damit ist bei schwacher Führung auch die Normalkomponente des elektrischen Felds näherungsweise stetig (1).

Gesamt: 3 Punkte

- c) Die skalare Wellengleichung für $\underline{E}_y$ lautet

$$\Delta \underline{E}_y - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial t^2} = 0.$$

Da $\underline{E}_y$ in Zylinderkoordinaten gegeben ist und eine harmonische Zeitabhängigkeit (zeitliche Ableitung $j\omega$) (1) aufweist, erhalten wir

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_y = 0.$$

Betrachten wir zunächst die partiellen Ableitungen separat:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial \rho} \right) = \underline{E}_{y,0} \exp(j\ell\varphi) \exp(j(\omega t - k_z z)) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial \varphi^2} = \frac{(j\ell)^2}{\rho^2} \underline{E}_{y,0} R(\rho) \exp(j\ell\varphi) \exp(j(\omega t - k_z z)) = -\frac{\ell^2}{\rho^2} \underline{E}_y \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} = (-jk_z)^2 \underline{E}_{y,0} R(\rho) \exp(j\ell\varphi) \exp(j(\omega t - k_z z)) = -k_z^2 \underline{E}_y. \quad (1)$$

Setzen wir die einzelnen Ableitungen in die Wellengleichung ein und klammern soweit möglich aus, erhalten wir ((1) für korrektes Einsetzen, (1) für Vereinfachen, letzter Schritt nicht erforderlich)

$$\begin{aligned} \underline{E}_{y,0} \exp(j\ell\varphi) \exp(j(\omega t - k_z z)) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left(k^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R(\rho) \right) &= 0 \\ \iff \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left(k^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R(\rho) &= 0 \\ \iff \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \left((k^2 - k_z^2) \rho^2 - \ell^2 \right) R(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Gesamt: 6 Punkte

- d) Da die Wellenzahlen k im Kern und im Mantel verschieden sind, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

$$\begin{cases} \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \left((n_1^2 k_0^2 - k_z^2) \rho^2 - \ell^2 \right) R(\rho) = 0 & \rho \leq a \\ \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + \left((n_2^2 k_0^2 - k_z^2) \rho^2 - \ell^2 \right) R(\rho) = 0 & \rho > a \end{cases}.$$

Führen wir nun die Variablen $\beta_t^2 = n_1^2 k_0^2 - k_z^2$ und $\alpha_t^2 = k_z^2 - n_2^2 k_0^2$ ein (je (1) für korrektes Einsetzen gemäß Fallunterscheidung), erhalten wir im Kern für $R(\rho)$ die Besselsche und im Mantel die modifizierte Besselsche Differenzialgleichung ((0.5) je korrekter resultierender DGL):

$$\begin{cases} \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + (\beta_t^2 \rho^2 - \ell^2) R(\rho) = 0 & \rho \leq a \\ \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} - (\alpha_t^2 \rho^2 + \ell^2) R(\rho) = 0 & \rho > a \end{cases}.$$

Gesamt: 3 Punkte

- e) Die Lösungen im Faserkern bzw. im Mantel müssen für alle $\rho \leq a$ bzw. $\rho > a$ physikalisch sinnvoll sein, d.h. sie müssen endliche Energie aufweisen. Folglich stellen im Kern nur die Besselfunktionen erster Gattung, d.h. $J_\ell(\beta_t \rho)$, sinnvolle Lösungen dar (1), da die Besselfunktionen zweiter Gattung bei $\rho = 0$ eine Singularität haben (0.5). Im Mantel stellen hingegen nur die modifizierten Besselfunktionen zweiter Gattung, d.h. $K_\ell(\alpha_t \rho)$ sinnvolle Lösungen dar (1), da die modifizierten Besselfunktionen erster Gattung für große ρ divergieren (0.5).

Gesamt: 3 Punkte

- f) Auf Basis der Überlegungen in e) wählen wir folgenden Ansatz für $\underline{E}_y$ (1) (Faktoren A und B bzw. zumindest einer davon entscheidend!):

$$\underline{E}_y(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_{y,0} \exp(j \ell \varphi) \exp(j(\omega t - k_z z)) \begin{cases} A J_\ell(\beta_t \rho) & \rho \leq a \\ B K_\ell(\alpha_t \rho) & \rho > a \end{cases}.$$

Die y-Komponente des elektrischen Felds kann in Abhängigkeit von φ an der Kern-Mantel-Grenzfläche Tangential- oder Normalkomponente sein. Jedoch gehen wir von dem Fall schwacher Führung aus, weshalb die Tangential- und Normalkomponenten des elektrischen Felds näherungsweise stetig sind. Daher muss auch $\underline{E}_y$ in $\rho = a$ stetig sein (1). Dementsprechend fordern wir

$$A J_\ell(\beta_t a) = B K_\ell(\alpha_t a),$$

was z.B. für $1/A = J_\ell(\beta_t a)$ und $1/B = K_\ell(\alpha_t a)$ erfüllt ist. $\underline{E}_y$ drücken wir dementsprechend folgendermaßen aus (1)

$$\underline{E}_y(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_{y,0} \exp(j \ell \varphi) \exp(j(\omega t - k_z z)) \begin{cases} \frac{J_\ell(\beta_t \rho)}{J_\ell(\beta_t a)} & \rho \leq a \\ \frac{K_\ell(\alpha_t \rho)}{K_\ell(\alpha_t a)} & \rho > a \end{cases}.$$

Die longitudinalen und transversalen Ausbreitungskonstanten sind allerdings weiterhin unbestimmt. Diese können nur mithilfe einer weiteren Stetigkeitsbedingung, etwa der der Tangentialkomponente $\underline{E}_z$ ermittelt werden (1).

Gesamt: 4 Punkte

- g) Mit $V = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ erhalten wir im Fall von $\lambda_1 = 1,55 \mu\text{m}$ $V \approx 1,069$ (1) und für $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$ $V \approx 4,141$ (1). Bei $\lambda = \lambda_1$ ist also ausschließlich die LP_{01} -Mode, d.h. nur eine einzige Mode, ausbreitungsfähig (1). Bei $\lambda = \lambda_2$ sind hingegen die LP_{01} -, LP_{11} -, LP_{21} - und LP_{02} -Mode ausbreitungsfähig. Da die Moden mit $\ell > 0$ zweifach entartet sind, sind also insgesamt sechs Moden ausbreitungsfähig (1).

Gesamt: 4 Punkte