Elektromagnetische Wellen

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel

Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Photonik und Quantenelektronik

Wintersemester 2019/20

Vorlesungskalender

#	Datum	Themen
1.	16.10.2019	Die Maxwellschen Gleichungen, Sonderfälle
2.	23.10.2019	Die Wellengleichung, Ebene Wellen
3.	30.10.2019	Zeitharmonische Felder, Poynting Vektor
4.	06.11.2019	Zeitharmonische Wellen, Polarisation
5.	13.11.2019	Stetigkeitsbedingungen, Reflexion und Brechung
6.	20.11.2019	
7.	27.11.2019	
8.	04.12.2019	
9.	11.12.2019	
10.	18.12.2019	
11.	08.01.2020	
12.	15.01.2020	
13.	22.01.2020	
14.	29.01.2020	
15.	05.02.2020	

Vorlesungstermin: Mittwoch 8:00 – 9:30, Gebäude 30.10, NTI Hörsaal

Literatur

- Heino Henke, *Elektromagnetische Felder*, Springer, 2015 *
- Wolfgang Mathis und Albrecht Reibinger, *Küpfmüller Theoretische Elektrotechnik : Elektromagnetische Felder, Schaltungen und elektronische Bauelemente*, 20. Auflage, Springer Vieweg, Berlin und Heidelberg, 2017 *
- John David Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 5. Auflage, De Gruyter, Berlin [u.a.], 2014.

* Unter bibliothek.kit.edu als pdf verfügbar

Die Maxwellschen Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen

- In Integralform lauten die Maxwellschen Gleichungen:

$$\oint_s \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_F \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial t}\int_F \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} \qquad (I) \qquad \textit{Durchflutungsgesetz}$$

$$\oint_s \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_F \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} \qquad (II) \qquad \textit{Induktionsgesetz}$$

$$\oint_O \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V \qquad (III) \qquad \textit{Gaußsches Gesetz}$$

$$\oint_O \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = 0 \qquad (IV)$$

Physikalische Größen

- Die Maxwellschen Gleichungen verknüpfen die folgenden physikalischen Größen:

magnetische Feldstärke	$\mathbf{H}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
elektrische Feldstärke	$\mathbf{E}$	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
Verschiebungsstromdichte	$\mathbf{D}$	$\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^2}$
magnetische Flussdichte	$\mathbf{B}$	$\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2}$
Stromdichte	$\mathbf{J}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$
Raumladungsdichte	ρ	$\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^3}$

Der Nabla Operator

- Mit Hilfe des Nabla Operators ∇ können die Operationen der Vektorrechnung geschrieben werden als

$$\operatorname{grad}(\phi) = \nabla\phi, \quad \operatorname{div}(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad \text{bzw. } \operatorname{rot}(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Der Nabla Operator kann als vektorielle Rechengröße betrachtet werden, deren Elemente an das jeweilige Koordinatensystem angepasst werden müssen (Wichtig!). Nur im kartesischen Koordinatensystem gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Allgemein gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla\phi) &= 0 & \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) &= (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi\nabla \cdot \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 & \nabla \times (\phi\mathbf{A}) &= (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi\nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Der Laplace Operator

- Angewendet auf ein Skalarfeld ϕ ist der Laplace Operator gegeben als

$$\Delta\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = (\nabla \cdot \nabla)\,\phi = \nabla^2\phi$$

- Im Unterschied zum Nabla Operator, kann der Laplace Operator als skalare Rechengröße betrachtet werden. Im kartesischen Koordinatensystem gilt z.B.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Angewendet auf ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ wird der Laplace Operator auf jede Feldkomponente separat angewendet.
- Allgemein gilt die Rechenregel

$$\Delta\mathbf{A} = \nabla^2\mathbf{A} = \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Integralsätze der Vektorrechnung

- Der **Gaußsche Integralsatz** besagt, dass das Volumenintegral der Divergenz eines Vektorfeldes gleich dem Flächenintegral des Vektorfeldes über die geschlossene Oberfläche O des Volumens V ist. D.h.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V = \oint_O \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F}$$

- Der **Stokessche Integralsatz** besagt, dass das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes gleich dem Linienintegral des Vektorfeldes längs des Randes s der Fläche F ist. D.h.

$$\int_F \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Die Maxwellschen Gleichungen

- In differentieller Form lauten die Maxwellschen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && (I) && \textit{Durchflutungsgesetz} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (II) && \textit{Induktionsgesetz} \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho && (III) && \textit{Gaußsches Gesetz} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (IV) &&
\end{aligned}
$$

- Mittels der Integralsätze können sie direkt in ihre Integralform überführt werden.

Materialgleichungen

- Für die Verschiebungsstromdichte gilt in den meisten Stoffen für das Polarisationsfeld $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_\mathrm{e} \mathbf{E}$ und somit

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_\mathrm{e} \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_\mathrm{r} \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

- In isotropen dia- und paramagnetischen Stoffen gilt für die Magnetisierung durch atomare Ringströme $\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m} \mathbf{H}$ und somit

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \mathbf{M} \right) = \mu_0 \left(1 + \chi_\mathrm{m} \right) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_\mathrm{r} \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

elektrische Suszeptibilität	χ_e
Vakuumpermittivität	$\varepsilon_0 = 8,8541878128(13) \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}$
Relative Permittivität	ε_r
magnetische Suszeptibilität	χ_m
Vakuumpermeabilität	$\mu_0 = 1,25663706212(19) \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$
Relative Permittivität	μ_r

Weitere wichtige Gleichungen

- Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$ lassen sich über die Kraftgesetze $\mathbf{F}_\mathrm{e} = Q\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}_\mathrm{m} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ direkt experimentell bestimmen.
- Die Quellen des elektrischen und des magnetischen Feldes, die Raumladungsdichte ρ und die Stromdichte $\mathbf{J}$ hängen über die Kontinuitätsgleichung zusammen gemäß

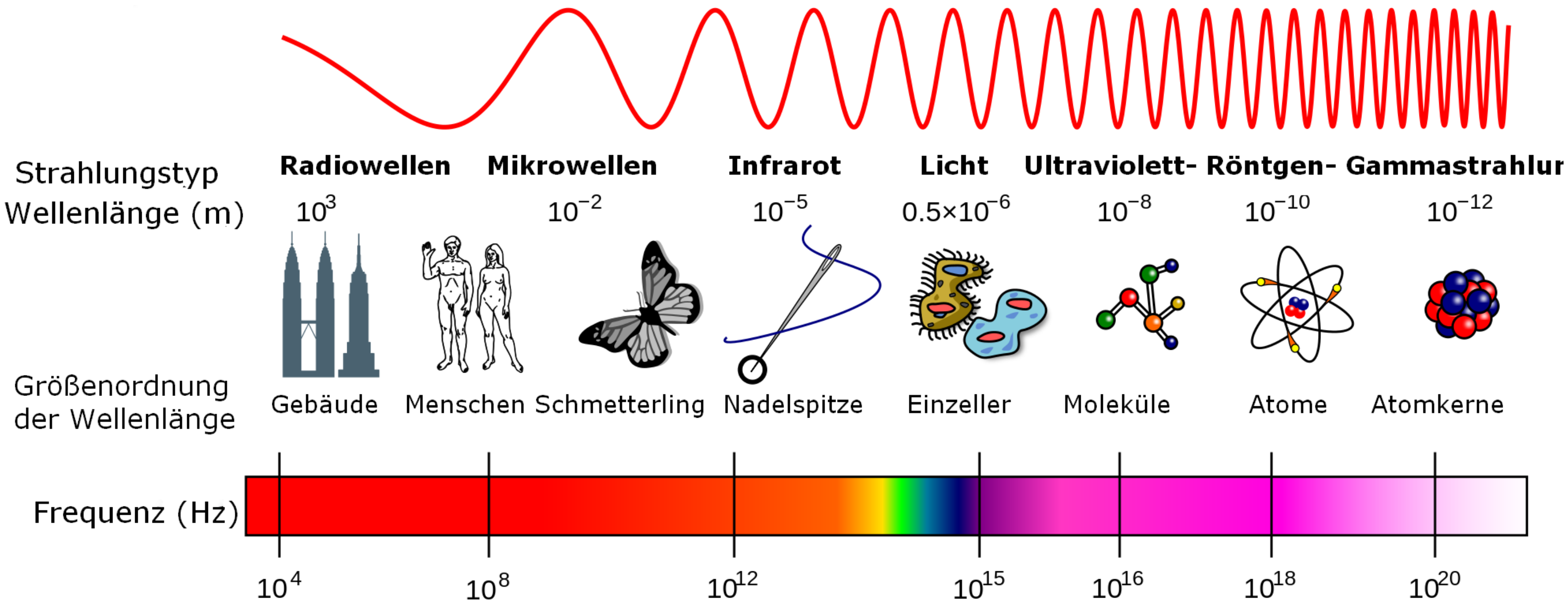
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Die Leitfähigkeit eines Mediums wird mit κ bezeichnet. Sie hängt von der Konzentration und Beweglichkeit der freien Ladungsträger ab. Den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feldstärke beschreibt das *Ohmsche Gesetz*

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$$

Gültigkeitsbereich

- Die Maxwellgleichungen beschreiben sämtliche makroskopischen Phänomene. Sie gelten über den gesamten Frequenzbereich (bzw. den Wellenlängenbereich $\lambda = c_0/f$)



- Nicht gültig sind die Gleichungen im mikroskopischen (atomaren) Bereich. Hier sind die Vorgänge quantisiert und nicht kontinuierlich. Man spricht daher auch von der klassischen maxwellschen Theorie.

Anwendungsbereiche (I)

- **Niederfrequenzen (3 Hz – 30 kHz):** Wechselstrom (50 Hz) zum Antrieb von Maschinen bzw. zur Übertragung elektrischer Energie, Telefonleitung
- **Radiowellen (30 kHz – 3 GHz):** Funkübertragung (Fernsehen, Radio, Flugfunk, Seefunk, Amateurfunk), MRT, Messtechnik, RFID
- **Mikrowellen (3 GHz – 300 GHz):** Funkübertragung (Mobilfunk, WLAN, Satellitenverbindungen, Punkt-zu-Punkt), Navigation (GPS), Mikrowellenherd, Radar, Spektroskopie, Hohlleiter
- **Terahertzstrahlung (300 GHz – 3 THz):** Ganzkörperscanner
- ...

Anwendungsbereiche (II)

- **Infrarotstrahlung (3 THz – 385 THz):** Wärmestrahlung (Heizung), optische Kommunikationstechnik, Lasertechnik, Spektroskopie, Astronomie, Materialphysik, Fernbedienung
- **Sichtbares Licht (385 THz – 789 THz):** Beleuchtung, Visible Light Communications, Solarzellen, Photosynthese, u.v.m.
- **UV-Strahlung (789 THz – 30 PHz):** Hautbräunung, Spektroskopie, Materialphysik, Fluoreszenz und Phosphoreszenz, Schwarzlicht
- **Röntgenstrahlung (30 PHz – 30 EHz):** Medizintechnik (CT, Krebstherapie), Werkstoffprüfung, Materialphysik
- **Gammastrahlung ($>$ 30 EHz)**

Sonderfälle

Elektrostatik

- Die Elektrostatik kann als ein Sonderfall der Maxwellschen Theorie betrachtet werden, bei dem alle involvierten Größen zeitunabhängig sind (d.h. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$) und alle Ströme verschwinden (d.h. $\mathbf{J} = 0$).
- Für das Elektrische Feld folgt aus den Maxwell Gleichungen $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Ferner gelte $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.
- Die elektrische Feldstärke lässt sich ableiten aus dem skalaren Potential ϕ ensprechend der Beziehung $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.
- Damit gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla\epsilon\phi - \epsilon\nabla \cdot (\nabla\phi) = \rho$$

- Daraus resultiert nach einfacher Umformung die Poisson Gleichung

$$\Delta\phi + \frac{1}{\epsilon}\nabla\epsilon\nabla\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Stationäres Strömungsfeld (I)

- In leitfähigen Materialien erzeugt jedes elektrische Feld eine Stromdichte $\mathbf{J}$. Es gelte dabei weiterhin $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.
- Die Maxwell Gleichungen werden zu $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Ferner gelte $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Ferner gelte $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$.
- Da $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ folgt somit $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Mit $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ gilt also

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = -\nabla \kappa \phi - \kappa \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$$

- Daraus resultiert nach einfacher Umformung die Laplace Gleichung

$$\Delta \phi + \frac{1}{\kappa} \nabla \kappa \nabla \phi = 0$$

Stationäres Strömungsfeld (II)

- Die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$ lässt sich über die Hilfsgröße des magnetischen Vektorpotentials $\mathbf{A}$ darstellen als $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Man beachte, dass wegen $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ die Maxwell Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ für beliebige $\mathbf{A}$ erfüllt ist. Die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{A}$ kann somit frei gewählt bzw. geeicht werden.
- Für $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ und ein räumlich konstantes μ folgt

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu} \Delta \mathbf{A} = \mathbf{J}$$

- Wählen wir nun mit $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ die sogenannte Coulomb Eichung, so folgt

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

- Die Quelle von $\mathbf{A}$ und somit von $\mathbf{B}$ ist also die Stromdichte $\mathbf{J}$.

Langsam veränderliche Felder (I)

- In vielen Anwendungsfällen kann die Verschiebunsströmdichte $\partial \mathbf{D}/\partial t$ gegenüber der Stromdichte $\mathbf{J}$ vernachlässigt werden.
- In raumladungsfreien Medien mit $\rho = 0$ gilt nun $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.
- Betrachten wir wiederum $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ so gilt

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

- Diese Gleichung wird erfüllt, wenn die elektrische Feldstärke gegeben ist als

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Langsam veränderliche Felder (II)

- Für $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ und ein räumlich konstantes μ folgt

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{\mu}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu}\Delta\mathbf{A} = \mathbf{J}$$
$$= \kappa\mathbf{E} = -\kappa\nabla\phi - \kappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

- Mit der Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\kappa\phi$ gilt somit die Diffusionsgleichung

$$\Delta\mathbf{A} - \mu\kappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 0$$

- Zusätzlich muss für das elektrische Feld gelten

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla \cdot \left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\varepsilon\Delta\phi + \varepsilon\mu\kappa\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

- Somit muss für das elektrische Potential gelten

$$\Delta\phi - \mu\kappa\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

Beliebig veränderliche Felder (I)

- Für beliebig zeitabhängige Felder gelten in raumladungsfreien Medien mit $\rho = 0$ die Maxwellschen Gleichungen $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D}/\partial t$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.
- Genau wie bei den langsam veränderlichen Feldern erhalten wir mit $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ für die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

- Aus der Rotation der magnetischen Feldstärke resultiert

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{1}{\mu} \Delta \mathbf{A} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= \kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\kappa \nabla \phi - \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Beliebig veränderliche Felder (II)

- Mit der Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\kappa\phi - \mu\varepsilon\partial\phi/\partial t$ erhalten wir die sogenannte Telegraphengleichung

$$\Delta\mathbf{A} - \mu\kappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

  Im Vergleich mit dem Sonderfall der langsam veränderlichen Felder erhalten wir also einen zusätzlichen dritten Term mit der zweiten Ableitung nach der Zeit.

- Für das elektrische Potential folgt aus $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$

$$\Delta\phi - \mu\kappa\frac{\partial\phi}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

- Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt werden kann bzw. wann sie berücksichtigt werden muss?

Relaxationszeit I

- Aus der Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$, welche aus dem Prinzip der Erhaltung von Ladungen folgt, ergibt sich mit $\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E}$ und $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ und $\nabla\kappa = 0$ und $\nabla\varepsilon = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \kappa\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\kappa}{\varepsilon}\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\kappa}{\varepsilon}\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

- woraus folgt, dass

$$\rho + \frac{\varepsilon}{\kappa}\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

- Diese Gleichung hat die Lösung

$$\rho(t) = \rho(t=0)\,\mathrm{e}^{-t/T_\mathrm{r}} \quad ,$$

  wobei $T_\mathrm{r} = \varepsilon/\kappa$ die Relaxationszeit angibt, nach welcher eine Ladungsträgeranhäufung um den Faktor $1/\,\mathrm{e}$ abgenommen hat.

Relaxationszeit II

- Mit Hilfe der Relaxationszeit können wir die Telegraphengleichung (z.B. für das magnetische Vektorpotential) schreiben als

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\varepsilon \left(\frac{1}{T_\mathrm{r}} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$$

- Für langsam veränderliche Felder gilt $1/T_\mathrm{r} \gg \partial/\partial t$ und die zweite Ableitung nach der Zeit kann vernachlässigt werden.
- Die Relaxationszeit für ausgewählte Materialien:

Silber	$1,4 \cdot 10^{-19}$ Sekunden	guter Leiter
Kupfer	$1,5 \cdot 10^{-19}$ Sekunden	guter Leiter
H_20	10^{-6} Sekunden	schlechter Leiter
Teflon	30 Minuten	Isolator

- In den meisten metallischen Medien kann die Verschiebungsstromdichte also vernachlässigt werden.

Die Wellengleichung

Maxwell-Gleichungen in linearen, homogenen Medien

- In linearen Medien gelten die Materialgleichungen:
  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ und $\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E}$.
- Ist ein Medium zudem räumlich homogen, so gilt:
  $\nabla\varepsilon = 0$, $\nabla\mu = 0$ und $\nabla\kappa = 0$.
- Ist es auch noch zeitlich homogen, so gilt außerdem:
  $\partial\varepsilon/\partial t = 0$, $\partial\mu/\partial t = 0$ und $\partial\kappa/\partial t = 0$.
- In linearen, homogenen Medien ergeben sich die Maxwellschen Gleichungen somit zu:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \kappa\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad (I) \qquad \textit{Durchflutungsgesetz}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad (II) \qquad \textit{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (III) \qquad \textit{Gaußsches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad (IV)$$

Die Wellengleichung I

- Nehmen wir nun ein lineares, homogenes Medium an und bilden zunächst die Rotation über das Induktionsgesetz, so erhalten wir mit dem Durchflutungsgesetz

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$
$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

- Nehmen wir nun ferner ein nichtleitendes ($\kappa = 0$) und raumladungsfreies ($\rho = 0$) Medium an, so erhalten wir mit

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke.

Die Wellengleichung II

- Bilden wir nun die Rotation über das Durchflutungsgesetz, so erhalten wir im nichtleitenden, linearen und homogenen Medium mit Hilfe des Induktionsgesetzes

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

- Daraus resultiert mit

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

die Wellengleichung für die magnetische Feldstärke.

Ebene Wellen

Ebene Wellen I

- Lösungen der Wellengleichung, bei denen Betrag und Richtung des elektromagnetischen Feldes allein von einer kartesischen Koordinate und der Zeit abhängen, werden als ebene Wellen bezeichnet.
- Beispielsweise ergibt sich mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t)$ und $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t)$ für ein homogenes, nichtleitendes und raumladungsfreies Medium

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{1}$$

und

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Ebene Wellen II

- Da bei ebenen Wellen sich die Ableitungen der Feldkomponenten nach x und y zu Null ergeben, erhalten wir zwei jeweils unabhängige Paare gekoppelter Differentialgleichungen

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

- Leiten wir diese nach z bzw. t ab, so ergeben sich nach gegenseitigem Einsetzen die skalaren Wellengleichungen

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial^2 z} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_x}{\partial^2 z} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 z} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

- Während einerseits die Feldkomponenten H_y und E_x miteinander verknüpft sind, ergibt sich eine entsprechende Verknüpfung von H_x und $-E_y$.

Lösungsansatz nach d'Alembert I

- Nach d'Alembert hat die skalare Wellengleichung z.B. für H_y, eine Lösung der Form

$$H_y = f(z - ct) + g(z + ct)$$

wobei f und g zwei beliebige zweifach differenzierbare Funktionen sind und $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

- Beweisen lässt sich dies mit Hilfe der Ableitungen

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = f' + g' \qquad \frac{\partial^2 H_y}{\partial^2 z} = -cf' + cg'$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = f'' + g'' \qquad \frac{\partial^2 H_y}{\partial^2 t} = c^2 f'' + c^2 g''$$

Lösungsansatz nach d'Alembert II

- Entsprechend folgt für E_x

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \mu c \left(f' - g' \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(f' + g' \right)$$

- Nach Integration über z bzw. über t ergibt sich

$$E_x = \mu c \left(f - g \right) + F(t) \quad \text{und} \quad E_x = \frac{1}{\varepsilon c} \left(f - g \right) + G(z)$$

wobei die Integrationskonstanten $F(t)$ und $G(z)$ gleich (und somit konstant) sein müssen. Da wir hier jedoch nicht an statischen Feldern interessiert sind, können wir $F(t) = G(z) = 0$ annehmen.

- Wir erhalten also folgende Lösung der gekoppelten Wellengleichungen für H_y und E_x:

$$H_y = f(z - ct) + g(z + ct) \quad \text{und} \quad E_x = Z f(z - ct) - Z g(z + ct)$$

wobei $Z = \sqrt{\mu / \varepsilon}$ als Wellenwiderstand bezeichnet wird.

Lichtgeschwindigkeit und Wellenwiderstand

- Im Vakuum werden die elektrische und die magnetische Feldkonstante zu

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,8541878128(13) \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}$$
$$\mu = \mu_0 = 1,25663706212(19) \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \approx 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$$

- Daraus folgt für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx \left(\frac{4\pi}{36\pi} \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

und für den Wellenwiderstand im Vakuum

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx \left(4\pi \cdot 36\pi \cdot 10^{2}\,\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{A}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 120\pi\,\Omega \approx 377\,\Omega$$

Ausbreitung von ebenen Wellen I

- Betrachten wir weiterhin ebene Wellen mit $H_y = f(z - ct) + g(z + ct)$. Für Punkte konstanten Arguments für f bzw. für g, also für $z \mp ct =$ const. ergibt sich nach Umstellen und Differentiation nach der Zeit die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z = \pm c$$

- Die bedeutet, dass sich die Lösung zusammensetzt aus einer ebenen Welle mit den Feldkomponenten $H_y^+ = f(z - ct)$ und $E_x^+ = Zf(z - ct)$, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit in $+z$-Richtung ausbreitet und einer ebenen Welle mit den Feldkomponenten $H_y^- = g(z + ct)$ und $E_x^- = -Zg(z + ct)$, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit in $-z$-Richtung ausbreitet.

Ausbreitung von ebenen Wellen II

- Die Vektorfelder $\mathbf{E}^+ = \begin{pmatrix} E_x^+(z,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{H}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y^+(z,t) \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie der Einheitsvektor $\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben ein Rechtsschraubensystem.
- Gleiches gilt für $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$, und $-\mathbf{e}_z$.
- Allgemein lässt sich schreiben:

$$\mathbf{E} = Z\left(\mathbf{H} \times \mathbf{e}_a\right) \ ,$$

  wobei der Einheitsvektor $\mathbf{e}_a$ die Ausbreitungsrichtung angibt.
- Da $\mathbf{E}$ (und somit $\mathbf{H}$) nur in einer Ebene schwingt, hier die xz-Ebene, nennt man eine solche Welle linear in x-Richtung polarisiert.

Zeitharmonische Felder und Wellen

Fourierreihe I

- Jede reellwertige Funktion $f(t)$ mit der Periode T kannhg angenähert werden durch die Fourierreihe

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_k \cos\left(2\pi n t/T + \varphi_n\right)$$

wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ and $\varphi_n = \arctan\left(b_n/a_n\right)$ und

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(2\pi n t/T\right)\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(2\pi n t/T\right)\mathrm{d}t \tag{4}$$

- Die Funktion $f(t)$ kann also als Überlagerung von N gewichteten zeitharmonischen Schwingungen und ihrem Mittelwert angenähert werden.

Fourierreihe II

- Bei linearen Rechenoperationen kann die Ausgangsgröße bestimmt werden, indem zunächst alle Eingangsgrößen mittels der Fourierreihenentwicklung in ihre zeitharmonischen Komponenten separiert werden. Die Rechenoperation wird nun komponentenweise angewendet. Die Überlagerung der einzelnen Ausgangskomponenten ergibt dann die Ausgangsgröße.
- Bei nicht periodischen Funktionen kann anstelle der Fourier Reihe die Fourier Transformation angewendet werden.

Komplexe Zeigerschreibweise

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ lässt sich beispielsweise das elektrische Vektorfeld separieren in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

  wobei der Vektor $\mathbf{r}$ den Ortsvektor in einem gegebenen Koordinatensystem darstellt.
- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den obigen Ausdruck mittels des komplexen Zeigers darzustellen:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t + \varphi\right]\right)$$

  Dabei zeigt der Unterstrich an, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.
- Es gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.}\right]$, wobei der Ausdruck c.c. für den komplex konjugierten Term (engl. "complex conjugate") steht.

Maxwell-Gleichungen für komplexe Zeiger

- Die Maxwellschen Gleichungen können mit Hilfe der komplexen Zeiger $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ und $\underline{\rho}(\mathbf{r},t)$ geschrieben werden.
- Für die Ableitungen von $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ und $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ nach der Zeit erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\,\omega\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\,\omega\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$$

- Damit lassen sich die Maxwellschen Gleichungen für lineare, homogene Medien schreiben als

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{j}\,\omega\epsilon\left(1-\mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) && (I) && \textit{Durchflutungsgesetz}\\
\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) &= -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) && (II) && \textit{Induktionsgesetz}\\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\epsilon}\underline{\rho}(\mathbf{r},t) && (III) && \textit{Gaußsches Gesetz}\\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) &= 0 && (IV) &&
\end{aligned}$$

Komplexe Amplitudenschreibweise

- Die komplexe Zeigerschreibweise für zeitharmonische Größen lässt sich noch weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit nur noch durch die gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ impliziert wird. Wir können den Komplexen Zeiger dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}[\omega t + \varphi]) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

  wobei $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\,\varphi)$ die komplexe Amplitude bezogen auf die Frequenz ω angibt.

- Die Maxwell Gleichungen für lineare, homogene Medien gelten also, bezogen auf ω, auch für die komplexen Amplituden (d.h. ohne explizite Zeitabhängigkeit) entsprechend

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= \mathrm{j}\,\omega\epsilon\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) && (I) && \textit{Durchflutungsgesetz}\\
\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) && (II) && \textit{Induktionsgesetz}\\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\epsilon}\underline{\rho}(\mathbf{r}) && (III) && \textit{Gaußsches Gesetz}\\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 && (IV) &&
\end{aligned}$$

Die Helmholtz-Gleichung

- Die Wellengleichungen lassen sich auch für komplexe Zeiger bzw. für komplexe Amplituden (z.B. für $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$) herleiten.
- Dafür wird analog zu den zuvor betrachteten reellwertigen Vektorfeldern die Rotation über das Durchflutungs- bzw. über das Induktionsgesetz gebildet und es ergibt sich für lineare, homogene und raumladungsfreie Medien

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \underline{\mathbf{H}} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{H}} = 0$$

  mit $\underline{k}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)$.
- In dieser Schreibweise wird die Wellengleichung auch Helmholtz-Gleichung genannt.
- $\underline{k}$ wird als Wellenzahl bezeichnet und ist in leitenden Medien komplex.
- In nichtleitenden Medien mit $\kappa = 0$ ist sie hingegen reell und es gilt $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, wobei $\lambda = 2\pi c/\omega$ die Wellenlänge im Medium angibt.

Der Poynting-Vektor

Elektromagnetische Feldenergie

- Elektrische und magnetische Felder speichern Energie (z.B. in einem Plattenkondensator oder in einer Spule).
- Die in einem Volumen V gespeicherte elektrische bzw. magnetische Energie kann bestimmt werden aus

$$W_\mathrm{e} = \int_V w_\mathrm{e}\,\mathrm{d}V \qquad \text{und} \qquad W_\mathrm{m} = \int_V w_\mathrm{m}\,\mathrm{d}V$$

- Dabei sind w_e und w_m auf das Volumen bezogene Energiedichten die bestimmt werden können aus

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \qquad \text{und} \qquad w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$$

- Die gesamte elektromagnetische Feldenergie ergibt sich als Summe der elektrischen und der magnetischen Feldenergie zu

$$W_\mathrm{em} = W_\mathrm{e} + W_\mathrm{m} \qquad \text{und} \qquad w_\mathrm{em} = w_\mathrm{e} + w_\mathrm{m}$$

Der Satz von Poynting (I)

- Der *Satz von Poynting* besagt, dass jede Änderung $\mathrm{d}W_{\mathrm{em}}$ der in einem Volumen V gespeicherten elektromagnetischen Feldenergie in einem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ beschrieben werden kann als

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{em}} = -\underbrace{\int_O \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{O}\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{durch die Hüllfläche } O\\ \text{abgestrahlte Feldenergie}}} - \underbrace{\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{in Wärmeenergie}\\ \text{umgewandelte Feldenergie}\\ \text{(d.h. Ohmsche Verluste)}}} \tag{5}$$

- Der Vektor $\mathbf{S}$ wird hierbei als *Poynting Vektor* bezeichnet. Er beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten elektromagnetischen Feldenergie. Er hat somit die Einheit $\mathrm{W/m^2}$.

Der Satz von Poynting (II)

- Bezogen auf das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ lässt sich der *Satz von Poynting* auch als Leistungsbilanz ausdrücken:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} = -\int_O \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{O} - \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V \tag{6}$$

- Mit Hilfe des Gaußschen Satzes und mittels der Energiedichte ergibt sich daraus;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w_{\mathrm{em}}\,\mathrm{d}V = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{S}\,\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V \tag{7}$$

- Dies lässt sich mit den Energiedichten für das elektrische und das magnetische Feld schreiben als;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) = -\nabla\cdot\mathbf{S} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \tag{8}$$

Der Satz von Poynting (III)

- Mit $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ sowie unter der Annahme, dass ϵ und μ nicht von der Zeit abhängen, lässt sich zeigen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) = \mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

- Aus (8) und (9) ergibt sich somit

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

- Und schließlich mit den Maxwell Gleichungen für die Rotation von **E** und **H**

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{11}$$

Der Poynting-Vektor

- Wird nun die Divergenz auf beiden Seiten der Gleichung weggelassen, so ergibt sich für den *Poynting Vektor*

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{12}$$

- Merke: Der *Poynting-Vektor* **S** beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten Feldenergie.
- Er hat die Einheit $\mathrm{J/s/m^2}$ bzw. $\mathrm{W/m^2}$.

- Bei Feldern mit harmonischer Zeitabhängigkeit und somit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^{*}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right]$$

ergibt sich der Poynting Vektor zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{4}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right] \times \left[\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^{*}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^{*}(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right] \\
&+ \frac{1}{4}\left[\left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\omega t} + \left(\underline{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^{*}(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^{*}(\mathbf{r}) + \left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\omega_0 t}\right\}
\end{aligned}$$

Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (II)

- Im zeitlichen Mittel ergibt sich

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right\}$$

- Somit ist der komplexe Poynting Vektor definiert als

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right]$$

- Real- und Imaginärteil des komplexen Poynting-Vektors geben dabei den Wirk- und den Blindleistungsanteil an.
- Man beachte, dass bei der obigen Herleitung zwei komplexe Zeiger auf nichtlineare Weise verknüpft werden. Es kann daher nicht direkt mit den komplexen Amplituden gerechnet werden!

Zeitharmonische ebene Wellen

Zeitharmonische ebene Wellen (I)

- Für zeitharmonische ebene Wellen in homogenen, linearen Medien erhalten wir für die transversalen Feldkomponenten $\underline{H}_y$ und $\underline{E}_x$ aus den Maxwell-schen Gleichungen die Beziehungen

$$-\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon \left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)\underline{E}_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -\,\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{H}_y$$

- Daraus ergeben sich wiederum die skalaren Helmholtz-Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial z^2} + \underline{k}^2\,\underline{H}_y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + \underline{k}^2\,\underline{E}_x = 0$$

mit der komplexen Wellenzahl

$$\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}}$$

Zeitharmonische ebene Wellen (II)

- Als Lösungen erhalten wir die komplexen Zeiger der Form

$$\underline{H}_y(z,t) = \underline{A}^+ \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + \underline{A}^- \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}$$

  und somit die Überlagerung einer in $+z$- und einer in $-z$-Richtung laufenden Welle.
- Die Konstanten $\underline{A}^+$ und $\underline{A}^-$ ergeben sich aus der jeweiligen Problemstellung.
- Für $\underline{E}_x$ gilt entsprechend

$$\underline{E}_x(z,t) = \underline{Z}\,\underline{A}^+ \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} - \underline{Z}\,\underline{A}^- \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}$$

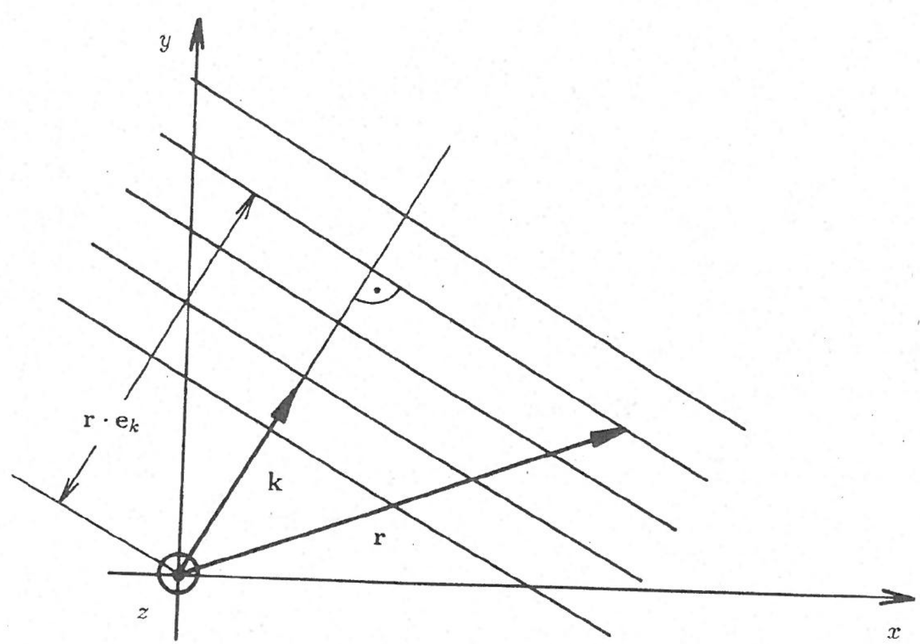
  mit dem komplexen Wellenwiderstand $\underline{Z}$.

Phasenfronten

- Eine ebene Welle kann sich in einer beliebigen Richtung im Raum ausbreiten. Mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_\mathrm{a}$ in Ausbreitungsrichtung, dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ und dem Wellenvektor $\underline{\mathbf{k}} = \underline{k}\mathbf{e}_\mathrm{a}$ gilt

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}} = \underline{Z}\,(\underline{\mathbf{H}} \times \mathbf{e}_\mathrm{a})$$

- Zu einem gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ sind Phasenebenen durch $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \text{const.}$ bestimmt.



Komplexe Wellenzahl I

- Die komplexe Wellenzahl lässt sich in Real- und Imaginärteil separieren

$$\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}} = \pm\left(\beta - \mathrm{j}\,\alpha\right)$$

- Betrachten wir zunächst beliebige reelle Zahlen a, b, c und d mit $a + \mathrm{j}\,b = \pm\sqrt{c + \mathrm{j}\,d}$.
- Sind c und d gegeben, so lassen sich a und b bestimmen aus

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + 1} \quad \text{und} \quad b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - 1}$$

- Beweis an der Tafel.

Komplexe Wellenzahl II

- Angewendet auf die komplexe Wellenzahl $\underline{k} = \pm(\beta - \mathrm{j}\,\alpha)$ erhalten wir demnach mit der Relaxationszeit $T_\mathrm{r} = \varepsilon/\kappa$ die *Phasenkonstante*

$$\beta(\omega) = \pm\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega T_\mathrm{r})^2}}+1}$$

und die *Dämpfungskonstante*

$$\alpha(\omega) = \pm\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega T_\mathrm{r})^2}}-1}$$

welche das exponentielle Ab- oder Aufklingen der Wellenamplitude angibt. Das Vorzeichen von α ist immer so zu wählen, dass die Amplitude der Feldkomponenten bei zunehmender Entfernung von der Quelle abnimmt.

Dispersionsrelation

- Wird der obige Zusammenhang für die Phasenkonstante $\beta(\omega)$ invertiert, so erhalten wir die *Dispersionsrelation*

$$\omega(\beta) = c\frac{2\beta^2}{\sqrt{(2\beta)^2 + \frac{1}{(cT_\mathrm{r})^2}}}$$

- Mit der Materialkonstante

$$\beta_\mathrm{r} = \frac{1}{2c\,T_\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\kappa}{2}}$$

wird diese zu

$$\omega(\beta) = c\frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + \beta_\mathrm{r}^2}}$$

Phasengeschwindigkeit

- Die Geschwindigkeit, mit der sich bei einer ebene Welle $\underline{H}_y(z,t) = \underline{A}^+\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}$ eine konstante Phase $\omega t - \beta z = const.$ 'bewegt', wird als *Phasengeschwindigkeit* bezeichnet. Sie ergibt sich zu

$$v_{\mathrm{ph}}(\beta) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = c\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta_{\mathrm{r}}^2}}$$

  und .

- Nach Einsetzen von $\beta(\omega)$ erhalten wir

$$v_{\mathrm{ph}}(\omega) = c\sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T_{\mathrm{r}})^2}}}}$$

- Für $\omega \gg 1/T_{\mathrm{r}}$ bzw. in nichtleitenden Medien gilt also $\omega T_{\mathrm{r}} \gg 1$ und somit $v_{\mathrm{ph}} = c$
- Für gute Leiter mit $\omega T_{\mathrm{r}} \ll 1$ und somit $v_{\mathrm{ph}} = \sqrt{2\omega T_{\mathrm{r}}}\,c = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\kappa}}$

Gruppengeschwindigkeit

- Für Signale, welche sich aus mehreren Frequenzkomponenten zusammensetzen, breitet sich im Allgemeinen jede Frequenzkomponente mit ihrer eigenen Phasengeschwindigkeit aus. Die Einhüllende (auch Schwebung) dieses Zeitsignals breitet sich mit der *Gruppengeschwindigkeit* aus.
- Diese ergibt sich zu

$$v_{\mathrm{gr}}(\beta) = \frac{\mathrm{d}\omega(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = c\,\frac{\beta^3 + 2\beta_{\mathrm{r}}^2\beta}{(\beta^2+\beta_{\mathrm{r}}^2)^{\frac{3}{2}}} = v_{\mathrm{ph}}(\beta)\left(1 + \frac{\beta_{\mathrm{r}}^2}{\beta^2+\beta_{\mathrm{r}}^2}\right)$$

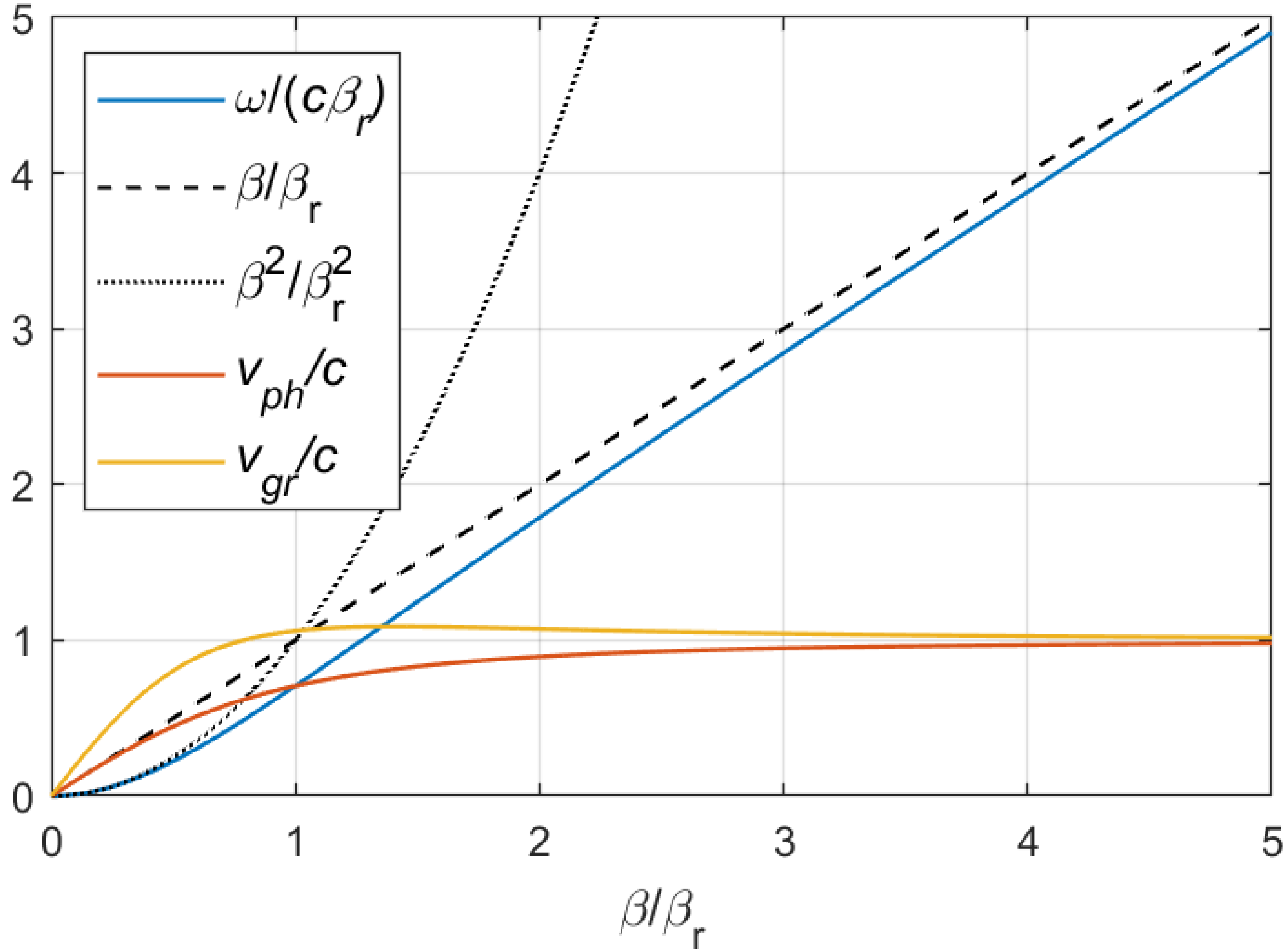
- Nach Einsetzen von $\beta(\omega)$ erhalten wir

$$v_{\mathrm{gr}}(\omega) = v_{\mathrm{ph}}(\omega)\left(1 + \frac{1}{1 + 2\omega^2 T_{\mathrm{r}}^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2 T_{\mathrm{r}}^2}}+1\right)}\right)$$

- Für $\omega \gg 1/T_{\mathrm{r}}$ bzw. in nichtleitenden Medien gilt also $\omega T_{\mathrm{r}} \gg 1$ und somit $v_{\mathrm{gr}} = v_{\mathrm{ph}} = c$. Für gute Leiter gilt hingegen $v_{\mathrm{gr}} = 2v_{\mathrm{ph}}$.

Dispersionsrelation, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

- Normiert für ein Medium mit $\beta_r = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\kappa}{2}}$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \leq c_0$



Polarisation

Polarisation zeitharmonischer ebener Wellen

- Betrachten wir eine sich in z-Richtung ausbreitende zeitharmonische ebene Welle an einem festen Ort, z.B. bei $z = 0$, mit den transversalen Komponenten des elektrischen Feldes

$$E_x(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$E_y(t) = E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

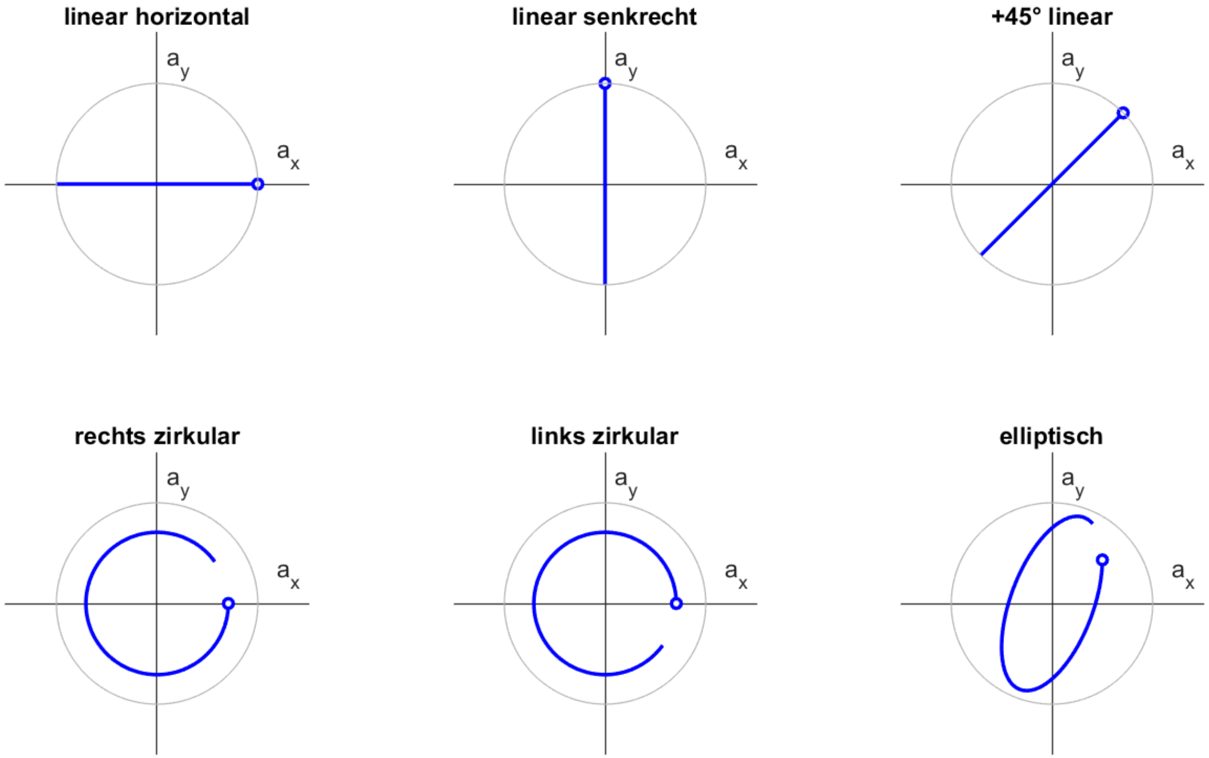
  mit den Amplituden E_x und E_y sowie den Phasen φ_x und φ_y.

- Mit der Normierung $E_0 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ sowie den normierten Amplituden a_x und a_y mit $a_x^2 + a_y^2 = 1$ können wir dies schreiben als

$$E_x(t) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$E_y(t) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Polarisationsellipsen

- Wenn wir nun diese Feldkomponenten über der Zeit in einem XY-Graphen auftragen, so erhalten wir für gegebene Werte von a_x, a_y, φ_x und φ_y sogenannte Polarisationsellipsen.
- Die folgenden Graphen zeigen Beispiele für $\varphi_x = 0$ und $\omega t \in [0; 1,8\pi)$:



Jones-Vektor Darstellung

- In komplexer Zeigerschreibweise lassen sich die transversalen Feldkomponenten darstellen als

$$\underline{E}_x(t) = E_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t + \mathrm{j}\,\varphi_x) = \underline{E}_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = E_0 \underline{a}_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$
$$\underline{E}_y(t) = E_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t + \mathrm{j}\,\varphi_y) = \underline{E}_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = E_0 \underline{a}_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

- Aus den normierten komplexen Amplituden $\underline{a}_x = a_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_x}$ und $\underline{a}_y = a_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_y}$ ergibt sich der Jones Vektor

$$\vec{\underline{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix}$$

- Es gilt aufgrund obiger Normierung $|\underline{a}_x|^2 + |\underline{a}_y|^2 = 1$.

Stokes-Vektor Darstellung

- Für zeitharmonische ebene Wellen ist der Stokes-Vektor gegeben als

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_x \underline{E}_x^* + \underline{E}_y^* \underline{E}_y \\ \underline{E}_x \underline{E}_x^* - \underline{E}_y^* \underline{E}_y \\ \underline{E}_x \underline{E}_y^* + \underline{E}_x^* \underline{E}_y \\ \underline{E}_x \underline{E}_y^* - \underline{E}_x^* \underline{E}_y \end{pmatrix} = |E_0|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ |\underline{a}_x|^2 - |\underline{a}_y|^2 \\ 2\Re\left\{\underline{a}_x \underline{a}_y^*\right\} \\ 2\Im\left\{\underline{a}_x \underline{a}_y^*\right\} \end{pmatrix} = |E_0|^2 \vec{S}'$$

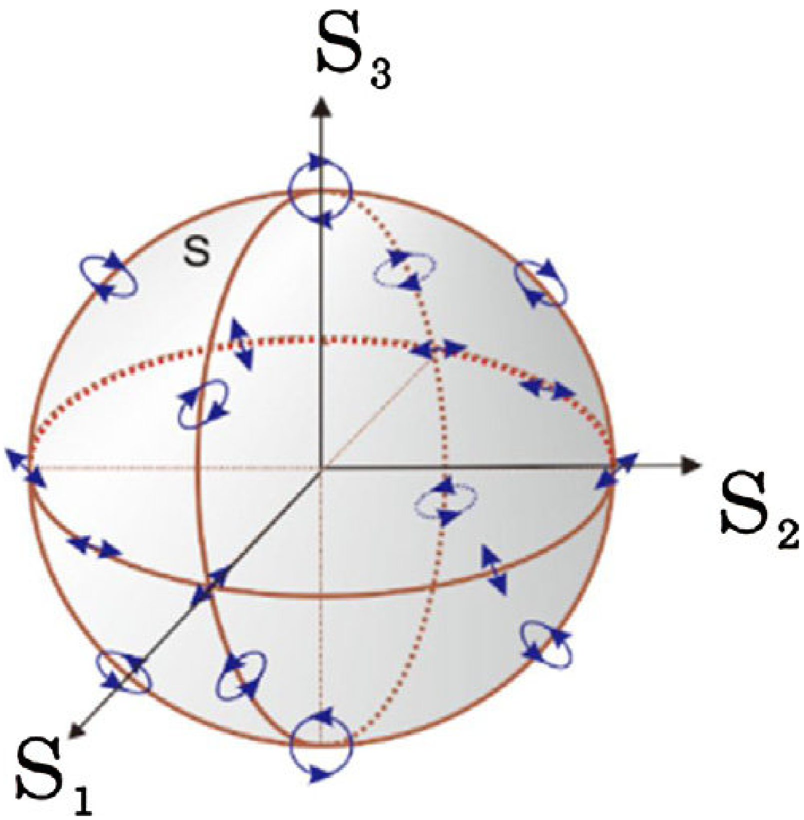
  wobei mit $\vec{S}'$ der normierte Stokes-Vektor eingeführt sei.
- Ebene Wellen mit harmonischer Zeitabhängigkeit sind vollständig polarisiert und es gilt $p = \sqrt{S_1^2 + S_1^2 + S_3^2}/S_0 = 1$.
- Polychromatische ebene Wellen, welche sich als Überlagerung mehrerer zeitharmonischer Wellen ergeben, können auch teilweise polarisiert sein und es gilt im zeitlichen Mittel $0 \leq p \leq 1$.
- *Beispiel*: In der Optik emittiert ein Laser nahezu vollständig polarisiertes Licht, während eine Lichtemittierende Diode (LED) unpolarisiertes Licht abstrahlt.

Polarisationszustände

Polarisationszustand	Jones Vektor ($\varphi_x = 0$)	Stokes Vektor
linear in x-Richtung (parallel)	$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}1 & +1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$
linear in y-Richtung (senkrecht)	$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$
± 45 linear	$\begin{pmatrix}1 & \pm 1\end{pmatrix}^T / \sqrt{2}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & \pm 1 & 0\end{pmatrix}^T$
rechts zirkular	$\begin{pmatrix}1 & \mathrm{j}\end{pmatrix}^T / \sqrt{2}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & +1\end{pmatrix}^T$
rechts zirkular	$\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{j}\end{pmatrix}^T / \sqrt{2}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^T$
elliptisch (Beispiel)	$\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}e^{\mathrm{j}\,\pi/3}\end{pmatrix}^T / 2$	$\begin{pmatrix}1 & -0,5 & 0,433 & 0,75\end{pmatrix}^T$

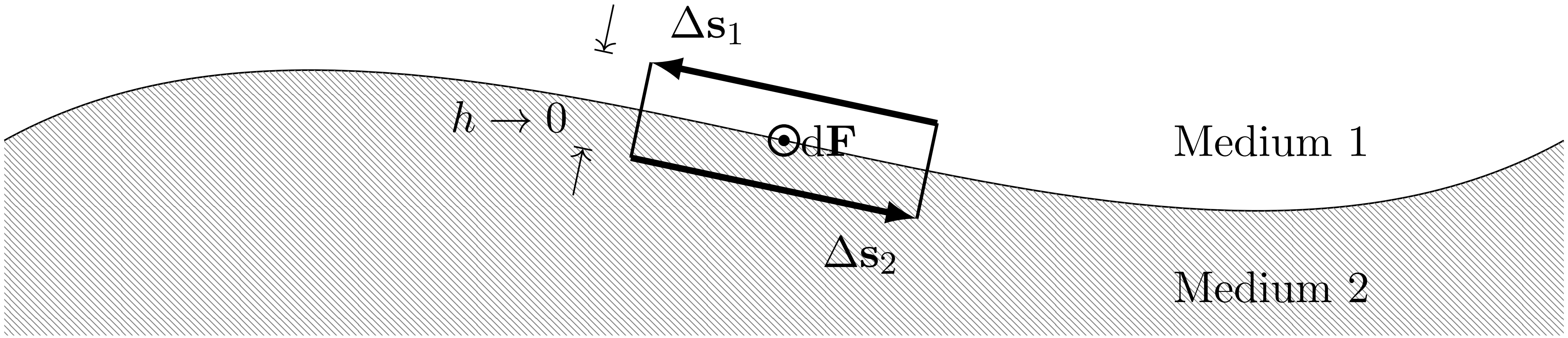
Poincaré-Kugel

- Werden die Elemente S_1, S_2 und S_3 des Stokes-Vektors als kartesische Koordinaten aufgefasst, so werden für vollständig polarisierte Wellen alle möglichen Polarisationszustände auf der Oberfläche der Poincaré-Kugel abgebildet.



Rand- und Stetigkeitsbedingungen

Stetigkeit der tangentialen Feldkomponeten



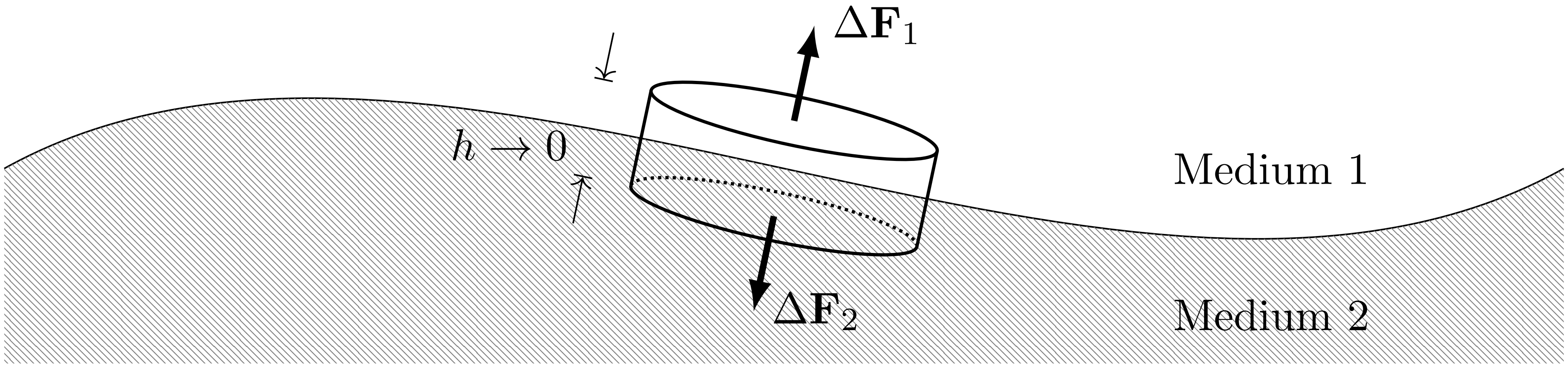
- Wegen $h \to 0$ verschwindet die Verschiedungsstromdichte und der magnetische Fluss. Es gilt entsprechend obiger Abbildung

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = \int_F \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = i'\Delta s \quad \Rightarrow \quad H_{\mathrm{t},1} - H_{\mathrm{t},2} = i'$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{t},1} - E_{\mathrm{t},2} = 0$$

- Hierbei sind $H_{\mathrm{t},1}$, $E_{\mathrm{t},1}$ und $H_{\mathrm{t},2}$, $E_{\mathrm{t},2}$ die tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1 bzw. Medium 2 und i' bezeichnet einen möglichen Oberflächenstrom (bzw. Strombelag).

Stetigkeit der normalen Feldkomponeten



- Es gilt entsprechend obiger Abbildung

$$\oint_O \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = \int_V \rho \cdot \mathrm{d}V = \sigma \Delta F \Rightarrow D_{\mathrm{n},1} - D_{\mathrm{n},2} = \sigma$$

$$\oint_O \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = 0 \qquad \Rightarrow B_{\mathrm{n},1} - B_{\mathrm{n},2} = 0$$

- Hierbei sind $D_{\mathrm{n},1}$, $B_{\mathrm{n},1}$ und $D_{\mathrm{n},2}$, $B_{\mathrm{n},2}$ die normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1 bzw. Medium 2 und σ bezeichnet eine mögliche Oberflächenladungsdichte.

Randbedingungen

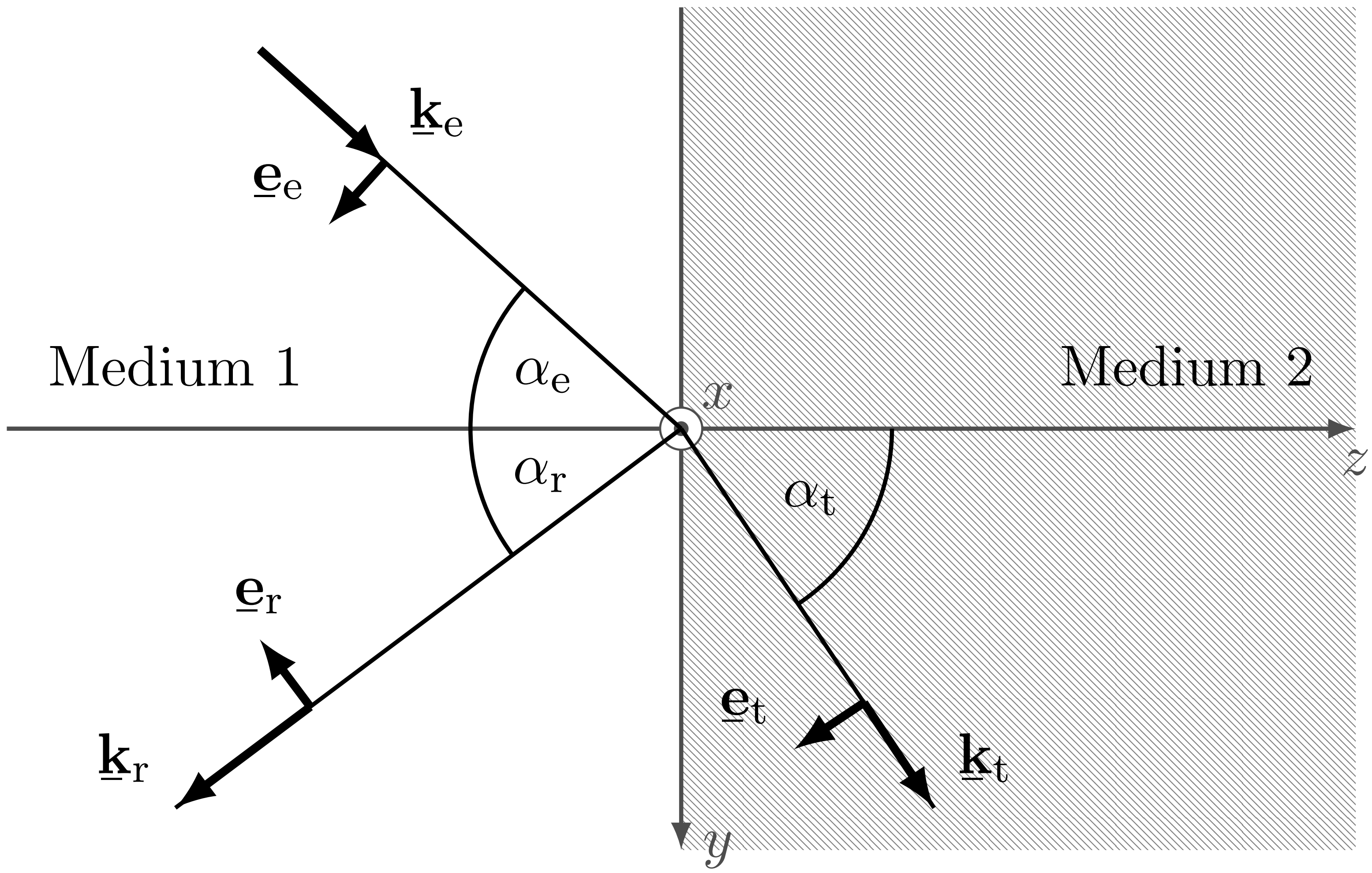
- Ist Medium 2 ideal leitend (d.h. $\kappa \to \infty$ bzw. $T_\mathrm{r} \to 0$, so verschwinden die Felder und die oben beschriebenen Stetigkeitsbedingungen werden zu

$$H_{\mathrm{t},1} = i' \,, \qquad E_{\mathrm{t},1} = 0 \,, \qquad D_{\mathrm{n},1} = \sigma \,, \qquad B_{\mathrm{n},1} = 0$$

  In diesem Fall werden die Stetigkeitsbedingungen auch als Randbedingungen bezeichnet.

Reflexion und Brechung ebener Wellen

Reflexion und Brechung



Ebene Wellen

- Betrachtet sei eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der xy-Ebene liegenden Grenzfläche in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.
- In komplexer Zeigerschreibweise haben die ebenen Wellen die Form

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{e}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{e},0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_\mathrm{e} t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{e}\mathbf{r})} \qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{e}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{e}}\left[\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{e}(\mathbf{r},t)\right]$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r},0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_\mathrm{r} t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{r}\mathbf{r})} \qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{r}}\left[\mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(\mathbf{r},t)\right]$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t},0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_\mathrm{t} t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{t}\mathbf{r})} \qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\left[\mathbf{e}_{k,\mathrm{t}} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t}(\mathbf{r},t)\right]$$

- Dabei ist die einfallende Welle durch ihren Amplitudenvektor $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{e},0}$, ihre Kreisfrequenz ω_e, ihren Wellenvektor $\underline{\mathbf{k}}_\mathrm{e}$ mit Ausbreitungsrichtung $\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}}$ und den komplexen Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{e}$ gegeben.
- Die entsprechenden Größen der reflektierten und der transmittierten Welle sollen für gegebene Medien abgeleitet werden.

Wellenvektoren

- Bei gegebener Kreisfrequenz ω sind die Medien charakterisiert durch ihre komplexen Wellenzahlen

$$\underline{k}_1 = \pm\sqrt{\omega^2\mu_1\varepsilon_1\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa_1}{\omega\varepsilon_1}\right)} \quad \text{und} \quad \underline{k}_2 = \pm\sqrt{\omega^2\mu_2\varepsilon_2\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa_2}{\omega\varepsilon_2}\right)}$$

- Ihre jeweilige Ausbreitungsrichtung lässt sich aus geometrischen Überlegungen darstellen durch die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{e}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{e}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{r}) \\ -\cos(\alpha_\mathrm{r}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{k,\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{t}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{t}) \end{pmatrix}$$

- Die Wellenvektoren ergeben sich somit zu

$$\underline{\mathbf{k}}_\mathrm{e} = \underline{k}_\mathrm{e}\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}}\,, \quad \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{r} = \underline{k}_\mathrm{r}\mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{t} = \underline{k}_\mathrm{t}\mathbf{e}_{k,\mathrm{t}}$$

Stetigkeitkeitsbedingungen

- An allen Punkten $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der Grenzfläche müssen zu jeder Zeit die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein.
- Dies betrifft zum einen die tangentialen Komponenten von

$$\underline{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}_0, t) = \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{e}(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(\mathbf{r}_0, t) \text{ und } \underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}_0, t) = \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t}(\mathbf{r}_0, t)$$

  sowie von

$$\underline{\mathbf{H}}_1(\mathbf{r}_0, t) = \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{e}(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r}(\mathbf{r}_0, t) \text{ und } \underline{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r}_0, t) = \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t}(\mathbf{r}_0, t)$$

- Und zum anderen die normalen Komponenten von $\underline{\mathbf{D}}_1(\mathbf{r}_0, t)$ und $\underline{\mathbf{D}}_2(\mathbf{r}_0, t)$ sowie von $\underline{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r}_0, t)$ und $\underline{\mathbf{B}}_2(\mathbf{r}_0, t)$.
- Sofern die Medien frei von Raumladungen sind, sind die Wellen divergenzfrei und letztere Bedingungen sind automatisch erfüllt.

Reflexionsgesetz

- Damit die Stetigkeitsbedingungen zu jeder Zeit und an jedem Punkt auf der Grenzfläche erfüllt sein können, müssen zunächst einmal die Exponentialterme identisch sein, woraus folgt, dass

$$\omega_{\mathrm{e}} = \omega_{\mathrm{r}} = \omega_{\mathrm{t}} = \omega$$

  und dass

$$\underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{r}_0$$

- Aus der Bedingung $\underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{r}_0$ folgt

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_{\mathrm{e}}) y = \underline{k}_1 \sin(\alpha_{\mathrm{r}}) y$$

  und somit das *Reflexionsgesetz* ("Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel")

$$\alpha_{\mathrm{e}} = \alpha_{\mathrm{r}} = \alpha_1$$

Snelliussches Brechungsgesetz

- Aus der weiteren Stetigkeitsbedingung, dass $\underline{\mathbf{k}}_\mathrm{r} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{t} \cdot \mathbf{r}_0$ folgt mit $\alpha_\mathrm{t} = \alpha_2$

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_1) y = \underline{k}_2 \sin(\alpha_2) y$$

bzw. das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} = \frac{\underline{n}_2}{\underline{n}_1}$$

- Dabei ist $\underline{n} = \underline{k} c_0 / \omega$ der im allgemeinen komplexe Brechungsindex im jeweiligen Medium.
- In nichtleitenden Medien ist der Brechungsindex genau wie die Wellenzahl reell und es gilt

$$n = \frac{k c_0}{\omega} = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_\mathrm{r} \varepsilon_\mathrm{r}}$$

Orthogonale Polarisationskomponenten I

- Um die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle zu bestimmen, werden diese zunächst in zwei orthogonale Polarisationskomponenten aufgeteilt entsprechend

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{e}(\mathbf{r},t) &= \left[\underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(s)}\mathbf{e}_x + \underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,e}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{e}\mathbf{r})} \\
\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(\mathbf{r},t) &= \left[\underline{E}_{\mathrm{r},0}^{(s)}\mathbf{e}_x + \underline{E}_{\mathrm{r},0}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,r}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{r}\mathbf{r})} \\
\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(\mathbf{t},t) &= \left[\underline{E}_{\mathrm{t},0}^{(s)}\mathbf{e}_x + \underline{E}_{\mathrm{t},0}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,t}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{t}\mathbf{r})}
\end{aligned}
$$

- Dies ist zum einen die *senkrechte* (s) Polarisationskomponente in x-Richtung und die *parallele* (p) Polarisationskomponente in Richtung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{\mathrm{p},i}$ mit $i \in \{\mathrm{e,r,t}\}$. Diese ergeben mit der Richtung des Wellenvektors und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_x$ ein Rechtsschraubensystem, d.h.

$$\mathbf{e}_{k,i} \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_{\mathrm{p},i}$$

Orthogonale Polarisationskomponenten II

- Für die hier betrachteten ebenen Wellen erhalten wir somit

$$\mathbf{e}_{\mathrm{p},e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{p},r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{\mathrm{p},t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_2) \\ -\sin(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

- Die magnetischen Felder ergeben sich zu zu

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_1}\left[\underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,e}} - \underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(p)}\mathbf{e}_x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{e}}\mathbf{r})}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_1}\left[\underline{E}_{\mathrm{r},0}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,r}} - \underline{E}_{\mathrm{r},0}^{(p)}\mathbf{e}_x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{r}}\mathbf{r})}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{t}}(\mathbf{t},t) = \frac{1}{\underline{Z}_2}\left[\underline{E}_{\mathrm{t},0}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,t}} - \underline{E}_{\mathrm{t},0}^{(p)}\mathbf{e}_x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_{\mathrm{t}}\mathbf{r})}$$

Senkrechte Polarisation (I)

- Durch das Reflexionsgesetz und das Snelliussche Brechungsgesetz ist bereits sichergestellt, dass die zeitliche und die räumliche Abhängigkeit der drei ebenen Wellen auf der Grenzfläche identisch ist.
- Betrachten wir zunächst die senkrechte Polarisation, so muss gelten

$$\underline{E}_{x,\mathrm{e},0} + \underline{E}_{x,\mathrm{r},0} = \underline{E}_{x,\mathrm{t},0}, \quad \text{und} \quad \underline{H}_{y,\mathrm{e},0} + \underline{H}_{y,\mathrm{r},0} = \underline{H}_{y,\mathrm{t},0}$$

- Da das senkrecht polarisierte elektrische Feld nur eine x-Komponente hat gilt also

$$\underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(\mathrm{s})} + \underline{E}_{\mathrm{r},0}^{(\mathrm{s})} = \underline{E}_{\mathrm{t},0}^{(\mathrm{s})}$$

Senkrechte Polarisation (II)

- Die tangentialen Komponenten des mit dem senkrecht polarisierten elektrischen Feld verkoppelten magnetischen Feldes ergeben sich aus der Projektion

$$\underline{H}_{y,\mathrm{e},0} = \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(s)}_{\mathrm{e},0}\mathbf{e}_{\mathrm{p,e}} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}^{(s)}_{\mathrm{e},0}$$

$$\underline{H}_{y,\mathrm{r},0} = \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(s)}_{\mathrm{r},0}\mathbf{e}_{\mathrm{p,r}} \cdot \mathbf{e}_y = -\frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}^{(s)}_{\mathrm{r},0}$$

$$\underline{H}_{y,\mathrm{t},0} = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{E}^{(s)}_{\mathrm{t},0}\mathbf{e}_{\mathrm{p,t}} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{\underline{Z}_2}\cos(\alpha_2)\underline{E}^{(s)}_{\mathrm{t},0}$$

- Aus der Stetigkeitsbedingung erhalten wir also

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}^{(\mathrm{s})}_{\mathrm{e},0} - \frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}^{(\mathrm{s})}_{\mathrm{r},0} = \frac{1}{\underline{Z}_2}\cos(\alpha_2)\underline{E}^{(\mathrm{s})}_{\mathrm{t},0}$$

Senkrechte Polarisation (III)

- Definieren wir nun den *Reflexionsfaktor* $\underline{r}_\mathrm{s}$ und den *Transmissionsfaktor* $\underline{t}_\mathrm{s}$ (für senkrechte Polarisation) als

$$\underline{r}_\mathrm{s} = \frac{\underline{E}_{\mathrm{r},0}^{(\mathrm{s})}}{\underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(\mathrm{s})}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathrm{s} = \frac{\underline{E}_{\mathrm{t},0}^{(\mathrm{s})}}{\underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(\mathrm{s})}}$$

- So erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$1 + \underline{r}_\mathrm{s} = \underline{t}_\mathrm{s} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)(1 - r_\mathrm{s}) = \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2) t_\mathrm{s}$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen wird daraus

$$\underline{r}_\mathrm{s} = \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathrm{s} = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}$$

Parallele Polarisation (I)

- Betrachten wir parallele Polarisation, so lauten die Stetigkeitsbedingungen

$$\underline{E}_{y,\mathrm{e},0} + \underline{E}_{y,\mathrm{r},0} = \underline{E}_{y,\mathrm{t},0} \quad \text{und} \quad \underline{H}_{x,\mathrm{e},0} + \underline{H}_{x,\mathrm{r},0} = \underline{H}_{x,\mathrm{t},0}$$

- Hierfür müssen wir nun das elektrische Feld auf die Grenzfläche projizieren, gemäß

$$\begin{aligned}
\underline{E}_{y,\mathrm{e},0} &= \underline{E}^{(p)}_{\mathrm{e},0} \mathbf{e}_{\mathrm{p,e}} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}^{(p)}_{\mathrm{e},0} \cos(\alpha_1) \\
\underline{E}_{y,\mathrm{r},0} &= \underline{E}^{(p)}_{\mathrm{r},0} \mathbf{e}_{\mathrm{p,r}} \cdot \mathbf{e}_y = -\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{r},0} \cos(\alpha_1) \\
\underline{E}_{y,\mathrm{t},0} &= \underline{E}^{(p)}_{\mathrm{t},0} \mathbf{e}_{\mathrm{p,t}} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}^{(p)}_{\mathrm{t},0} \cos(\alpha_2)
\end{aligned}$$

- Es folgt also

$$\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{e},0} \cos(\alpha_1) - \underline{E}^{(p)}_{\mathrm{r},0} \cos(\alpha_1) = \underline{E}^{(p)}_{\mathrm{t},0} \cos(\alpha_2)$$

Parallele Polarisation (II)

- Für die entsprechenden Komponenten des magnetischen Feldes gilt

$$\underline{H}_{x,\mathrm{e},0} = -\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{e},0}$$

$$\underline{H}_{x,\mathrm{r},0} = -\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{r},0}$$

$$\underline{H}_{x,\mathrm{t},0} = -\frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{t},0}$$

- Es folgt also

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{e},0} + \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{r},0} = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{E}^{(p)}_{\mathrm{t},0}$$

Parallele Polarisation (III)

- Definieren wir nun den *Reflexionsfaktor* $\underline{r}_\mathrm{p}$ und den *Transmissionsfaktor* $\underline{t}_\mathrm{p}$ (für parallele Polarisation) als

$$\underline{r}_\mathrm{p} = \frac{\underline{E}_{\mathrm{r},0}^{(\mathrm{p})}}{\underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(\mathrm{p})}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathrm{p} = \frac{\underline{E}_{\mathrm{t},0}^{(\mathrm{p})}}{\underline{E}_{\mathrm{e},0}^{(\mathrm{p})}}$$

- Damit erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$(1 - \underline{r}_\mathrm{s})\cos(\alpha_1) = \underline{t}_\mathrm{s}\cos(\alpha_2) \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2\cos(\alpha_1)(1 - r_\mathrm{s}) = \underline{Z}_1\cos(\alpha_2)t_\mathrm{s}$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen erhalten wir daraus

$$\underline{r}_\mathrm{p} = \frac{\underline{Z}_1\cos(\alpha_1) - \underline{Z}_2\cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_1\cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2\cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathrm{p} = \frac{2\underline{Z}_2\cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_1\cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2\cos(\alpha_2)}$$

Fresnelsche Beziehungen

- Für nichtleitende Medien gilt $n = \sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}$ und somit

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0\sqrt{\frac{\mu_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r}}} = \frac{Z_0\mu_\mathrm{r}}{n}$$

- Sind nun beide Medien nichtleitend und gelte $\mu_1 = \mu_2$, so lassen sich die Reflexions- und Transmissionsfaktoren schreiben als

$$r_\mathrm{s} = \frac{n_1\cos(\alpha_1) - n_2\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad r_\mathrm{p} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

$$t_\mathrm{s} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad t_\mathrm{p} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

- Wählt man den Einfallswinkel so, dass $n_2\cos(\alpha_1) = n_1\cos(\alpha_2)$ so verschwindet die Reflexion r_p für die parallele Polarisation und die Welle wird vollständig transmittiert.

Brewsterscher Polarisationswinkel

- Zusammen mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz erhalten wir für $r_\mathrm{p} = 0$ also

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_1)} = 1$$

- Diese Gleichung hat die triviale Lösung $\alpha_2 = \alpha_1$. Eine weitere Lösung ist $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$. Damit ergibt sich

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \tan(\alpha_1) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

- Dieser Winkel α_1 heißt *Brewsterscher Polarisationswinkel*. Von einer beliebig polarisierten Welle, die unter α_1 einfällt, wird also nur die Feldkomponente reflektiert, die senkrecht auf der Einfallsebene steht. Die reflektierte Welle ist senkrecht polarisiert.

Anwendung in der Fotografie

- In der Fotografie werden Polarisationsfilter eingesetzt. Während das Sonnenlicht unpolarisiert ist, ist das z.B. von der Wasseroberfläche reflektierte Licht senkrecht polarisiert. Wird der Polarisationsfilter entsprechend ausgerichtet, so filtert er die Reflexionen vollständig heraus.