

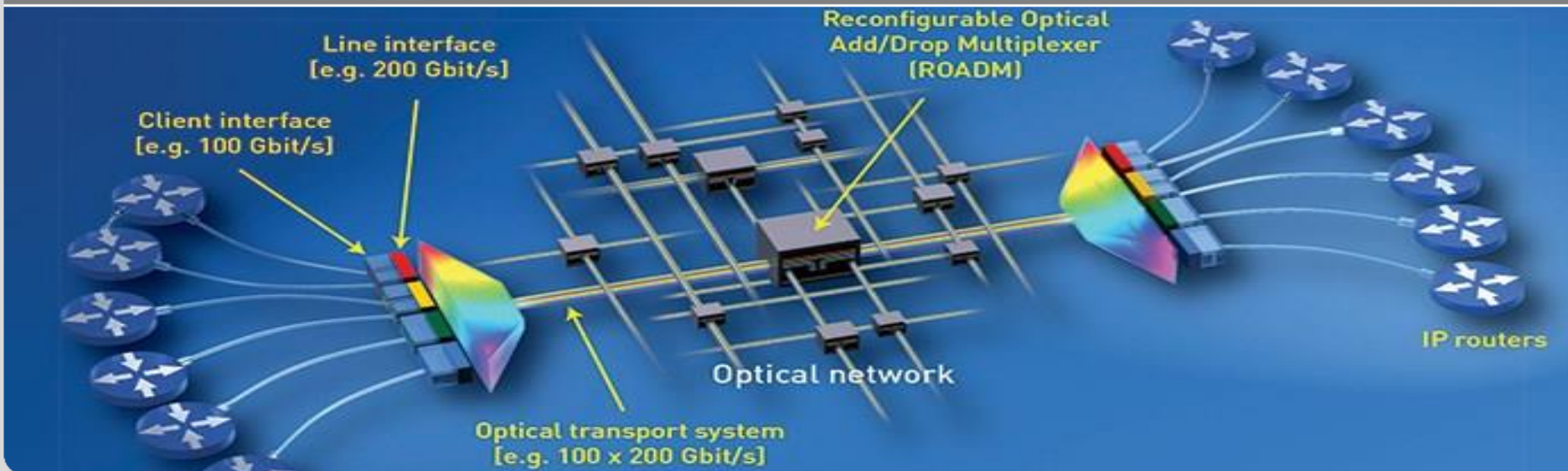
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 1

WS 2019/2020

Mathematische Grundlagen & Wiederholung EMF

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Die Maxwell'schen Gleichungen
(in Integralform)

$$(I) \oint_S \vec{H} d\vec{s} = \int_F \vec{j} d\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{D} d\vec{F} = \int_F \nabla \times \vec{H} d\vec{F} = \int_F \nabla \times \vec{E} d\vec{F}$$

$$(II) \oint_S \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{B} d\vec{F}$$

$$(III) \oint_0 \vec{D} d\vec{F} = \int_V \rho dV = \int_V \nabla \cdot \vec{D} dV$$

$$(IV) \oint_0 \vec{B} d\vec{F} = 0 = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV$$

Der Nabla Operator

- Der Nabla Operator ∇ kann verwendet werden um die Operationen der Vektorrechnung darzustellen.

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \phi, \text{div}(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A}, \text{rot}(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A}$$

- Die Elemente des Nabla Operators hängen vom Koordinatensystem ab. Nur für kartesische Koordinaten gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Korrektur:

Beim Laplace-Operator für kartesischen Koordinaten fehlte jeweils das Quadrat im Nenner.

Der Laplace Operator

- Angewendet auf ein Skalarfeld gilt

$$\Delta \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = (\nabla \cdot \nabla) \phi = \nabla^2 \phi$$

- Für kartesische Koordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Angewendet auf ein Vektorfeld wird der Laplace Operator auf jede Feldkomponente separat.

Integralsätze

Gaußscher Integralsatz

$$\underbrace{\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV}_{\text{Volumenintegral}} = \underbrace{\oint_S \vec{A} d\vec{O}}_{\text{Hüllflächenintegral}}$$

Stokesscher Integralsatz

$$\underbrace{\int_F \nabla \times \vec{A} d\vec{F}}_{\text{Flächenintegral}} = \underbrace{\oint_S \vec{A} d\vec{s}}_{\text{Umlaufintegral}}$$

Maxwell'sche Gleichungen in differentieller Form

$$(I) \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(II) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(III) \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$(IV) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Materialgleichungen

- In den meisten Stoffen gilt für das dielektrische Polarisationsfeld $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

- Ferner gilt für die Magnetisierung durch atomare Ringströme $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

In den meisten Medien gilt

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \dots 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad \text{und} \quad \mu_0 = 1,2566 \dots 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Anmerkung:

Der lineare Zusammenhang zwischen $\vec{D}$ -Feld und $\vec{E}$ -Feld gilt nicht bei Bestrahlung eines Materials mit Licht hoher Intensität. In diesem Fall treten nichtlineare Effekte auf. In EMW beschränken wir uns auf den linearen Fall.

- Das elektrische Feld kann experimentell aus der Coulombs Kraft bestimmt werden

$$\vec{F}_C = Q \vec{E}$$

- Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ kann bestimmt werden durch $\vec{F}_L = Q \vec{v} \times \vec{B}$

- Die Kontinuitätsgleichung besagt

$$\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Ferner gilt das Ohmsche Gesetz $\vec{j} = \kappa \vec{E}$

Anmerkung:

Die Kontinuitätsgleichung verknüpft die Quellen elektrischer Felder (Raumladung) mit den Quellen magnetischer Felder (Stromdichte).

Sonderfälle der Maxwell'schen Theorie

① Elektrostatik

- Zeitunabhängiger Fall ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
 - statische Ladungsverteilungen $\vec{j} = 0$
- das elektrische Feld sei $\vec{E} = -\nabla\phi$

- Aus den Maxwell Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

mit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ gilt

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \nabla \epsilon \cdot \vec{E} + \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \epsilon \cdot \nabla \phi + \epsilon \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \phi)}_{\Delta \phi = \nabla^2 \phi}$$

daraus folgt

$$\boxed{\Delta \phi + \frac{1}{\epsilon} \nabla \epsilon \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

Poisson Gleichung

Anmerkungen:

1.) Für homogene Materialien mit räumlich konstanter Permittivität ϵ entfällt der zweite Term in der Poisson-Gleichung.

2.) Im ladungsfreien Raum vereinfacht sich die Poisson-Gleichung zur Laplace-Gleichung, vgl. Folie 9.

③ Stationäres Strömungsfeld

- In leitfähigen Materialien ($\kappa > 0$) erzeugt jedes elektrische Feld eine Stromdichte $\vec{j}$
- Es gelte weiterhin $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

- Für die Maxwellgleichungen gilt

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad \nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

- Aus $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j} \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \nabla \cdot \vec{j} &= \nabla \cdot (\kappa \vec{E}) = \nabla \kappa \cdot \vec{E} + \kappa \nabla \cdot \vec{E} \\ &= -\nabla \kappa \nabla \phi - \kappa \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \phi)}_{\Delta \phi} = 0 \end{aligned}$$

Stationäres Strömungsfeld

Anmerkung:

Für homogene Materialien mit räumlich konstanter Leitfähigkeit κ entfällt der zweite Term in der Laplace-Gleichung.

wir erhalten: $\Delta\phi + \frac{1}{\kappa} \nabla\kappa \nabla\phi = 0$ Laplace Gleichung

- Ferner lässt sich die magnetische Flussdichte darstellen als $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ← magnetisches Vektorpotential
- Es gilt $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
- Die Divergenz $\nabla \cdot \vec{A}$ kann beliebig gewählt werden (gauge)
- mit $\vec{B} = \mu \vec{H}$ gilt dann

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \vec{J} \stackrel{\mu = \text{const.}}{=} \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\text{mit } \boxed{\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}$$

Mit $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (Coulomb Bedingung) gilt

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}}$$

© langsam veränderliche Felder

- In vielen Fällen ist die Verschiebungsdichte $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ vernachlässigbar $(\rho = 0)$

- Im Raumladungsfreien Fall gilt

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- Mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ folgt

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

damit erhalten wir $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu} (\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}) \\ &= \vec{j} = \kappa \vec{E} = -\kappa \nabla \phi - \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \kappa \nabla \phi + \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

mit $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \kappa \phi$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} + \mu \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0}$$

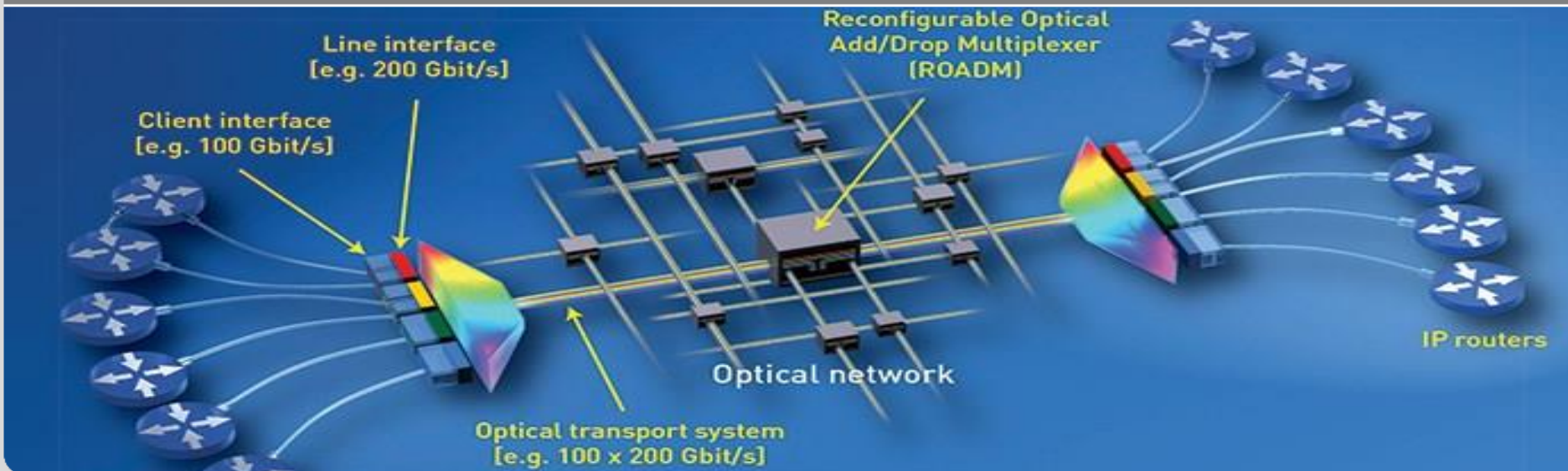
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 2

WS 2019/2020

Wellengleichung und ebene Wellen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



- Wiederholung des Spezialfalls langsam veränderlicher Felder (→ siehe Skript zur Vorlesung 1)

- Herleitung der Maxwellgleichungen für den Fall beliebig veränderlicher Felder (→ der Aufschrieb zu diesem “Spezialfall” ist bereits im Latex-Skript zur Vorlesung 1 enthalten)

- Die kurze Relaxationszeit ist die Begründung dafür, dass der Verschiebungsstrom $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ in Metallen vernachlässigbar ist.

Tafelbild zur Herleitung fehlt
und wird nachgeliefert

für langsam veränderliche Felder mit " $\frac{1}{T_r} \gg \frac{\partial}{\partial t}$ "
kann der Term $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ vernachlässigt werden

Beispiele:

Silber	$T_r = 1,4 \cdot 10^{-19} \text{ s}$	} gute Leiter
Kupfer	$T_r = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ s}$	
Wasser (destilliert)	$T_r \approx 10^{-6} \text{ s}$	} schlechter Leiter
Teflon	$T_r \approx 30 \text{ min}$	

} Isolator

⇒ für die meisten Metalle kann die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt werden!

Die Wellengleichung für homogene Medien

Die Maxwell'schen Gleichungen in
homogenen linearen Medien

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{und} \quad \vec{j} = \kappa \vec{E}$$

homogen bedeutet hier $\nabla \epsilon = 0$, $\nabla \mu = 0$ und $\nabla \kappa = 0$

$$\nabla \times \vec{H} = \kappa \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Die Wellengleichung für homogene Medien

Die Wellengleichung

Bilden wir in einem linearen homogen Medium

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

mit $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Die Wellengleichung für homogene Medien

mit $\chi = 0$

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Wellengleichung
für das E-Feld

mit

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \Delta \vec{H} = (\chi + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}) (\nabla \times \vec{E}) \\ &= +\mu\chi \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

für $\chi = 0$

$$\Delta \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Wellengleichung
für das
H-Feld

Ebene Wellen als Lösungen der Wellengleichung

Ebene Wellen in nichtleitenden Medien

„Lösungen der Wellengleichung, die nur von einer kartesischen Koordinate und der Zeit abhängen heißen ebene Wellen“

$$\text{z.B. } \vec{E} = \vec{E}(z, t) \text{ und } \vec{H} = \vec{H}(z, t)$$

$$\text{d.h. } \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

entsprechend für $\vec{H}$

Ebene Wellen als Lösungen der Wellengleichung

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial z}} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} = -\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

Verknüpfung von H_y und E_x

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

Verknüpfung von H_x und $-E_y$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}}$$

Ebene Wellen als Lösungen der Wellengleichung

Lösung

Nach d'Alembert wird die skalare WG gelöst durch

$$H_y = f(z - ct) + g(z + ct) \quad \text{mit } c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

hier sind f und g beliebige zweifach differenzierbare Funktionen

Es folgt

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = f' + g' \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -cf' + cg'$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = f'' + g'' \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = c^2 f'' + c^2 g'' = \frac{1}{\mu\epsilon} (f'' + g'') = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \quad \text{qed.}$$

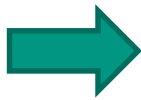
Ebene Wellen als Lösungen der Wellengleichung

für E_x erhalten wir

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon} (f' + g')$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \mu c (f' - g')$$

Integration
über z bzw. t



Annahme $F(z) = G(t) = 0$

$$E_x = -\frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{c} f + \frac{1}{c} g \right) + F(z) \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{1}{\varepsilon c} (f - g) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (f - g) = z(f - g)$$

$$E_x = \mu c (f - g) + G(t) \quad \Rightarrow \quad E_x = \mu c (f - g) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (f - g) = z(f - g)$$

Generell bilden bei einer ebenen Welle $\vec{E}_1 = z(\vec{H} \times \vec{e}_z)$
 $\vec{E}_1, \vec{H}$ und $\vec{e}_z$ bilden ein 'Rechtschraubensystem'

Wellenwiderstand Z

Im Vakuum:

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad \mu_0 \approx 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx \left(\frac{4\pi}{36\pi} 10^{-9} 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9} 10^{-16} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \frac{\text{V}}{\text{A}} = 377 \Omega$$

Ausbreitungsrichtung ebener Wellen

Betrachten wir Punkte mit konstantem Argument von f und g

$$z \mp ct = \text{const.}$$

ableiten nach t

$$\frac{\partial z}{\partial t} \mp c = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z = \pm c$$

Die Funktion f beschreibt eine eben Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in $+z$ Richtung ausbreitet

Die Funktion g eine Welle in $-z$ Richtung

Wir erhalten

$$H_y^+ = f(z - ct) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Welle in } +z \text{ Richtung}$$

$$E_x^+ = z f(z - ct)$$

$$H_y^- = g(z + ct) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Welle in } -z \text{ Richtung}$$

$$E_x^- = z g(z + ct)$$

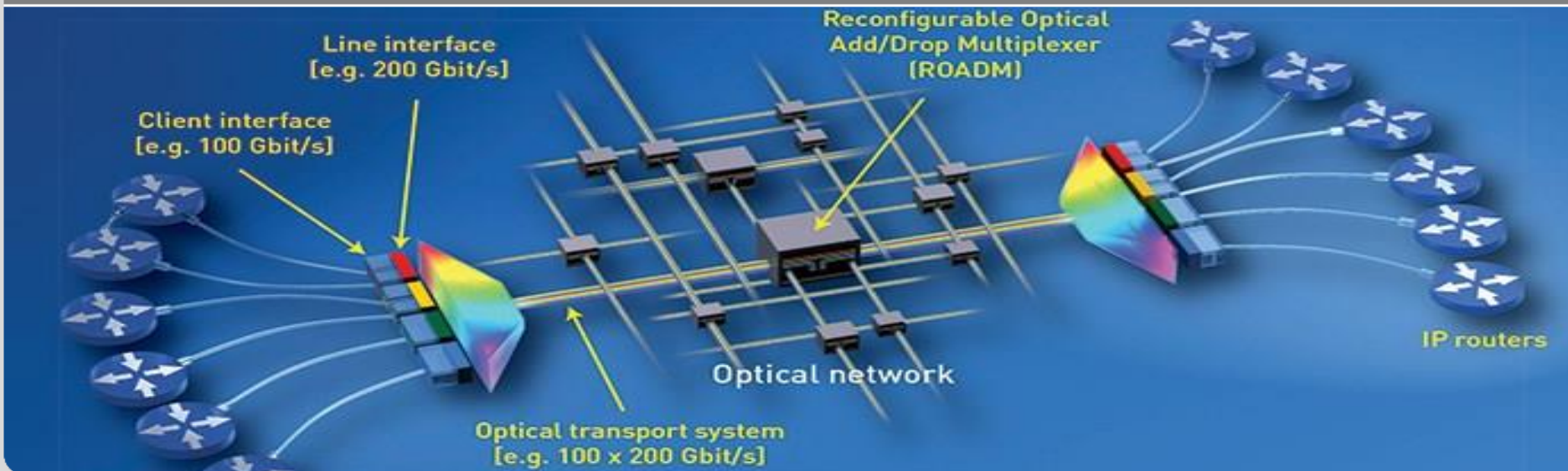
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 3

WS 2019/2020

Harmonische Wellen & Poynting-Vektor

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Wiederholung: Die Maxwell'schen Gleichungen

Neues Passwort: maxwell19

Die Maxwell'schen Gleichungen
für lineare, homogene Medien

es gelte: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ und $\vec{J} = \kappa \vec{E}$

räumlich homogen: $\nabla \epsilon = \nabla \mu = \nabla \kappa = 0$

zeitlich homogen: $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \kappa \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Zeitharmonische Felder und Wellen

Jede reellwertige Funktion $f(t)$ mit der Periode T kann in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t + \varphi_n\right)$$

wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$$\text{mit } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

Bei Linearen Vorgängen bietet sich folgendes Vorgehen an:

- 1) Entwicklung der Eingangsgrößen (Periode T) in zeitharmonische Schwingungen (Spektralkomponenten)
 - 2) Komponentenweise Anwendung der Rechenoperationen
 - 3) Bestimmung der Ausgangsgrößen durch Überlagerung
- $\Rightarrow$ bei nichtperiodischen Signalen $\Rightarrow$ Fouriertransformation

Komplexe Zeigerschreibweise

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ lässt sich z.B. das elektrische Vektorfeld separieren in $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi)$
Ortsvektor

- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den komplexen Zeiger zu verwenden

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(j[\omega t + \varphi])$$

- Es gilt: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\{\vec{E}(\vec{r}, t)\} = \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{E}^*(\vec{r}, t)]$

- Bei nichtlinearen Vorgängen kann die komplexe Zeigerschreibweise nicht verwendet werden

Maxwellgleichungen für komplexe Zeiger

• Es seien $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$, $\vec{S}(\vec{r}, t)$ komplexe Zeiger

• Für die Ableitungen nach der Zeit gilt

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = j\omega \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} = j\omega \vec{H}(\vec{r}, t)$$

• wir erhalten

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \mathcal{K} \vec{E}(\vec{r}, t) + j\omega \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -j\omega \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \quad \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) = 0$$

Komplexe Zeigerschreibweise

Komplexe Amplitude

- Die Schreibweise lässt sich weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit für gegebenes $\omega = \frac{2\pi}{T}$ impliziert wird.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \underbrace{\exp(j\omega t) \exp(j\varphi)}_{\text{komplexer Zeiger}} = \underbrace{\vec{E}(\vec{r}) \exp(j\varphi)}_{\text{komplexe Amplitude}} \exp(j\omega t)$$

wobei die komplexe Amplitude gegeben ist als

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(j\varphi)$$

Damit ergeben sich die Maxwell'schen Gleichungen zu

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = (\kappa + j\omega\epsilon) \vec{E}(\vec{r}) = j\omega\epsilon \left(1 - j\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right) \vec{E}(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \vec{H}(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$$

Die Helmholtzgleichung

Die Helmholtz - Gleichung

- Die Wellengleichung lässt sich auch für komplexe Zeiger bzw. komplexe Amplituden herleiten:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = j\omega \epsilon (1 - j\frac{\kappa}{\omega \epsilon}) (\nabla \times \vec{E}) = -\Delta \vec{H}$$

Helmholtz-Gleichung

$$= +\omega^2 \mu \epsilon (1 - j\frac{\kappa}{\omega \epsilon}) \vec{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{H} + \underline{k}^2 \vec{H} = 0}$$

$$\text{mit } \underline{k}^2 = \omega^2 \mu \epsilon (1 - j\frac{\kappa}{\omega \epsilon})$$

k wird als Wellenzahl bezeichnet

- für leitende Materialien ist k ^($\kappa \neq 0$) komplex

- für nichtleitende Materialien ist k $= \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

^($\kappa = 0$) wobei $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ die Wellenlänge ist.

Elektromagnetische Feldenergie

- Elektrische und magnetische Felder speichern Energie (z. B., Plattenkondensator bzw. Spule)
- In einem Volumen V ergibt sich die gespeicherte Energie zu

$$W_e = \int_V w_e dV \quad \text{und} \quad W_m = \int_V w_m dV$$

wobei w_e und w_m die auf das Volumen bezogenen Energiedichten sind.

Es gilt $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ und $w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

- Die gesamte elektromagnetische Energiedichte $w_{em} = w_e + w_m$

Satz von Poynting

- Jede Änderung der Energie dW_{em} im Volumen V kann beschrieben werden als in Zeitintervall dt

$$dW_{\text{em}} = - \underbrace{\int_0 \vec{S} \cdot d\vec{O} dt}_{\substack{\text{Poynting Vektor} \\ \text{durch die Hüllfläche } O \\ \text{abgestrahlte Feldenergie}}} - \underbrace{\int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV dt}_{\substack{\text{in Wärmeenergie} \\ \text{umgewandelte} \\ \text{Feldenergie}}}$$

- Der Poynting Vektor $\vec{S}$ beschreibt (Ohmsche Verluste)
Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten Feldenergie. Einheit $\frac{\text{Joule}}{\text{Sekunde} \cdot \text{Meter}^2} = \frac{\text{Watt}}{\text{Meter}^2}$

Der Satz von Poynting

Bezogen auf das Zeitintervall dt lässt sich der Satz von Poynting schreiben als Leistungsbilanz

$$\frac{\partial W_{\text{em}}}{\partial t} = - \oint_0 \vec{S} d\vec{O} - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV$$

mit Hilfe der Energiedichte und mit dem Gaußschen Satz

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w_{\text{em}} dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{S} dV - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV$$

Herleitung des Poynting-Vektors

Es gilt mit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ mit $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$

$$\frac{d W_{\text{em}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) = \epsilon \frac{d}{dt} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \vec{H} \cdot \vec{H}$$

$$= \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

damit gilt:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \underbrace{\vec{D} \cdot \vec{S}}_{\substack{\vec{D} \cdot \vec{H} \\ - \vec{E} \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})}} - \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{E}}_{\substack{\vec{H} \cdot (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \\ \vec{D} \cdot \vec{E}}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{D} \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \vec{H} (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} (\nabla \times \vec{H})$$

mit den Rechenregeln für die Rotation und Divergenz

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

weglassen der Divergenz ergibt

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Poynting-Vektor für zeitharmonische Wellen

Poynting Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t} \right]$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \dots$$

für den Poynting Vektor gilt

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t} \right) \times \left(\vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \right) e^{j2\omega t} + \left(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right) + \left(\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \right) + \left(\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right) e^{-j2\omega t} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right) + \left(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \right) e^{j2\omega t} \right\}$$

Im zeitlichen Mittel ergibt sich

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right\}$$

Darüber ist der komplexe Poynting Vektor definiert

$$\underline{\vec{S}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right)$$

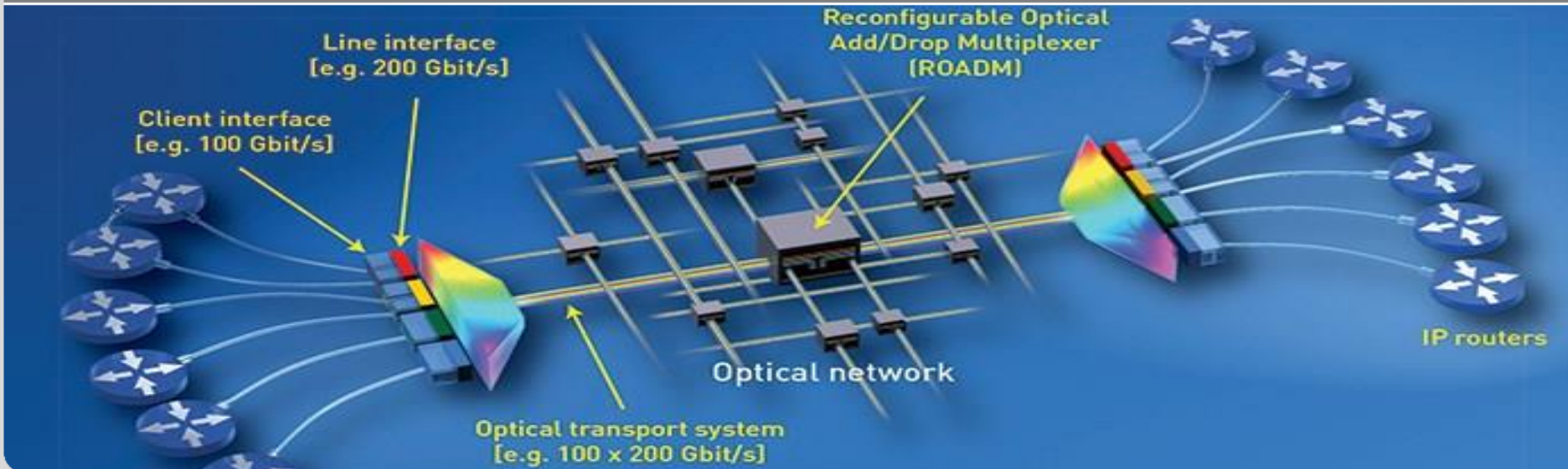
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 4

WS 2019/2020

Ebene, harmonische Wellen & Polarisation

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Die Maxwellschen Gleichungen

Für harmonische Zeitabhängigkeit

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \left(1 - \frac{\kappa}{\omega^2 \epsilon}\right) \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \varrho$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Zeitharmonische ebene Wellen

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = j\omega \left(1 - \frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Wir erhalten für H_y und E_x

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon \left(1 - \frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) E_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$$

Zeitharmonische, ebene Wellen

Wenn wir diese nach z ableiten und gegenseitig einsetzen, folgen die skalaren Helmholtz Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{H}_y = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_x = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

mit

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon}}$$

Komplexe
Wellenzahl

Lösungen

für die komplexen Zeiger

$$\underline{H}_y = \underbrace{\underline{A}^+ e^{j(\omega t - kz)}}_{\text{ebene Welle in } +z \text{ Richtung}} + \underbrace{\underline{A}^- e^{j(\omega t + kz)}}_{\text{ebene Welle in } -z \text{ Richtung}}$$

- Die Konstanten $\underline{A}^+$ und $\underline{A}^-$ folgen aus der Problemstellung
- Für $\underline{E}_x$ erhalten wir

$$\underline{E}_x = \underline{Z} \underline{A}^+ e^{j(\omega t - kz)} - \underbrace{(\underline{Z}) \underline{A}^- e^{j(\omega t + kz)}}_{\text{komplexer Wellenwiderstand}}$$

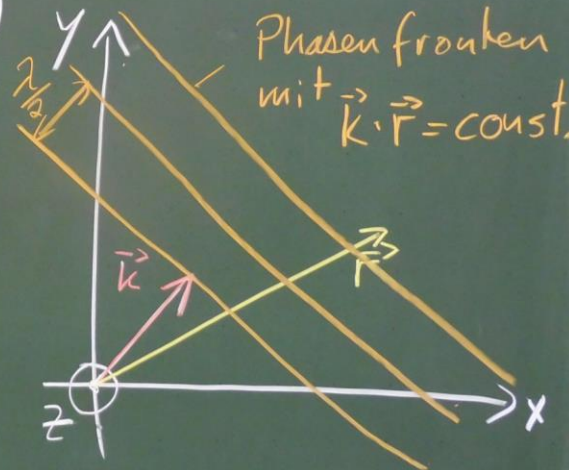
Der Wellenvektor

- Ebene Wellen können sich in beliebige Richtungen ausbreiten.
- Mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_k$ in Ausbreitungsrichtung dem Ortsvektor $\vec{r}$ und dem Wellenvektor $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_k$

gilt
$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

und

$$\vec{E} = Z(\vec{H} \times \vec{e}_k)$$



Komplexe Wellenzahl

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon}} = \pm (\beta - j\alpha)$$

Nebenrechnung:

für beliebige reelle Zahlen a, b, c und d mit

$$a + jb = \pm \sqrt{c + jd}$$

soll a und b für gegebenes c und d bestimmt werden.

Lösung

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + 1} \quad \text{und} \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - 1}$$

Die komplexe Wellenzahl

Beweis:

$$(a+jb)(a+jb) = \sqrt{c+jd} \sqrt{c+jd}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2jab - b^2 = c + jd$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{c^2+d^2}+1) + j\sqrt{\frac{c^2+d^2+1}{2}}\sqrt{\frac{c^2+d^2-1}{2}} - \frac{1}{2}(\sqrt{c^2+d^2}-1) = c + jd$$

$$\Leftrightarrow \dots$$

Die komplexe Wellenzahl

Angewendet auf die komplexe Wellenzahl erhalten wir

Phasenkonstante $\beta(\omega) = \pm \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T_r)^2} + 1}$

Dämpfungs-
konstante $\alpha(\omega) = \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right) \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T_r)^2} - 1}$

Relaxationszeit
 $T_r = \frac{\epsilon}{\kappa}$

→ Die Welle muss mit zunehmender Entfernung von der Quelle abnehmen

Phasengeschwindigkeit

- Die Geschwindigkeit mit der sich bei einer ebenen Welle z.B. $\underline{H}_y = \underline{H}_0 e^{j(\omega t - \beta z)}$ Punkte konstanter Phase $\omega t - \beta z = \text{const.}$ ausbreiten, D.h.

$$v_{ph}(\beta) = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = c \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta_r^2}}$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Einsetzen von $\beta(\omega)$ ergibt

$$v_{ph}(\omega) = c \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T_r)^2}}}}$$

Für $\omega T_r \gg 1$ (z.B. nicht(ei)kern) $\Rightarrow v_{ph} = c$

Für $\omega T_r \ll 1$ (z.B. in Metallen) $\Rightarrow v_{ph} = \sqrt{2\omega T_r}$
 $= \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \kappa}}$

Gruppengeschwindigkeit

- Für Signale, welche sich aus mehreren Frequenzkomponenten zusammensetzen, kann sich jede Komponente mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit ausbreiten

$$V_{gr}(\beta) = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} c \beta^2 (\beta^2 + \beta_r^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= c \frac{\beta^3 + 2\beta_r^2\beta}{(\beta^2 + \beta_r^2)^{\frac{3}{2}}} = c \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta_r^2}} \frac{\beta^2 + 2\beta_r^2}{\beta^2 + \beta_r^2} = V_{ph}(\beta) \left(1 + \frac{\beta_r^2}{\beta^2 + \beta_r^2} \right)$$

Polarisation

• ebene Welle an einem festen Ort z.B. $z=0$

$$E_x(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(t) = E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

$$\text{Normierung } E_0 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$\Rightarrow a_x^2 + a_y^2 = 1$$

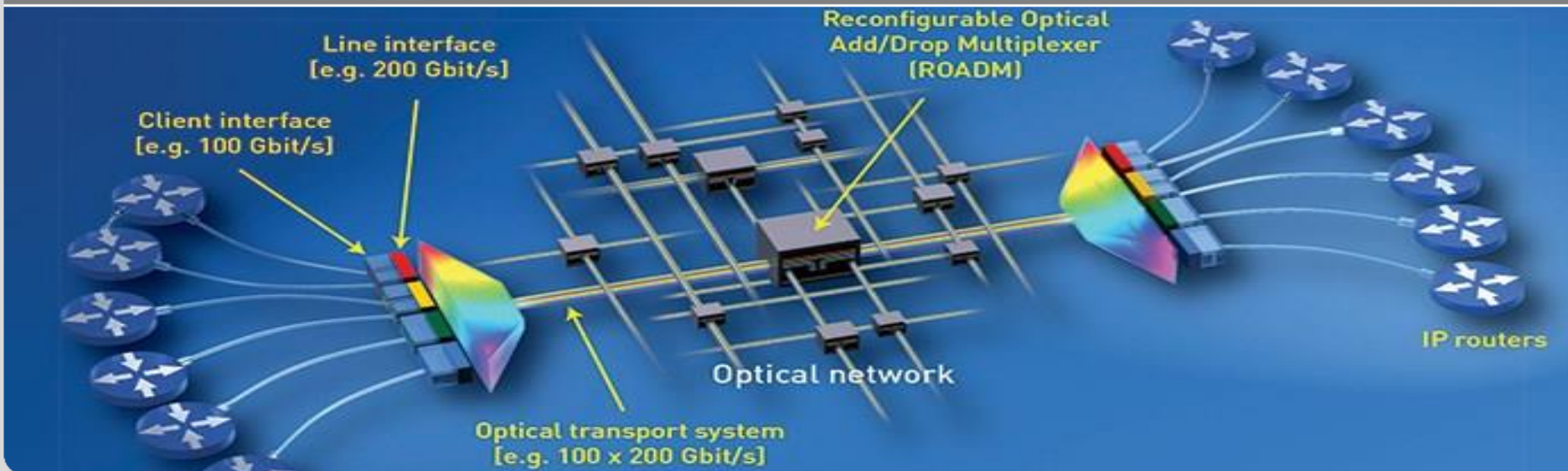
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 5

WS 2019/2020

Reflexion und Brechung von Wellen an Grenzflächen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Die Maxwell'schen Gleichungen in Integralform

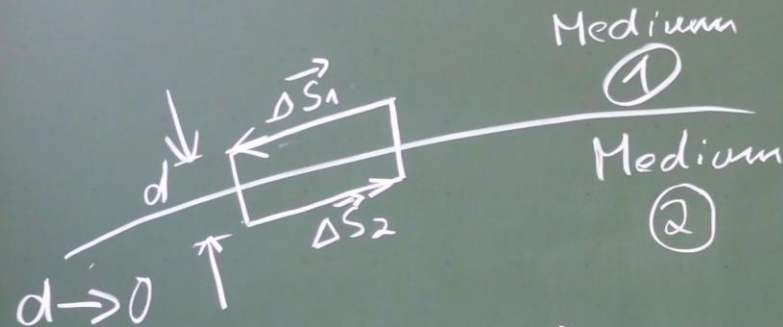
$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{D} \cdot d\vec{F}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F}$$

$$\oint_0 \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int_V \rho \, dV$$

$$\oint_0 \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$$

Rand- und Stetigkeitsbedingungen



Da $d \rightarrow 0$ verkleinern
der Verschiebungsstrom
und der
magnetische Fluss

aus $\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F}$

wird

$$\vec{H}_1 \Delta \vec{s}_1 + \vec{H}_2 \Delta \vec{s}_2 = i_F \Delta s$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{t1} - H_{t2} = i_F}$$

← Oberflächenstrom

Stetigkeitsbedingungen

Wobei H_{t1} und H_{t2} die tangentialen Komponenten von $\vec{H}_1$ bzw. $\vec{H}_2$ sind.

Für die elektrische Feldstärke gilt dann

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

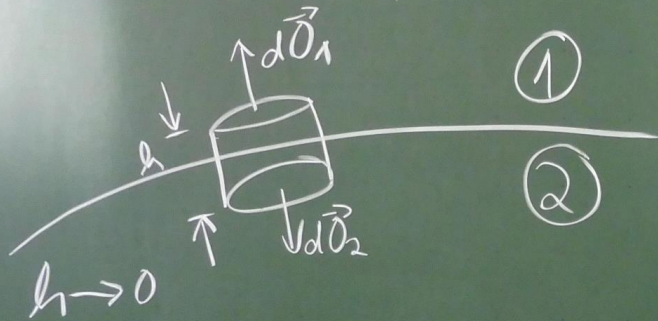
$$\Rightarrow \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{t1} - E_{t2} = 0}$$

Stetigkeit der tangentialen Komponenten

Stetigkeitsbedingungen

Für die Feldkomponenten normal zur Grenzfläche



$$\oint_0 \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int_V \rho dV$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1 \cdot d\vec{O}_1 + \vec{D}_2 \cdot d\vec{O}_2 = \rho_F \Delta O$$

$$\Rightarrow \boxed{D_{n1} - D_{n2} = \rho_F}$$

↑
Flächen-
ladung

↓
Kreisfläche

und

$$\oint_0 \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 \cdot d\vec{O}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{O}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{n1} - B_{n2} = 0}$$

Stetigkeit der
normalen Komponenten

Stetigkeitsbedingungen

Wenn das Medium 2 ideal leitend ist, so
verschwinden die Felder und wir erhalten
die Randbedingungen

$$E_{t_1} = 0 \quad H_{t_1} = i_F$$

$$D_{n_1} = S_F \quad B_{n_1} = 0$$

Reflexion und Brechung von ebenen Wellen

Für die elektrische Feldstärke erhalten wir für die ebenen Wellen (komplexe Zeiger)

$$\underline{E}_e(\vec{r}, t) = \underline{E}_{e,0} e^{j(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})}$$

$$\underline{E}_r(\vec{r}, t) = \underline{E}_{r,0} e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

$$\underline{E}_t(\vec{r}, t) = \underline{E}_{t,0} e^{j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

Reflexion und Brechung an Grenzflächen

Die Medien seien raumladungsfrei und
haben die Wellenzahlen

$$\underline{k}_{1,2} = \pm \sqrt{\omega^2 \mu_{1,2} \epsilon_{1,2} \left(1 - j \frac{\kappa_{1,2}}{\omega \epsilon_{1,2}}\right)}$$

Die Wellenvektoren ergeben sich zu

$$\vec{k}_e = \underline{k}_1 \vec{e}_{k,e} = \underline{k}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_r = \underline{k}_1 \vec{e}_{k,r} = \underline{k}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_r) \\ -\cos(\alpha_r) \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_t = \underline{k}_2 \vec{e}_{k,t} = \underline{k}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_t) \\ \cos(\alpha_t) \end{pmatrix}$$

Annahme:
 $\vec{k}_e$, $\vec{k}_r$ und $\vec{k}_t$
liegen in der
Einfallsebene
bzw. yz Ebene

Reflexion und Brechung an Grenzflächen

Die magnetische Feldstärke ist mit der elektrischen Feldstärke verknüpft $i \in \{e, r, t\}$

$$\vec{H}_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{Z_i} [\vec{e}_{k,i} \times \vec{E}_i(\vec{r}, t)]$$

komplexer
Wellenwiderstand

Stetigkeitsbedingungen

An allen Punkten auf der Grenzfläche

bei $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Die tangentialen Feldkomponenten müssen stetig sein

$$\vec{E}_1(\vec{r}_0, t) = \vec{E}_e(\vec{r}_0, t) + \vec{E}_r(\vec{r}_0, t) \text{ und } \vec{E}_2(\vec{r}_0, t) = \vec{E}_t(\vec{r}_0, t)$$

und für

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_e + \vec{H}_r \text{ und } \vec{H}_2 = \vec{H}_t$$

Das Reflexionsgesetz

Damit die Stetigkeitsbedingungen an jedem $\vec{r}_0$ und zu jedem t erfüllt sind gilt die notwendige Bedingung, daß die Exponentialkerne gleich sind.

D.h. $\omega_e = \omega_r = \omega_t = \omega$

und $\vec{k}_e \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_0$

Aus $\vec{k}_e \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_0$ folgt

$k_1 \sin(\alpha_e) y = k_1 \sin \alpha_r y$ Reflexionsgesetz
 $\Rightarrow \boxed{\alpha_e = \alpha_r = \alpha_1}$

Das Snelliussche Brechungsgesetz

Aus $\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}_t \cdot r_0$ folgt $\boxed{\alpha_t = \alpha_2}$

$$k_1 \sin(\alpha_1) y = k_2 \sin(\alpha_2) y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Snelliussches
Brechungsgesetz

Wobei $n = \frac{k c_0}{\omega}$ bzw. für $K=0$ $n = \frac{k c_0}{\omega} = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$

Reflexions- und Transmissionsfaktor

$$\underline{E}_i(\vec{r}, t) = \left[\underline{E}_{i,0}^{(s)} \vec{e}_x + \underline{E}_{i,0}^{(p)} \vec{e}_{p,i} \right] e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

es muss gelten

$$\vec{e}_{k,i} \times \vec{e}_x = \vec{e}_{p,i}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{p,c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{p,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_{p,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_2) \\ -\sin(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{Z_i} \left[\underline{E}_{i,0}^{(s)} \vec{e}_{p,i} - \underline{E}_{i,0}^{(p)} \vec{e}_x \right] e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

Reflexions- und Transmissionsfaktor

Ⓐ für senkrechte Polarisation
für die tangentialen Feldkomponenten gilt

$$\underbrace{E_{x,e,0} + E_{x,r,0}}_{\substack{\text{tangentiale E-feld} \\ \text{in } \textcircled{1}}} = \underbrace{E_{x,t,0}}_{\substack{\text{tangentiale} \\ \text{E-feld in } \textcircled{2}}}$$

$$H_{y,e,0} + H_{y,r,0} = H_{y,t,0}$$

Reflexions- und Transmissionsfaktor

daraus folgt

$$\underline{E}_{e,0}^{(s)} + \underline{E}_{r,0}^{(s)} = \underline{E}_{t,0}^{(s)} \quad \text{und} \quad |$$

für die magnetische Feldstärke projiziert auf die y-Achse

$$\frac{1}{Z_1} \underline{E}_{e,0}^{(s)} \vec{e}_{pe} \cdot \vec{e}_y + \frac{1}{Z_1} \underline{E}_{r,0}^{(s)} \vec{e}_{pr} \cdot \vec{e}_y = \frac{1}{Z_2} \underline{E}_{t,0}^{(s)} \vec{e}_{tr} \cdot \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow Z_2 \left(\underline{E}_{e,0}^{(s)} \cos(\alpha_1) - \underline{E}_{r,0}^{(s)} \cos(\alpha_1) \right) = Z_1 \underline{E}_{t,0}^{(s)} \cos(\alpha_2)$$

Reflexions- und Transmissionsfaktor

Definiere

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{E}_{r,0}^{(s)}}{\underline{E}_{e,0}^{(s)}}$$
$$\underline{t}_s = \frac{\underline{E}_{t,0}^{(s)}}{\underline{E}_{e,0}^{(s)}}$$

Reflexionskoeffizient

Transmissionskoeffizient

Damit gilt

$$1 + \underline{r}_s = \underline{t}_s$$

$$\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) (1 - \underline{r}_s) = \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2) \underline{t}_s$$

Anmerkung:

für parallele Polarisation, siehe Foliensatz

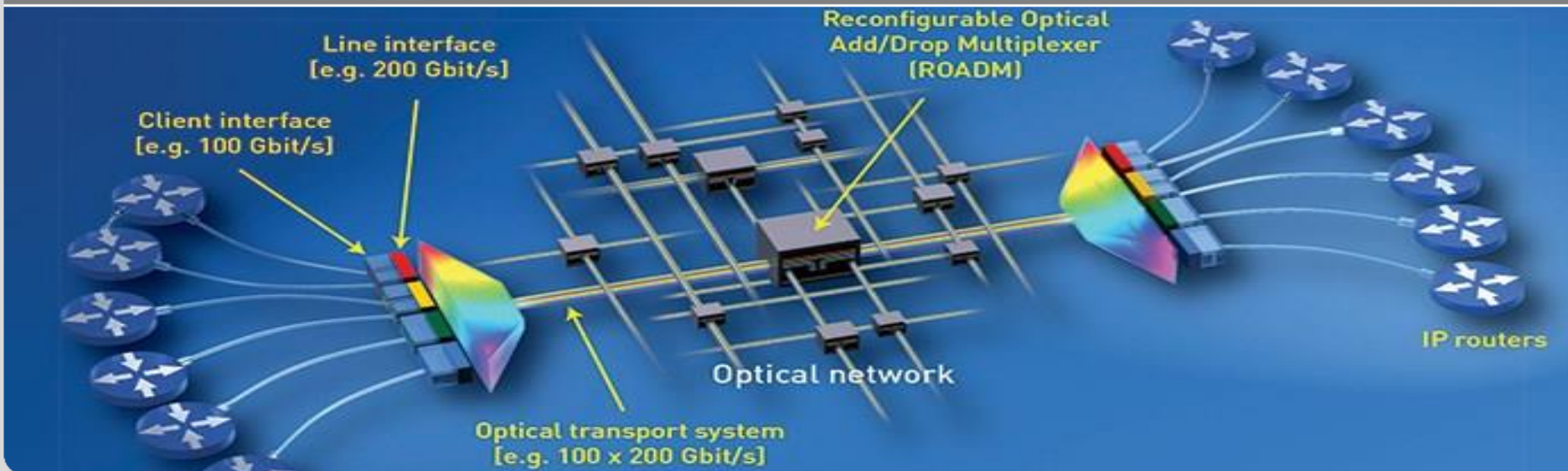
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 6

WS 2019/2020

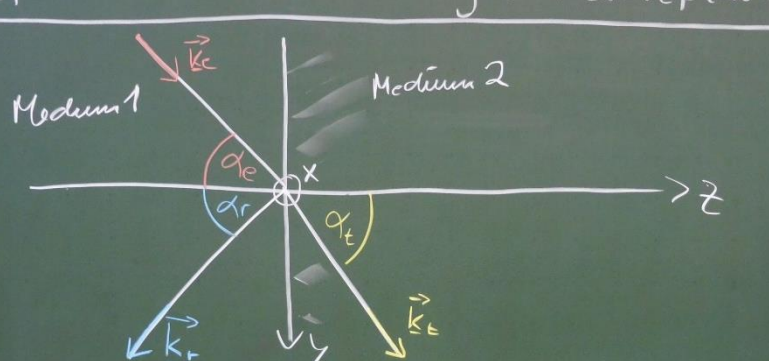
Reflexion und Brechung von Wellen an Grenzflächen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Wiederholung: Reflexion und Brechung

Reflexion und Brechung an Grenzflächen



Ebene Wellen:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_{0,i} e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad i \in \{e, r, t\}$$

$$\vec{H}_i^{(0)} = \frac{1}{Z_i} (\vec{e}_{k_i} \times \vec{E}_i(\vec{r}, t)) \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon(1 - j\frac{\chi}{\omega\epsilon})}}$$

$$\vec{k}_e = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_r = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_r) \\ -\cos(\alpha_r) \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_t = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_t) \\ \cos(\alpha_t) \end{pmatrix}$$

mit $k = \pm \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon (1 - j\frac{\chi}{\omega\epsilon})}$ komplexe Wellenzahl

Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt

I) $\omega_e = \omega_r = \omega_t = \omega$ (gleiche Zeitabhängigkeit)

II) $\vec{k}_e \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_0$ für $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ Grenzfläche (gleiche Ortsabhängigkeit)

$$\Rightarrow \alpha_e = \alpha_r = \alpha_1 \quad (\text{Reflexionsgesetz})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{k_2}{k_1} \quad (\text{Brechungsgesetz})$$

Wiederholung: Die Fresnelschen Formeln

für die Amplituden unterscheiden wir 2 orthogonale Polarisationszustände

1) senkrechte Polarisation:

- E-Feld steht senkrecht auf der Einfallsebene
d.h. hier E-Feld hat nur eine X-Komponente
- H-Feld liegt in der Einfallsebene

$$\Gamma_s = \frac{E_r^{(s)}}{E_e^{(s)}} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$
$$t_s = \frac{E_t^{(s)}}{E_e^{(s)}} = \frac{2 Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

2) parallele Polarisation

- E-Feld liegt in der Einfallsebene (parallel)
- H-Feld steht senkrecht dazu

Wir erhalten

$$\Gamma_p = \frac{E_r^{(p)}}{E_e^{(p)}} = \frac{Z_1 \cos \alpha_1 - Z_2 \cos \alpha_2}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$$
$$t_p = \frac{E_t^{(p)}}{E_e^{(p)}} = \frac{2 Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$$

Fresnelsche Formeln für Dielektrika und Brewster-Winkel

Fall I: nichtleitende Medien

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0 \quad k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = \frac{\omega}{c_1}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \frac{\omega}{c_2}$$

Brechungsindex n

$$n_1 = \frac{k_1}{k_0} = \frac{c_0}{c_1} = \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}$$

$n_2 = \text{entsprechend...}$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = Z_0 \frac{\mu_r}{n}$$

Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Fresnelsche Beziehungen ($\mu_1 = \mu_2$)

$$\Gamma_p = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}$$

für
 $n_1 \cos \alpha_1 = n_2 \cos \alpha_2$
wird $\Gamma_p = 0$

$$\Gamma_s = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}$$

α_1 heißt dann
Brewster- oder Polarisationswinkel

Fresnelsche Formeln für Dielektrika

Snelliussches Brechungsgesetz

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1$$

für $n_1 > n_2$ spricht man vom Übergang

optisch dichteres Medium $\rightarrow$ optisch dünneres Medium

$$\Rightarrow \sin \alpha_2 > \sin \alpha_1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_2 > \alpha_1$$

d.h. die transmittierte Welle wird „vom Lotweg“ gebrochen
oder die transmittierte Welle wird zum optisch dichteren
Medium hin gebrochen

$$\text{für } n_1 < n_2 \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$$

transmittierte Welle $\Rightarrow$ „zum Lot hin“

= „zum optisch dichteren Medium“

Totalreflexion

Im Fall $\sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}$ folgt

$$\sin \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ$$

Für $\alpha_1 > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \underline{\alpha_{1,G}}$ ergäbe sich

$$\sin \alpha_2 > 1 \rightarrow \text{nicht möglich}$$

wir beobachten, dass für $\alpha_1 > \alpha_{1,G}$ der

~~Winkel $\alpha_2 = 90^\circ$ bleibt~~

Wir erhalten eine vollständige Reflexion
die sogenannte Totalreflexion

für $\alpha_2 = 90^\circ$ erhalten wir $\cos(\alpha_2) = 0$

$$\Rightarrow \Gamma_p = 1 \text{ und } \Gamma_s = 1$$

Dies bedeutet jedoch nicht, dass die transmittierte Welle verschwindet!

$$\text{bei } \alpha_2 = 90^\circ: \underline{t}_p = 2 \frac{n_1}{n_2} \text{ und } \underline{t}_s = 2$$

für Wellenvektor der transmittierten Welle gilt

$$\underline{\vec{k}}_t = \underline{k}_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \vec{e}_y + \underline{k}_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \vec{e}_z$$

Totalreflexion

$$\text{mit } \sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1$$

$$\text{und } \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1}$$

$$\vec{k}_t = k_2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 \vec{e}_y + k_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1} \cdot \vec{e}_z$$

$$= k_2 \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 \vec{e}_y + j k_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1 - 1} \cdot \vec{e}_z = \beta \vec{e}_y - \gamma \vec{e}_z$$

die transmittierte Welle ist proportional

$$e^{j(\omega t - \beta y)} \cdot e^{-\alpha z} \quad \text{in } z\text{-Richtung gedämpft}$$

Reflexion am idealen Leiter

Fall II Reflexion am idealen Leiter

$$\kappa_2 \rightarrow \infty \text{ und } \kappa_1 = 0$$

$$k_1 = \pm \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$$

$$k_2 = \pm \sqrt{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 \left(1 - j \frac{\kappa_2}{\omega \epsilon_2}\right)} \approx \pm \sqrt{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 \left(-j \frac{\kappa_2}{\omega \epsilon_2}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{-j} \sqrt{\omega \mu_2 \kappa_2} = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_2 \kappa_2}$$

Weiterhin $z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ und $z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 \left(1 - j \frac{\kappa_2}{\omega \epsilon_2}\right)}} \approx \sqrt{j} \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{\kappa_2}}$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{\mu_1 \kappa_2}{\omega \epsilon_1 \mu_2} \right| \gg 1$$

aus dem Brechungsgesetz

$$\cos(\alpha_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_2)} = \sqrt{1 - \underbrace{\frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2 \alpha_1}_{\rightarrow 0}} \approx 1$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow$ transmittierte Welle in z-Richtung

Reflexion am idealen Leiter

für die Amplituden erhalten wir
mit $\cos \alpha_2 = 1$

$$\underline{\Gamma}_s = \frac{\underline{z}_2 \cos \alpha_1 - \underline{z}_1}{\underline{z}_2 \cos \alpha_1 + \underline{z}_1} = \frac{\cos \alpha_1 - \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}}{\cos \alpha_1 + \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}} \approx -1$$

$$\underline{t}_s = \frac{2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}} \approx 0$$

$$\underline{\Gamma}_p = \dots \approx 1$$

$$\underline{t}_p = \dots \approx 0$$

Reflexion am idealen Leiter und Skin-Effekt

d.h. die einfallende Welle wird vollständig reflektiert (Spiegel)

für die transmittierte Welle gilt

$$\vec{k}_t = \underbrace{k_2 \sin \alpha_2}_{\approx 0} \vec{e}_y + \underbrace{k_2 \cos \alpha_2}_{\approx 1} \vec{e}_z \approx k_2 \cdot \vec{e}_z$$

die transmittierte Welle ist also proportional

$$\begin{aligned} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} &\approx e^{j(\omega t - k_2 \vec{e}_z \cdot \vec{r})} = e^{j(\omega t - k_2 z)} \\ &= e^{j(\omega t - (\pm \frac{1-j}{12} \sqrt{\omega \mu_0 k_2}) z)} = \dots \end{aligned}$$

Reflexion am idealen Leiter und Skin-Effekt

$$\dots = e^{j(\omega t + \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \kappa_2}{2}} z)} \cdot e^{\pm \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \kappa_2}{2}} z}$$

wir wählen das $\sqrt{\frac{\omega \mu_2 \kappa_2}{2}}$ so, dass sich eine abklingende Welle ergibt!

$$\dots e^{j(\omega t + \frac{z}{\delta_s})} e^{-\frac{z}{\delta_s}}$$

Wobei $\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \kappa_2}}$

Eindringtiefe bzw.
Skiniefe

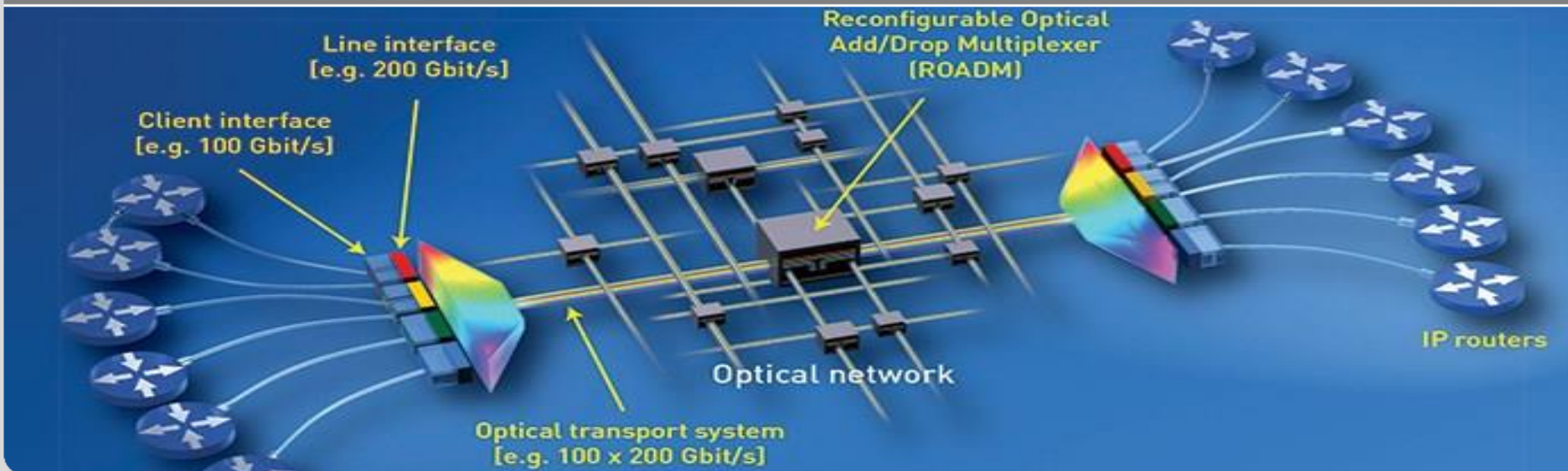
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 7

WS 2019/2020

Reflexion am idealen Leiter und Plattenwellenleiter

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Reflexion am idealen Leiter

Reflexion am idealen Leiter

$\mu_0, \epsilon_0, x=0$
 $x \rightarrow \infty$
 (idealer Leiter)

- Grenzfläche in xz -Ebene
 - Einfallsebene ist die yz -Ebene

Annahme: parallel polarisierte einfallende Welle

$$\vec{E}_e(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0,e} e^{j(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0,r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

Reflexion am idealen Leiter

Wir erhalten die Wellenvektoren

$$\vec{k}_e = k_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{k}_r = k_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega \sqrt{\epsilon_0}$$

Für die Wellenamplituden gilt bei paralleler Polarisation $\Gamma_p = 1$ und $\underline{\epsilon}_p = 0$

$$\vec{E}_{0,e} = E_0 \cdot \vec{e}_{p,e} = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_{0,r} = \Gamma_p E_0 \vec{e}_{p,r} = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Reflexion am idealen Leiter

Für $y > 0$ überlagern sich die Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_e(\vec{r}, t) + \vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} + \vec{E}_0 r e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(\vec{r}, t) \\ E_z(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} E_y(\vec{r}, t) &= E_0 \sin \alpha \left(e^{j(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} + e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \right) \\ &= E_0 \sin \alpha \left(e^{j(\omega t - k_0 \cos \alpha y + \sin \alpha z)} + e^{j(\omega t - k_0 \cos \alpha y - \sin \alpha z)} \right) e^{j\omega t} \\ &= E_0 \sin \alpha \frac{2}{2} \left(e^{jk_0 \cos \alpha y} + e^{-jk_0 \cos \alpha y} \right) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \\ &= 2 E_0 \sin \alpha \cdot \cos(k_0 \cos \alpha y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} = E_{0,y}(y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \end{aligned}$$

inhomogene
ebene Welle
in z -Richtung

Reflexion am idealen Leiter

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_z(\vec{r}, t) &= \underline{E}_0 \cos \alpha \frac{2j}{2j} \left(e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} - e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \right) \\
 &= \dots \\
 &= 2j \underline{E}_0 \cos \alpha \sin(k_0 \sin \alpha y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} = \underline{E}_{0,z}(y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)}
 \end{aligned}$$

das ergibt

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(y) e^{j(\omega t - k_z \cdot z)}$$

mit

$$\vec{E}_0(y) = \underline{E}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \cos(k_y y) \\ j \cos \alpha \sin(k_y y) \end{pmatrix}$$

mit $k_y = k_0 \cdot \cos \alpha$
 $k_z = k_0 \cdot \sin \alpha$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{und} \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

für die Welle in z-Richtung $\Rightarrow$ für reell k_z gilt $\beta_z = k_z \Rightarrow$

Weiterhin gilt mit dem Satz des Pythagoras: $k_0^2 = k_y^2 + k_z^2$

$$v_{ph,z} = \frac{\omega}{k_z}$$

$$\Rightarrow k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_y^2}$$

für k_z reell gilt $\beta_z = k_z$

auflösen nach der Kreisfrequenz

$$\omega(\beta_z) = c_0 \cdot \sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}$$

Ableiten nach β_z

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

$$v_{gr,z} = \frac{d\omega}{d\beta_z} = c_0 \cdot 2\beta_z \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}} = \frac{\beta_z \cdot c_0}{\sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}} = \frac{\beta_z \cdot c_0}{k_0}$$

$$\Rightarrow v_{gr,z} = c_0^2 \cdot \frac{1}{v_{ph,z}} = \frac{\beta_z \cdot c_0^3}{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{gr,z} \cdot v_{ph,z} = c_0^2}$$

mit $v_{ph,z} \geq c_0$ und $v_{gr,z} \leq c_0$ kein Widerspruch zur Relativitätstheorie

Feldlinien und Parallelplattenleitung

Die Feldlinien für $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ergeben sich aus der Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\operatorname{Re}\{E_y(\vec{r}, t)\}}{\operatorname{Re}\{E_z(\vec{r}, t)\}} = -\frac{\sin\alpha \cos(k_y y) \cdot \cos(\omega t - k_z z)}{\cos\alpha \sin(k_y y) \cdot \sin(\omega t - k_z z)}$$

das ergibt Linien konstanter E-Felder für
 $\cos(k_y y) \sin(\omega t - k_z z) = \text{const.}$

mit den Wellenlängen

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \quad \text{und} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} \quad \text{erhalten wir}$$

$$\cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda_y}\right) \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right) = \text{const.}$$

Veranschaulichung
des Ergebnisses mit
Matlab-Beispiel

bei
 $y = n \cdot \frac{\lambda_y}{2}$ ergeben sich

Ebenen, auf welche das E-Feld
senkrecht steht.

⇒ Wir können uns vorstellen,
dass wir in dieser Ebene eine
ideal leitende Platte einziehen
⇒ würde das Feld nicht ändern

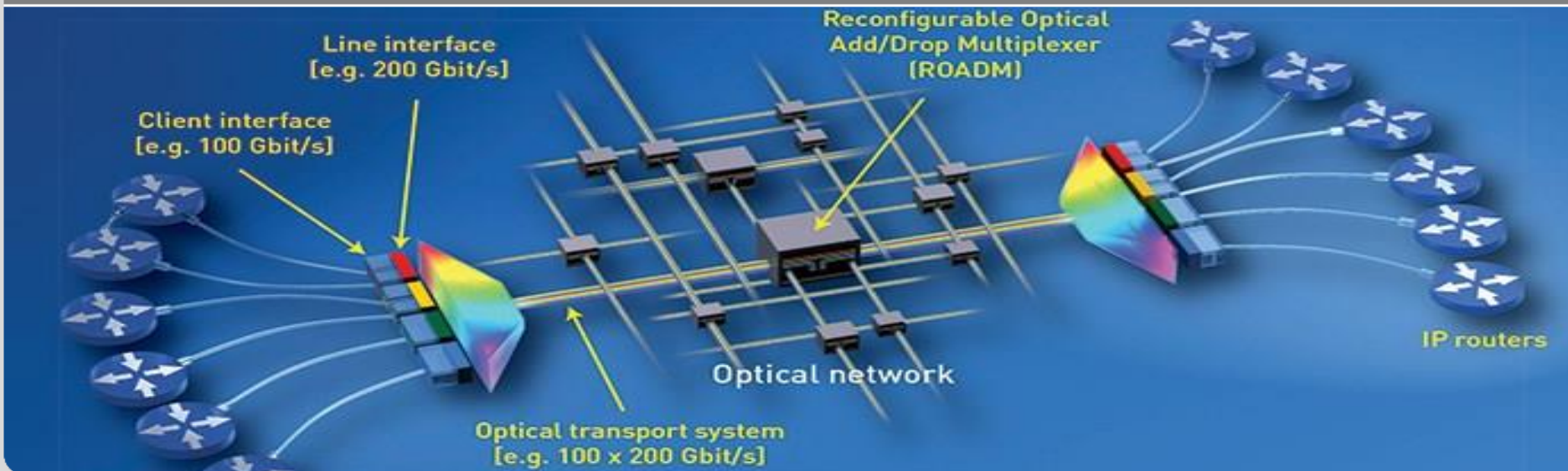
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 8

WS 2019/2020

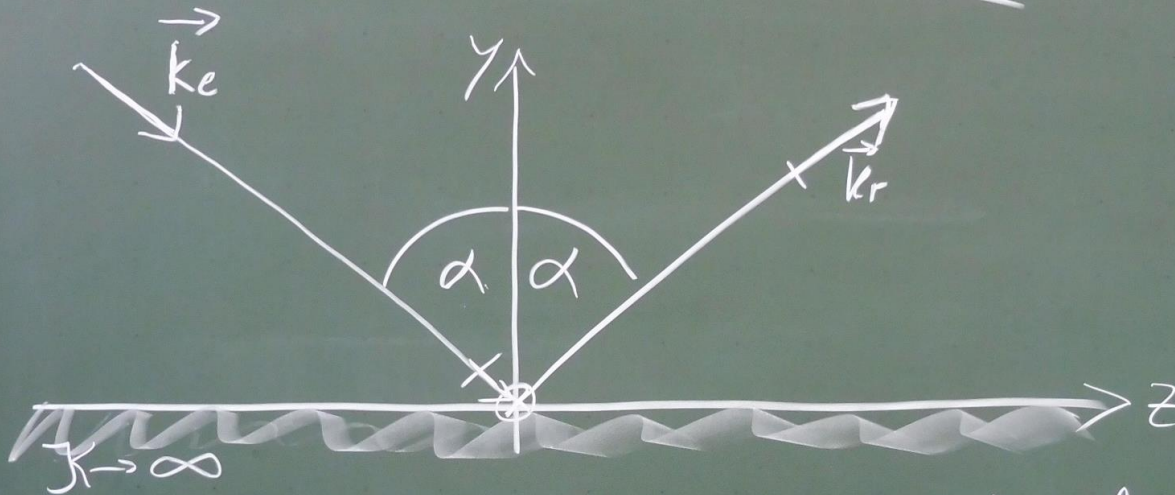
Parallelplattenleitung

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Reflexion am idealen Leiter

Reflexion am idealen Leiter



Für parallele Polarisation ergibt sich das elektrische Feld in der oberen Halbebene als Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle.

Reflexion am idealen Leiter

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(y) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

mit

$$\vec{E}_0(y) = 2E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \cos(k_y y) \\ j \cos \alpha \sin(k_y y) \end{pmatrix}$$

mit den Wellenzahlen

$$k_y = k_0 \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_y} \quad \text{und} \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$\lambda_0 :=$ wellenlänge
im Vakuum

mit dem Satz des Pythagoras gilt

$$k_y^2 + k_z^2 = k_0^2$$

bzw

$$\frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

Reflexion am idealen Leiter

Unter der Annahme, daß k_z reell ist gilt für die Phasenkonstante in z -Richtung

$$\beta_z = k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_y^2}$$

Aufgelöst nach ω erhalten wir

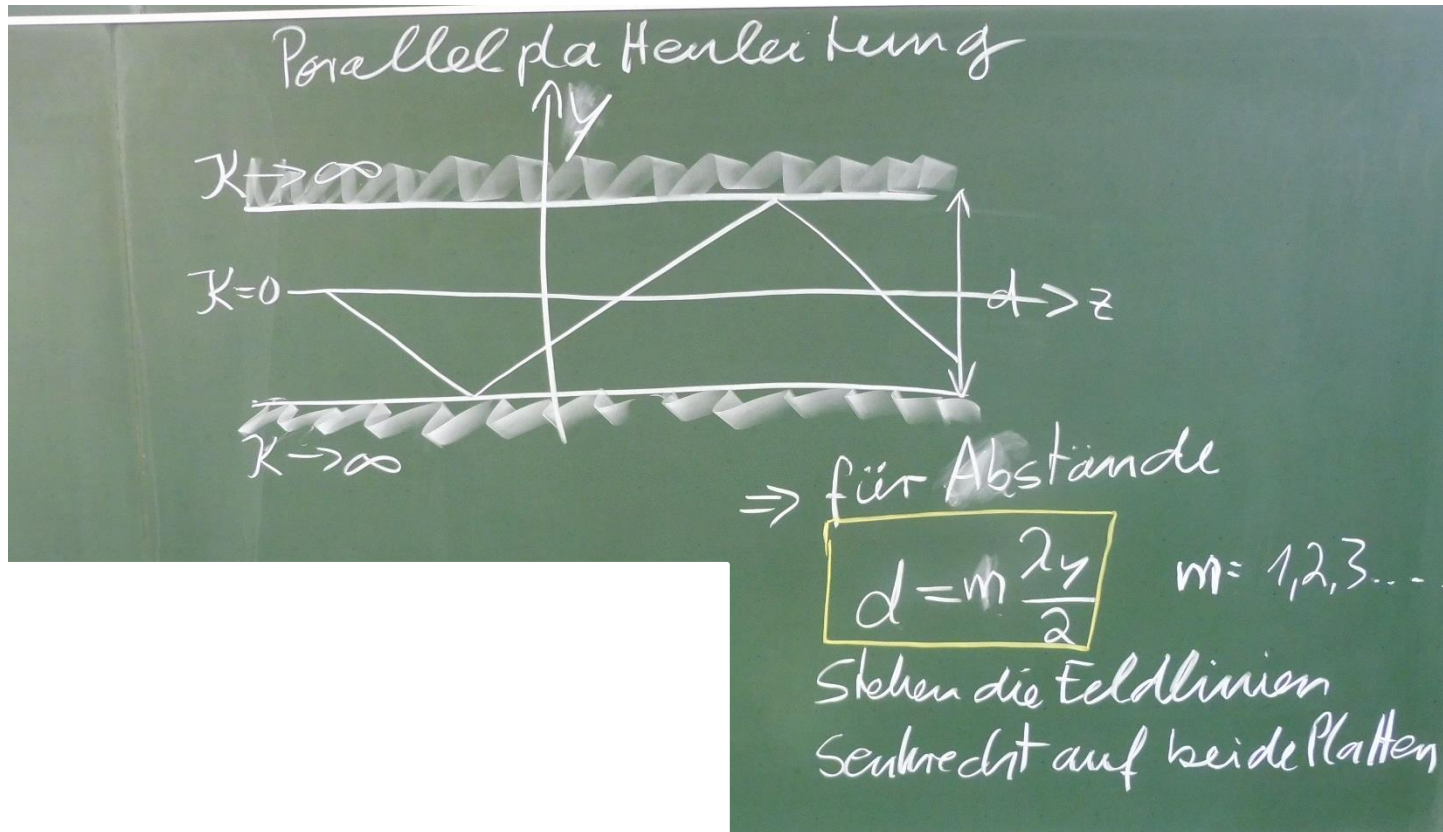
$$\omega(\beta_z) = c_0 \sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}$$

– für Phasengeschwindigkeit gilt $v_{ph,z} = \frac{\omega}{\beta_z}$

– für die Gruppengeschwindigkeit gilt $v_{gr,z} = \frac{d\omega}{d\beta_z} = \frac{\beta_z \cdot c_0}{\sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{v_{ph,z} \cdot v_{gr,z} = c_0^2}$$

Parallelplattenleitung



Parallelplattenleitung

$k_y = \frac{2\pi}{\lambda_z}$ d.h. wir haben in der Parallelplattenleitung

Lösungen für $k_y = m \frac{\pi}{d}$

Und somit

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{k_0^2 - \left(m \frac{\pi}{d}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} - \frac{m^2 \pi^2}{d^2}} = \pi \sqrt{\frac{4}{\lambda_0^2} - \frac{m^2}{d^2}}$$

d.h.

für $\frac{4}{\lambda_0^2} < \frac{m^2}{d^2}$ wird k_z imaginär

d.h. für

$d < \frac{\lambda_0}{2}$ wird die Welle exponentiell gedämpft

Die Feldlinien für das elektrische Feld ergeben sich aus

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\operatorname{Re}\{E_y(\vec{r}, t)\}}{\operatorname{Re}\{E_z(\vec{r}, t)\}}$$

mit Hilfe von $\omega = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0}$

ergibt sich die Grenzfrequenz

$$\omega_c = \frac{2\pi c_0}{\lambda_c} = \frac{\pi c_0}{d} \quad \text{wobei } \lambda_c = \frac{\lambda_0}{2}$$

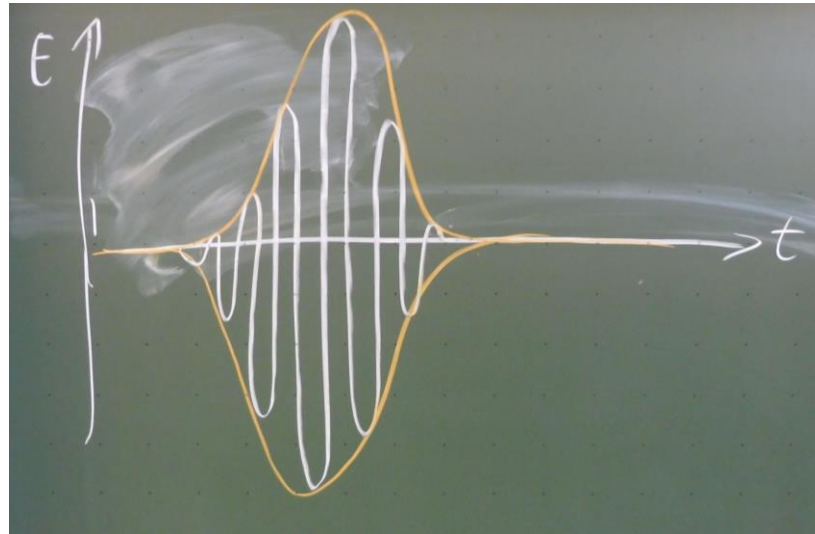
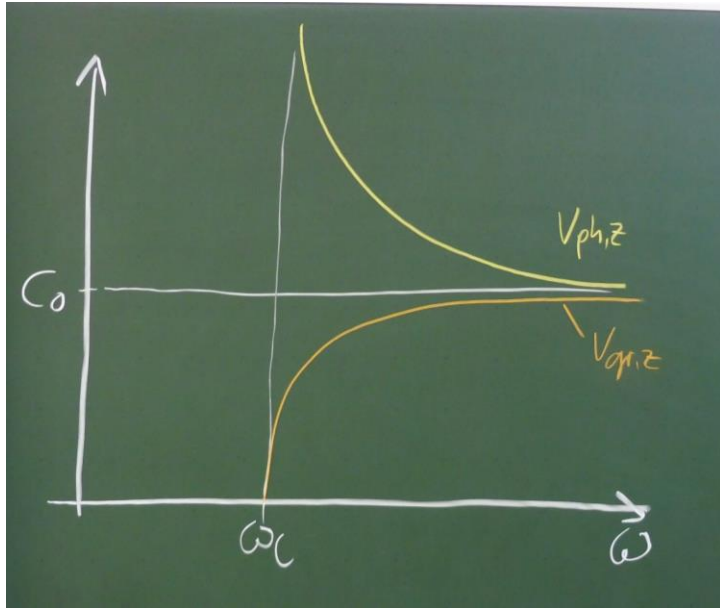
für die Wellenzahl in z-Richtung gilt somit

$$k_z = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

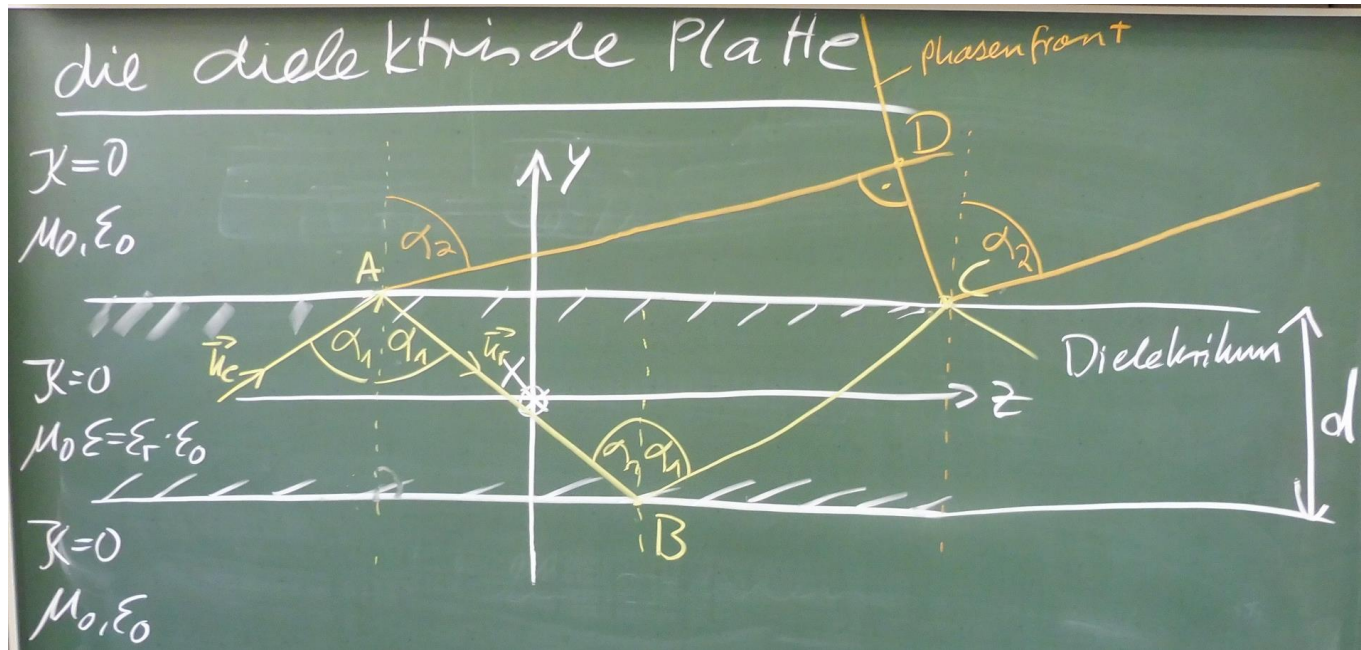
Damit gilt für $\omega > \omega_c$

$$v_{ph,z} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad \text{und} \quad v_{gr,z} = \frac{c_0^2}{v_{ph,z}}$$

Parallelplattenleitung



Dielektrische Plattenleitung



Fresnelsche Beziehungen ($n_2=1$)

$$\Gamma_s = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}$$

$$\Gamma_p = \frac{\cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2}$$

Dielektrische Plattenleitung

Damit sich ein konstantes Wellenbild mit ebener Phasenfront in Richtung $\vec{k}_t$ ergibt, muss gelten, daß die Phasen der transmittierten Wellen an den Punkten C und D bis auf ein Vielfaches von 2π gleich sein müssen.

Die Bedingung lässt sich formulieren als

$$\varphi_r + \overline{AB} \cdot k_1 + \varphi_r + \overline{BC} \cdot k_1 + \varphi_t = \varphi_t + \overline{AD} \cdot k_0^{\text{unatt}}$$

$\uparrow$ Phase des Reflexionskoeffizienten bei A
 $\uparrow$ Ausbreitung von A $\rightarrow$ B
 $\uparrow$ Reflexion bei B
 $\uparrow$ Ausbreitung B $\rightarrow$ C
 $\uparrow$ Transmission bei C
 $\uparrow$ Transmission bei A (A $\rightarrow$ D)

Aus der Geometrie ergibt sich

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos \alpha_1} = \overline{BC}$$

$$\overline{AC} = 2d \tan \alpha_1 \text{ und } \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin \alpha_2$$

Damit ergibt sich die Bedingung für ein konstantes Wellenbild zu

$$2\varphi_r + k_1(\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{AD}k_0 + m \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\varphi_r + \frac{2dk_1}{\cos\alpha_1} = \frac{2dk_0n_1}{\cos\alpha_1} \cdot \sin^2\alpha_1 + m \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \varphi_r = \frac{1}{2} \frac{2dk_1}{\cos\alpha_1} (\sin^2\alpha_1 - 1) + m \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi_r = dk_1 \cos\alpha_1 + m \cdot 2\pi}$$

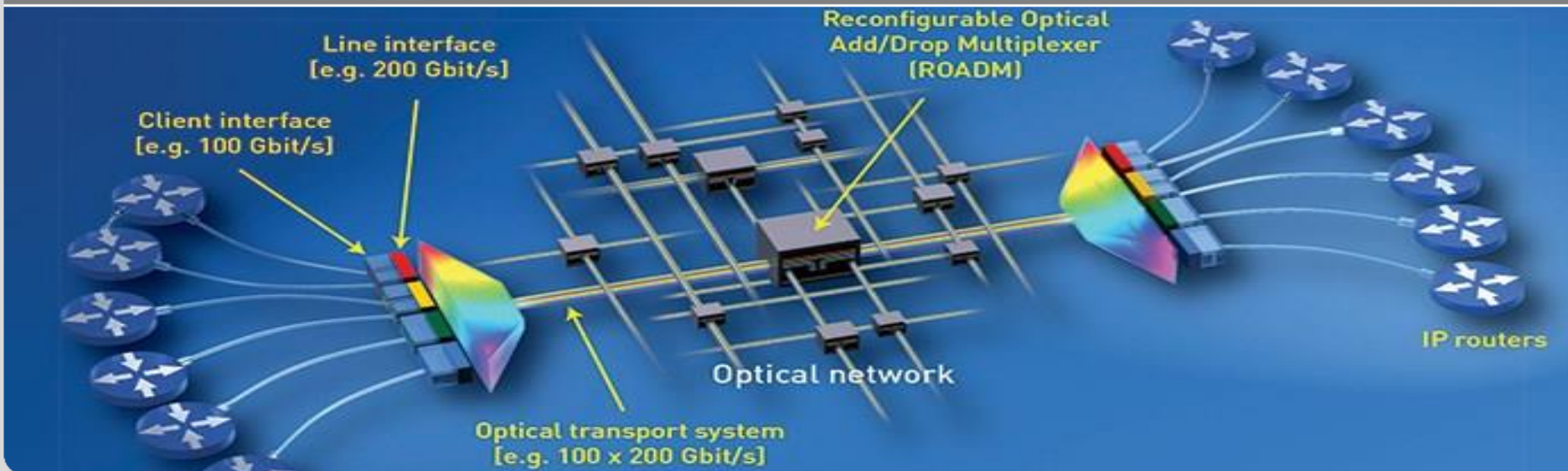
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 9

WS 2019/2020

Dielektrische Platte

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (Exkurs)

Zeitharmonische Ebene Welle in z-Richtung

$$\vec{E}_0(z,t) = \vec{E}_0 \exp(j(\omega_0 t - \beta_0 z))$$

Phasengeschwindigkeit $v_{ph,0} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$

damit gilt $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \exp(j\omega_0(t - \frac{z}{v_{ph,0}}))$

Gruppengeschwindigkeit $v_{gr,0} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_0}$

betrachten wir zwei ebene Wellen

$$\vec{E}_1(z,t) = \vec{E}_1 \exp(j\omega_1(t - \frac{z}{v_{ph1}}))$$

$$\vec{E}_2(z,t) = \vec{E}_2 \exp(j\omega_2(t - \frac{z}{v_{ph2}}))$$

mit

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$$

mit

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \quad \beta_1 = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$$
$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \quad \beta_2 = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$$
$$\Rightarrow v_{ph1} = \frac{\omega_1}{\beta_1} \quad \text{und} \quad v_{ph2} = \frac{\omega_2}{\beta_2}$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (Exkurs)

Überlagerung der Wellen $\underline{E}_1$ und $\underline{E}_2$

$$\underline{E}_{12}(z,t) = \underline{\vec{E}}_1 \exp\left(j\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}\right)z\right) + \underline{E}_2 \exp\left(j\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}\right)z\right)$$

mit $\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_2 = 1$ gilt

$$\underline{E}_{12}(z,t) = \left[\exp\left(j\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right)\right) + \exp\left(j\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right)\right) \right] \exp\left(j(\omega_0 t - \beta_0 z)\right) \\ = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta\beta z)\right) \exp\left(j(\omega_0 t - \beta_0 z)\right)$$

Dabei wird

$$A_{12}(z,t) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta\beta z)\right) \\ = 2 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega\left(t - \frac{z}{v_{gr}}\right)\right)$$

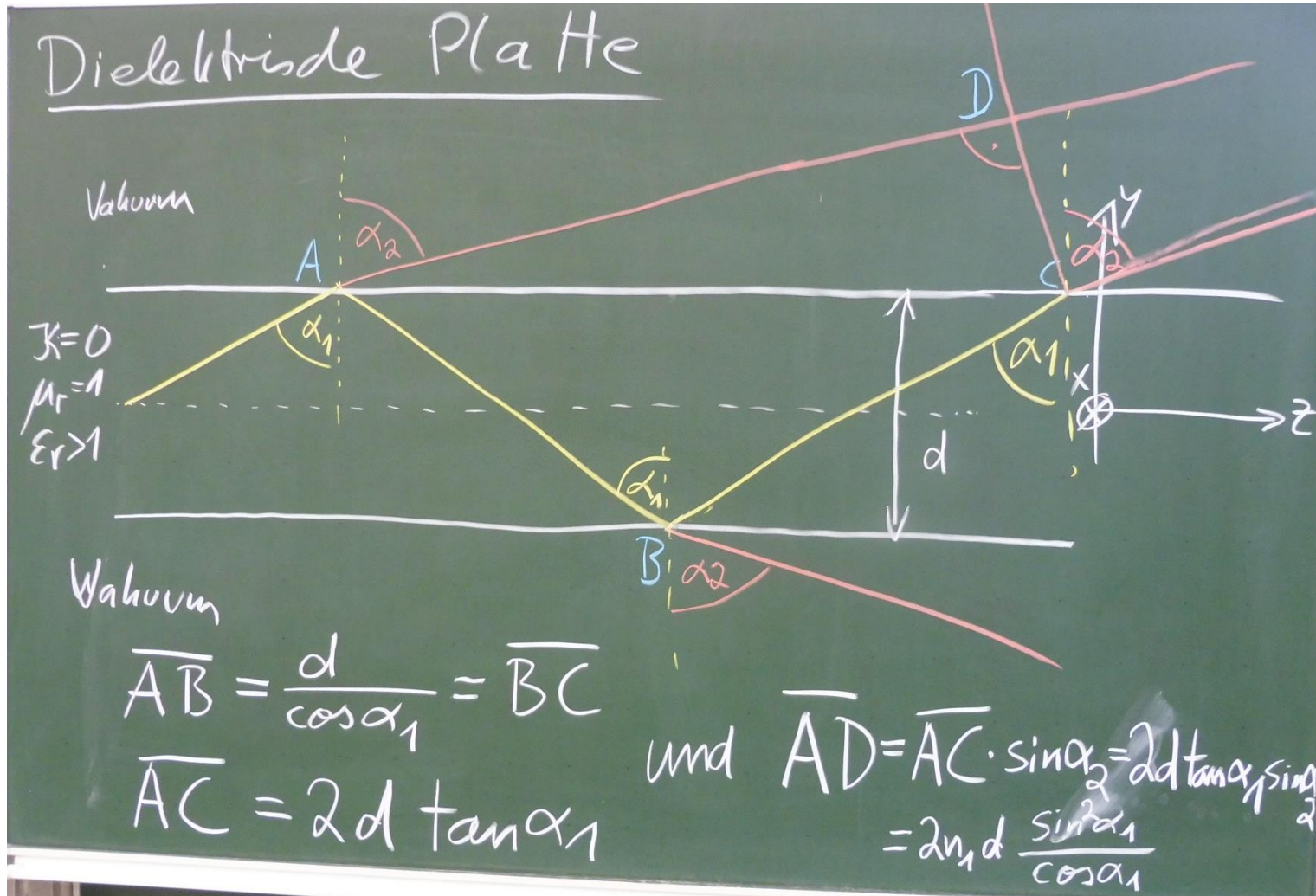
als Einhüllende bezeichnet

für $\underline{E}_0 = 1$ gilt

$$A_{12}(z,t) = \underline{E}_{12}(z,t) \cdot \underline{E}_0^*(z,t)$$

Veranschaulichung
in Matlab-Beispiel

Die dielektrische Platte



Die dielektrische Platte

im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

im Dielektrikum: $k_1 = \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c_0} \cdot n_1 = k_0 \cdot n_1$

Brechzahl: $n_1 = \sqrt{\epsilon_r}$

Brechungsgesetz $\sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1$

Fresnelsche Beziehungen

$$\Gamma_s = \frac{A - B}{A + B} \quad \text{und} \quad \underline{t}_s = \frac{2A}{A + B}$$

Die dielektrische Platte

Damit sich ein konstantes Wellenbild
in z-Richtung ergibt müssen die
Phasen bei A, C und D bis auf ein
Vielfaches von 2π identisch sein!

mit der Phase $\varphi_r = \arg(\underline{r})$

$\varphi_t = \arg(\underline{t})$

$m := \text{ganzzahlig}$

$$\varphi_t + k_0 \overline{AD} = \varphi_r + k_1 \overline{AB} + \varphi_r + k_1 \overline{BC} + \varphi_t + m 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\varphi_r = k_0 \overline{AD} - 2k_1 \overline{AB} - m 2\pi$$

$$\Rightarrow \varphi_r = \frac{k_0}{2} 2d n_1 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\cos \alpha_1} - n_1 k_0 \frac{d}{\cos \alpha_1} - m \cancel{2\pi}$$

Der Faktor 2 ist hier zu viel vorhanden!

Die dielektrische Platte

Fall A: keine Totalreflexion

$$\alpha_1 < \alpha_{1G} = \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1 < 1$$

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} \text{ ist reell}$$

Damit ist $\varphi_r = 0$!

und die Bedingung

$$\frac{n_1 k_0 \cdot d}{\cos \alpha_1} \underbrace{(\sin^2 \alpha_1 - 1)}_{-\cos^2 \alpha_1} = m \cdot \pi$$

$$\Rightarrow -n_1 k_0 d \cos \alpha_1 = m \cdot \pi$$

$\Rightarrow$ Innerhalb der Platte $\Rightarrow$ exponentielle Dämpfung

Fall A: exponentielle Dämpfung der Welle, da bei jedem Auftreffen auf die Grenzfläche ein Teil transmittiert wird (nach außen „leckt“)

Fall B: Welle wird vollständig geführt und breitet sich im Idealfall verlustfrei aus (im Realfall ist auch das Wellenleitermaterial selbst verlustbehaftet, z.B. kommt es zur teilweisen Absorption der Welle)

Fall B: mit Totalreflexion

$$\alpha_1 \geq \alpha_{1G}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} \text{ ist Null oder imaginär}$$

Für die Reflexion ergibt sich

$$\varphi_{rs} = -2 \arctan\left(\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{n_1 \cos \alpha_1}\right)$$

(ohne Vorzeichen)

Für die konstante Wellenfunktion muss gelten

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{n_1 \cos \alpha_1}\right) = \frac{d n_1 k_0}{2} \cos \alpha_1 - m \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha_1 - 1} = n_1 \cos \alpha_1 \tan\left(\frac{d n_1 k_0}{2} - m \frac{\pi}{2}\right)$$

Eigenwertgleichung

ist nur für diskrete Winkel α_1 erfüllt!

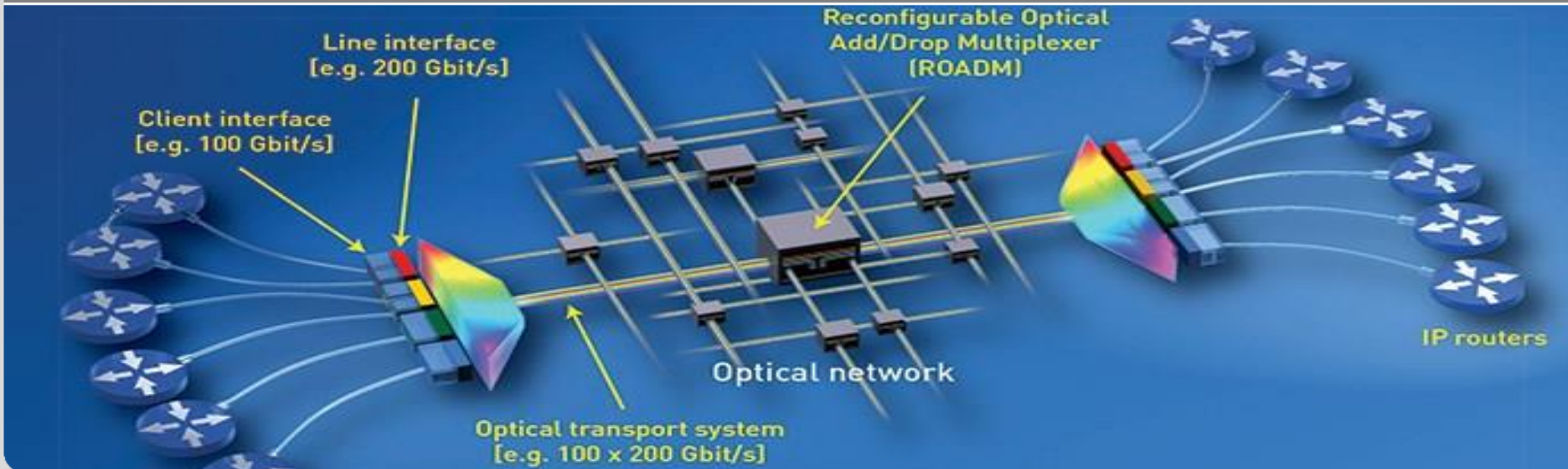
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 10

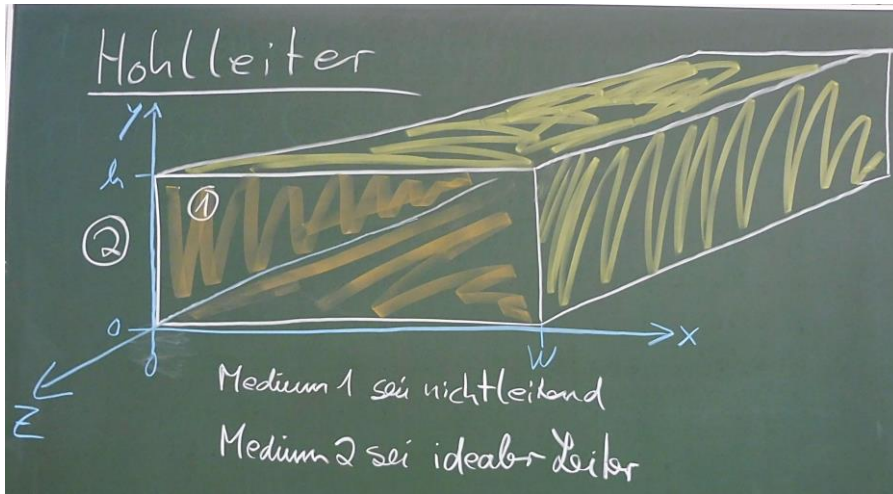
WS 2019/2020

Hohlleiter

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Hohlleiter im Überblick



Analog zur senkrechten bzw. parallelen Polarisation in der Parallelplattenleitung unterscheiden wir:

- 1) E-Wellen: Nur die elektr. Feldstärke hat eine Komponente in z -Richtung.
Die magn. Feldstärke hat nur Komponenten transversal zur Ausbreitungsrichtung
→ Sie werden auch transversal magnetische (TM) Wellen genannt

- 2) H-Wellen: Nur die magn. Feldstärke hat eine z -Komponente
Die el. Feldstärke ist rein transversal.
→ transversal elektrische (TE) Welle
- 3) keine z -Komponente
→ transversal elektro-magnetisch (TEM) Welle

Ausbreitung von E-Wellen im Hohlleiter

- Wir können ein Vektorpotential annehmen

$$\vec{A}^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^E \end{pmatrix} = A^E \cdot \vec{e}_z$$

- Im folgenden seien alle Feldgrößen zeitharmonisch
komplexe Amplituden ($e^{j\omega t}$ ist weggelassen)
 $\Rightarrow$ zur Vereinfachung wird der Unterstrich weggelassen!

Ausbreitung von E-Wellen im Hohlleiter

• Für die magn. Feldstärke

$$\vec{H}^E = \nabla \times \vec{A}^E = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^E \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\partial A^E}{\partial y}}_{=H_x^E} \vec{e}_x - \underbrace{\frac{\partial A^E}{\partial x}}_{=H_y^E} \vec{e}_y$$

• Die elektrische Feldstärke folgt aus dem Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned} j\omega \varepsilon \vec{E}^E &= \nabla \times \vec{H}^E = -\frac{\partial H_y^E}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial H_x^E}{\partial z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial H_y^E}{\partial x} - \frac{\partial H_x^E}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial^2 A^E}{\partial x \partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 A^E}{\partial y \partial z} \vec{e}_y - \left(\frac{\partial^2 A^E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^E}{\partial y^2} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Ausbreitung von E-Wellen im Hohlleiter

Das Vektorpotential muss die Wellengleichung erfüllen (hier: Helmholtzgleichung)

$$\Delta A^E + k^2 A^E = 0$$

mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$

Für in z -Richtung geführte Wellen können wir den Ansatz wählen

$$A^E(x, y, z) = A_t^E(x, y) e^{-jk_z z}$$

für k_z reell $\Rightarrow$ ungedämpfte Welle
für k_z imaginär $\Rightarrow$ gedämpfte Welle

Ausbreitung von E-Wellen im Hohlleiter

eingesetzt in die Wellengleichung

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}_{\Delta_t} A_t^E e^{-jk_z z} - A_t^E \cdot k_z^2 e^{-jk_z z} + k^2 A_t^E e^{-jk_z z} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_t A_t^E + K^2 A_t^E = 0}$$

wobei $K^2 = k^2 - k_z^2$

Für die elektrische Feldstärke erhalten wir

$$j\omega\epsilon \vec{E}^E = \nabla \times \vec{H}^E = -jk_z \frac{\partial A_t^E}{\partial x} \vec{e}_x - jk_z \frac{\partial A_t^E}{\partial y} \vec{e}_y - \Delta_t A_t^E \vec{e}_z$$

mit der Wellengleichung für A_t^E :

$$j\omega\epsilon \vec{E}^E = -jk_z \left(\frac{\partial A_t^E}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial A_t^E}{\partial y} \vec{e}_y \right) e^{-jk_z z} + \underbrace{K^2 A_t^E}_{E_z^E \sim A_t^E} e^{-jk_z z} \vec{e}_z = 0$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

Um eine Lösung für $A_t^E(x, y)$ zu finden
lösen wir die Wellengleichung mit dem
Produktansatz von Bernoulli

$$A_t^E(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

eingesetzt erhalten wir

$$\Delta_t A_t^E + K^2 A_t^E = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \cdot Y(y) + X(x) \cdot \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + K^2 X(x) Y(y) = 0$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

beide Seiten durch $X \cdot Y$ teilen

$$\boxed{\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + K^2 = 0}$$

Diese Gleichung lässt sich separieren in

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 = 0$$

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{mit } K^2 &= k_x^2 + k_y^2 \\ &= k^2 - k_z^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

die Gleichungen ergeben

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y = 0$$

mit den Lösungen

$$X(x) = \begin{cases} a \cos(k_x x) + b \sin(k_x x) & \forall k_x \neq 0 \\ d_0 + b_0 x & \forall k_x = 0 \end{cases}$$

$$Y(y) = \begin{cases} c \cos(k_y y) + d \sin(k_y y) & \forall k_y \neq 0 \\ c_0 + d_0 y & \forall k_y = 0 \end{cases}$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

Randbedingungen

tangentiale Komponenten des E -Feldes müssen an der Grenzfläche zum idealen Leiter verschwinden!

- Im Hohlleiter ist die E_z Komponente tangential auf alle Grenzflächen
- Wir haben $E_z^E \sim A_t^E$ daraus folgt

$$A_t^E = 0 \quad \text{für } x=0, w \text{ und } y=0, h$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

da $X(x=0) = X(x=w) = 0$

folgt

$$a_0 = b_0 = a = 0 \quad b = b_m$$

und wir erhalten $k_x w = m\pi \quad m=1,2,3,\dots$

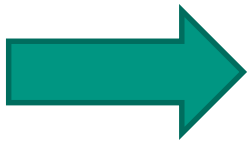
$$\Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{w}$$

analog erhalten wir für $Y(y)$

mit $Y(y=0) = Y(y=h) = 0$

$$\Rightarrow c_0 = d_0 = c = 0 \quad d = d_n$$

$$k_y h = n\pi \quad \text{mit } n=1,2,3,\dots$$
$$k_y = \frac{n\pi}{h}$$



für das transversale Vektorpotential

$$A_t^E(x,y) = a_m b_n \sin\left(\frac{m\pi}{w}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right)$$

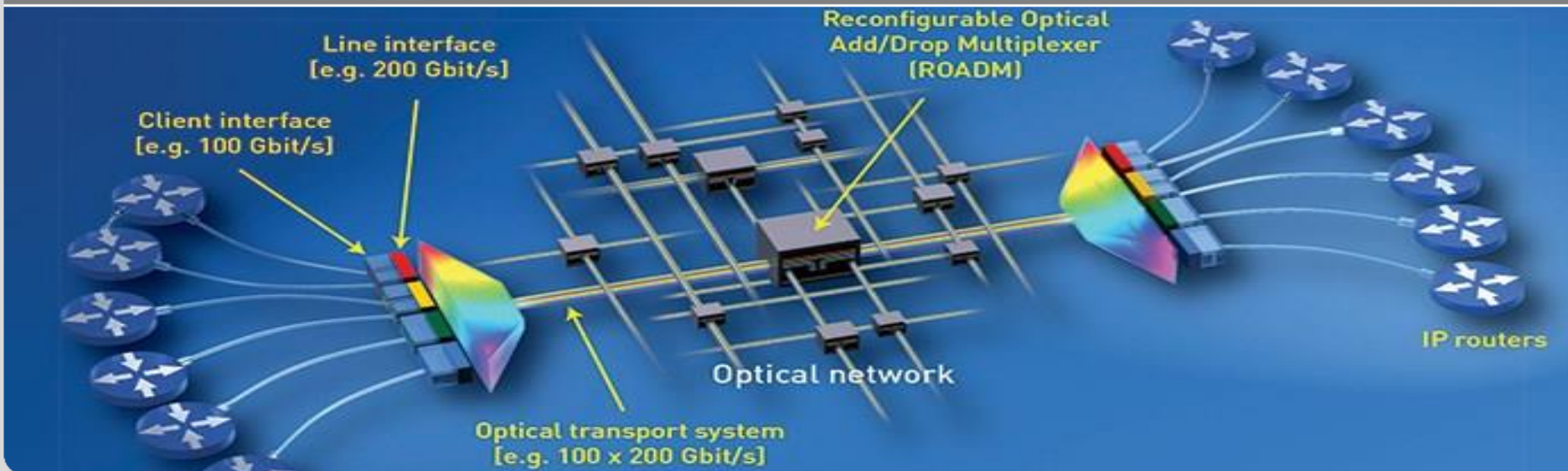
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 11

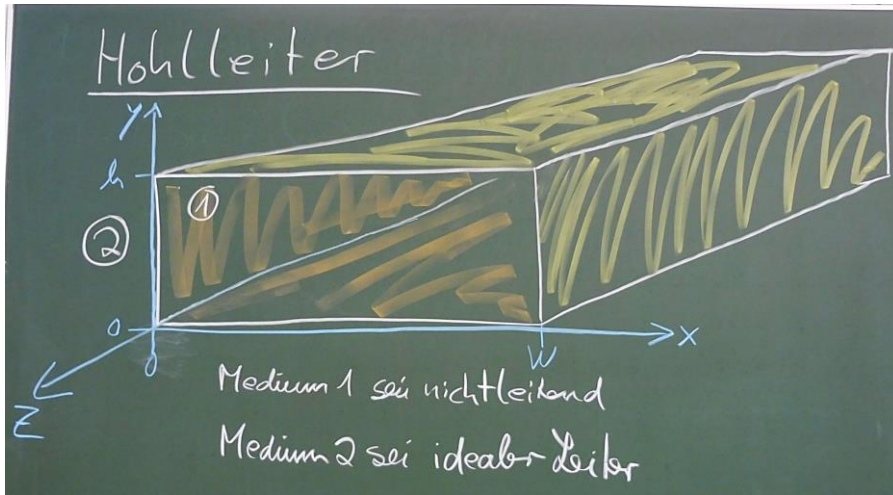
WS 2019/2020

Hohlleiter

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Hohlleiter im Überblick



- Wellenausbreitung beschrieben durch die Maxwell'schen Gleichungen
- Für die Feldkomponenten $\vec{E}$ und $\vec{H}$ kann gezeigt werden, dass nur zwei Feldkomponenten unabhängig sind.
- Es können z.B. die Feldkomponenten E_z und H_z als gegeben angenommen werden.

• Die transversalen Feldkomponenten E_x, E_y, H_x, H_y können daraus abgeleitet werden.

Wellentypen im Hohlleiter

Wir können folgende Wellentypen unterscheiden

1) H-Wellen

- Nur das H-Feld hat z-Komponente
D.h. $E_z = 0$
- Das E-Feld hat nur transversale Komponenten
 $\Rightarrow$ TE-Welle

2) E-Wellen

- Nur das E-Feld hat eine z-Komponente
- Das H-Feld ist rein transversal
 $\Rightarrow$ TM-Welle

3) Sonderfall: TEM-Wellen

- Beide longitudinalen Komponenten verschwinden

4) Im allgemeinen Fall ergibt sich ein
$$\vec{H} = \vec{H}^E + \vec{H}^H \quad \text{und} \quad \vec{E} = \vec{E}^E + \vec{E}^H$$

also eine Überlagerung von E- und H-Wellen
 $\Rightarrow$ Hybridwellen

Wellenausbreitung von H-Wellen

E-Wellen

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x^E \\ E_y^E \\ E_z^E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} H_x^E \\ H_y^E \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorpotential $\vec{A}^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^E \end{pmatrix}$

$$\nabla \times \vec{A}^E = \vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A^E}{\partial y} \\ -\frac{\partial A^E}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und E-Wellen im Hohlleiter

H-Wellen

$$\vec{E}^H = \begin{pmatrix} E_x^H \\ E_y^H \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{H}^H = \begin{pmatrix} H_x^H \\ H_y^H \\ H_z^H \end{pmatrix}$$

Vektorpotential $\vec{A}^H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^H \end{pmatrix}$

$$\nabla \times \vec{A}^H = \vec{E}^H = \begin{pmatrix} \frac{\partial A^H}{\partial y} \\ -\frac{\partial A^H}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wellenausbreitung im Hohlleiter

aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt
im Inneren des Hohlleiters

$$j\omega\epsilon \vec{E} = \nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}^E)$$

und

$$-j\omega\mu \vec{H} = \nabla \times \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}^H)$$

D.h. Für E-Wellen können alle 5 Feldkomponenten
aus $\vec{A}^E$ abgeleitet werden

Für H-Wellen aus $\vec{A}^H$

Die skalaren Größen $\vec{A}^E$ und $\vec{A}^H$ müssen
die Helmholtzgleichung erfüllen

$$\Delta \vec{A}^E + k^2 \vec{A}^E = 0 \quad \text{wobei } k^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\Delta \vec{A}^H + k^2 \vec{A}^H = 0$$

Für geführte Wellen gilt

$$\vec{A}^E(x, y, z) = \vec{A}^E(x, y) e^{\mp jk_z^E z}$$

$$\vec{A}^H(x, y, z) = \vec{A}^H(x, y) e^{\mp jk_z^H z}$$

eingesetzt in die Helmholtzgleichung
ergibt sich

$$\text{aus } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{A}^E + k^2 \vec{A}^E = 0$$

$$\text{wird } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{A}^E - k_z^2 \vec{A}^E + k^2 \vec{A}^E = 0$$

$$\text{bzw. } \Delta_t \vec{A}^E(x, y) + K^E \vec{A}^E(x, y) = 0 \quad \text{mit } K^E = k^2 - k_z^2$$

$$\Delta_t \vec{A}^H(x, y) + K^H \vec{A}^H(x, y) = 0 \quad \text{mit } K^H = k^2 - k_z^2$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

Mit dem Produktansatz von Bernoulli
(Separation der Variablen)

$$A^{E/H}(x, y) = X^{E/H}(x) \cdot Y^{E/H}(y)$$

Damit lässt sich die 2D-Helmholtzgleichung schreiben als

$$\frac{\partial^2 X^{E/H}}{\partial x^2} + K_x^{E/H^2} X^{E/H} = 0$$

$$\Rightarrow K^{E/H^2} = K_x^{E/H^2} + K_y^{E/H^2}$$

$$\frac{\partial^2 Y^{E/H}}{\partial y^2} + K_y^{E/H^2} Y^{E/H} = 0$$

$$= K^{E/H^2} - K_z^{E/H^2}$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

Die Gleichungen werden gelöst durch

$$X^{E/H}(x) = \begin{cases} a^{E/H} \cos(k_x^{E/H} x) + b^{E/H} \sin(k_x^{E/H} x) & \forall k_x \neq 0 \\ a_0^{E/H} + b_0^{E/H} x & \forall k_x = 0 \end{cases}$$

$$Y^{E/H}(y) = \begin{cases} c^{E/H} \cos(k_y^{E/H} y) + d^{E/H} \sin(k_y^{E/H} y) & \forall k_y \neq 0 \\ c_0^{E/H} + d_0^{E/H} y & \forall k_y = 0 \end{cases}$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

Die Koeffizienten a, b, c, d bzw. a_0, b_0, c_0, d_0 und k_x, k_y werden aus den Randbedingungen bestimmt

1) E-Wellen: an den Grenzflächen müssen die tangentialen E-Feld Komponenten verschwinden. D.h. an den Grenzflächen muss die E_z Komponente verschwinden!

Bei geführten Wellen gilt $E_z \sim A^E$

$$\text{d.h. } E_z(x, y) \sim A^E(x, y) = X^E(x) \cdot Y^E(y)$$

Produktansatz von Bernoulli (Separation der Variablen)

für $x=0$ und $x=w$ muss also gelten

$$X^E(x=0) = X^E(x=w) = 0$$

$\Rightarrow a_0^E = b_0^E = 0$ und $a^E = 0$
und $b^E = b_m^E$ mit $k_{x,m}^E = m \frac{\pi}{w}$ mit
 $m=1,2,3,\dots$

in y -Richtung

$$Y^E(y=0) = Y^E(y=h) = 0$$

Für die Koeffizienten gilt

$$c^E = c_0^E = d_0^E = 0 \text{ und } d^E = d_m^E \text{ und } k_y^E = n \frac{\pi}{h}$$
$$\Rightarrow E_z^E(x,y) \sim A^E(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}^E \sin\left(m \frac{\pi}{w} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{h} y\right)$$

Wir sprechen von E_{mn} Moden

Ausbreitungskonstante und Cut-off-Frequenz

Für die Ausbreitungskonstante gilt

$$K_{mn}^E = k^2 - k_{z_{m,n}}^E = k_{x_{m,n}}^E + k_{y_{m,n}}^E$$

für die z-Richtung gilt

$$k_{z_{m,n}} = \sqrt{k^2 - (k_{x_{m,n}}^2 + k_{y_{m,n}}^2)}$$

wann wird $k_{z_{m,n}}$ rein reell? oder: Wann ist die Ausbreitung verlustlos?

$$\text{für } k > k_{g_{m,n}}^E = \sqrt{k_{x_{m,n}}^E + k_{y_{m,n}}^E} = \frac{\omega_{g_{m,n}}}{c}$$

Ausbreitungskonstante und Cut-off-Frequenz

wird $k_{z,m,n}$ positiv und die Ausbreitung verlustlos.

Damit ergibt sich eine untere Grenzfrequenz

$$\omega_{g_{m,n}}^E = c \sqrt{k_{x_{m,n}}^2 + k_{y_{m,n}}^2} = c \sqrt{\left(m \frac{\pi}{w}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{h}\right)^2}$$

Die Hohlleiterwellenlänge ist

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \frac{2\pi c}{\omega_{g_{m,n}}^E} = \frac{2\pi}{c \sqrt{k_{x_{m,n}}^2 + k_{y_{m,n}}^2}} = \frac{2\pi}{c \sqrt{k^2 - k_{z_{m,n}}^2}} \\ &= \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_{z_{m,n}}^2}{k^2}}} = \frac{\lambda}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{k_{z_{m,n}}^2}{k^2}}}_{\leq 1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{m,n} \geq \lambda$$

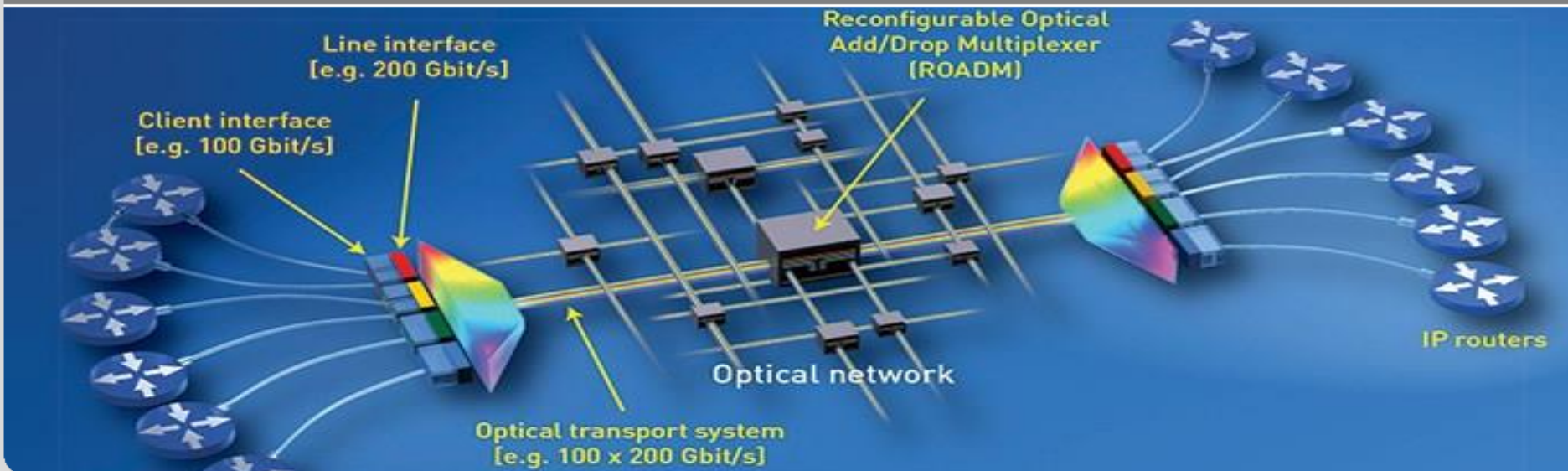
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 12

WS 2019/2020

Zylindrische Wellenleiter

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Wellenleiter und Vektorpotential

Wellenleiter

- Ausbreitung in z -Richtung
- Querschnitt ändert sich in z -Richtung nicht
- In diesem Fall existieren nur 2 unabhängige Feldkomponenten
- In den meisten Fällen ist es sinnvoll E-Wellen und H-Wellen zu unterscheiden

- Es können Vektorpotentiale definiert werden

$$\vec{H}^E = \nabla \times \vec{A}^E$$

$$\vec{E}^H = \nabla \times \vec{A}^H$$

mit

$$\vec{A}^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_T^E e^{-jk_z z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}^H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_T^H e^{-jk_z z} \end{pmatrix}$$

Mit den Maxwell'schen Gleichungen

d.h. k_z reell, breitet sich die Welle ungedämpft aus!

$$\nabla \times \vec{H}^E = j\omega \epsilon \underbrace{\left(1 - j\frac{\chi}{\omega \epsilon}\right)}_{=\epsilon} \vec{E}^E = j\omega \epsilon \vec{E}^E$$

$$\nabla \times \vec{E}^H = -j\omega \mu \vec{H}^H$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E}^E = -j\omega \mu \vec{H}^E = -j\omega \mu (\nabla \times \vec{A}^E)$$

$$\nabla \times \vec{H}^H = j\omega \epsilon \vec{E}^H = j\omega \epsilon (\nabla \times \vec{A}^H)$$

Wellenleiter und Vektorpotential

Diese Gleichungen ergeben

$$\vec{E} = -j\omega\mu \vec{A}^E + \nabla\phi^E$$

$$\vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{A}^H + \nabla\phi^H$$

Skalarpotentiale
mache
 $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

da das Medium quellenfrei ist
d.h. $S=0$

Lorenz-Eichung

$$j\omega\varepsilon \phi^E = \nabla \cdot \vec{A}^E$$

$$-j\omega\mu \phi^H = \nabla \cdot \vec{A}^H$$

Ferner gilt

$$\nabla \times \vec{H}^E = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}^E) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}^E) - \Delta \vec{A}^E = j\omega\varepsilon \vec{E}^E = \omega^2\mu\varepsilon \vec{A}^E + j\omega\varepsilon \nabla\phi^E$$

$$\nabla \times \vec{E}^H = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}^H) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}^H) - \Delta \vec{A}^H = -j\omega\mu \vec{H}^H = \omega^2\mu\varepsilon \vec{A}^H - j\omega\mu \nabla\phi^H$$

mit der Lorenz-Eichung erhalten wir

$$\Delta \vec{A}^E + k^2 \vec{A}^E = 0$$

Wellengleichungen

$$\Delta \vec{A}^H + k^2 \vec{A}^H = 0$$

mit $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

und es gilt

$$j\omega\varepsilon \vec{E}^E = k^2 \vec{A}^E + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}^E)$$

$$-j\omega\mu \vec{H}^H = k^2 \vec{A}^H + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}^H)$$

Wellenleiter und Vektorpotential

mit $\vec{A}^E = A_T^E e^{-jk_z z} \vec{e}_z$ A_T^E und A_T^H
 $\vec{A}^H = A_T^H e^{-jk_z z} \vec{e}_z$ hängen nur von transversalen Koordinaten ab.

Eingesetzt in die Wellengleichungen

$$\Delta A_T^E e^{-jk_z z} \vec{e}_z + k^2 A_T^E e^{-jk_z z} \vec{e}_z = 0$$
$$\Leftrightarrow [\Delta_T A_T^E \vec{e}_z - k_z^2 A_T^E \vec{e}_z + k^2 A_T^E \vec{e}_z] e^{-jk_z z} = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta_T A_T^E + (k^2 - k_z^2) A_T^E = 0 \quad (2D\text{-Helmholtzgleichung})$$

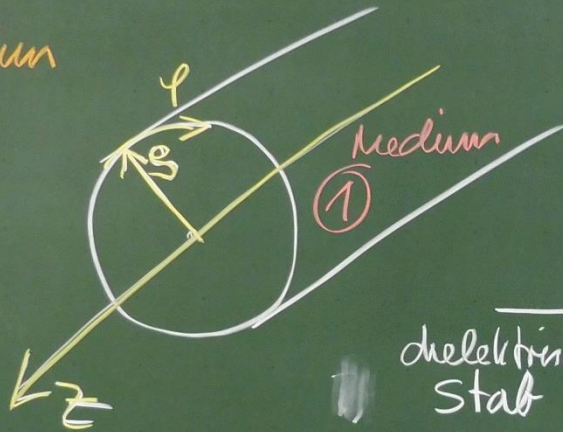
entsprechend gilt

$$\Delta_T A_T^H + (k^2 - k_z^2) A_T^H = 0 \quad (2D\text{-Helmholtzgleichung})$$

Das zylindrische Zweischichtproblem

Das zylindrische Zweischichtproblem

Medium
②



dielektrischer
Stab

ideal leitender
Rundhohlleiter

Sommerfeld
drift

Medium ①

Medium ②

$$K_1=0, \mu_1=\mu_0, \epsilon_1$$

$$K_2=0, \mu_2=\mu_0, \epsilon_2$$

$$K_1=0, \mu_1=0, \epsilon_1$$

$$K_2=\infty$$

$$K_1=\infty$$

$$K_2=0, \mu_2=\mu_0, \epsilon_2 \neq \epsilon_0$$

in Zylinderkoordinaten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Das zylindrische Zweischichtproblem

$$\vec{H}^E = \nabla \times \vec{A}^E = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial A_T^E}{\partial \varphi} \vec{e}_s - \frac{\partial A_T^E}{\partial s} \vec{e}_\varphi \right] e^{-jk_z z}$$

$$\vec{E}^H = \nabla \times \vec{A}^H = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial A_T^H}{\partial \varphi} \vec{e}_s - \frac{\partial A_T^H}{\partial s} \vec{e}_\varphi \right] e^{-jk_z z}$$

$$\vec{E}^E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[k^2 A_T^E \vec{e}_z - jk_z \left(\frac{\partial A_T^E}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{1}{s} \frac{\partial A_T^E}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right) - k_z^2 A_T^E \vec{e}_z \right] e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}^H = \frac{1}{-j\omega\mu} \left[k^2 A_T^H \vec{e}_z - jk_z \left(\frac{\partial A_T^H}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{1}{s} \frac{\partial A_T^H}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right) - k_z^2 A_T^H \vec{e}_z \right] e^{-jk_z z}$$

$$\nabla(\nabla \cdot A_T e^{-jk_z z} \vec{e}_z) = \nabla(-jk_z A_T e^{-jk_z z}) = \left[\frac{\partial A_T}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{1}{s} \frac{\partial A_T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - jk_z A_T \vec{e}_z \right] (jk_z) e^{-jk_z z}$$

Das zylindrische Zweischichtproblem

$$\begin{aligned}
 H_S^E &= \frac{1}{S} \frac{\partial A_T^E}{\partial \varphi} e^{-jk_z z} \\
 H_\varphi^E &= -\frac{\partial A_T^E}{\partial S} e^{-jk_z z} \\
 H_z^E &= 0 \\
 E_S^H &= \frac{1}{S} \frac{\partial A_T^H}{\partial \varphi} e^{-jk_z z} \\
 E_\varphi^H &= -\frac{\partial A_T^H}{\partial S} e^{-jk_z z} \\
 E_z^H &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_S^E &= \frac{-jk_z}{j\omega\epsilon} \frac{\partial A_T^E}{\partial S} e^{-jk_z z} \\
 E_\varphi^E &= \frac{-jk_z}{j\omega\epsilon} \frac{1}{S} \frac{\partial A_T^E}{\partial \varphi} e^{-jk_z z} \\
 E_z^E &= \frac{(k^2 - k_z^2)}{j\omega\epsilon} A_T^E e^{-jk_z z} \\
 H_S^H &= \frac{-jk_z}{j\omega\mu} \frac{\partial A_T^H}{\partial S} e^{-jk_z z} \\
 H_\varphi^H &= \frac{-jk_z}{j\omega\mu} \frac{1}{S} \frac{\partial A_T^H}{\partial \varphi} e^{-jk_z z} \\
 H_z^H &= \frac{(k^2 - k_z^2)}{j\omega\mu} A_T^H e^{-jk_z z}
 \end{aligned}$$

Das zylindrische Zweischichtproblem

Es müssen die 2D Helmholtzgleichungen erfüllt sein

$$\Delta_T A_T^E + k^2 A_T^E = 0$$

in Zylinderkoordinaten erhalten wir

$$\frac{\partial^2 A_T^E}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial A_T^E}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 A_T^E}{\partial \varphi^2} + k^2 A_T^E = 0$$

mit der Separationsannahme $A_T^E = R^E(s) \cdot \Phi^E(\varphi)$

$$\Phi^E \frac{\partial^2 R^E}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \Phi^E \frac{\partial R^E}{\partial s} + \frac{1}{s^2} R^E \frac{\partial^2 \Phi^E}{\partial \varphi^2} + k^2 R^E \Phi^E = 0 \quad \left| \cdot \frac{s^2}{R^E \Phi^E} \right.$$
$$\frac{s^2}{R^E} \frac{\partial^2 R^E}{\partial s^2} + \frac{s}{R^E} \frac{\partial R^E}{\partial s} + \frac{1}{\Phi^E} \frac{\partial^2 \Phi^E}{\partial \varphi^2} + k^2 s^2 = 0$$

Das zylindrische Zweischichtproblem

diese Gleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 \phi^E}{\partial \rho^2} + m^2 \phi^E = 0$$

gewöhnliche DGL 2. Ordnung

$$S^2 \frac{\partial^2 R^E}{\partial S^2} + S \frac{\partial R^E}{\partial S} + (k^2 S^2 - m^2) R^E = 0$$

- A) für reelle k bzw. $k^2 \geq 0$ ist dies die Besselsche DGL $\Rightarrow$ Besselfunktionen 1. und 2. Art
- B) für rein imaginäre k bzw. $k^2 \leq 0$ ist dies mit $k' = -jk = \text{Im}(k)$

erhalten wir

$$S^2 \frac{\partial^2 R^E}{\partial S^2} + S \frac{\partial R^E}{\partial S} - (k'^2 S^2 + m^2) R^E = 0$$

$\Rightarrow$ modifizierte Besselsche DGL
 $\Rightarrow$ mod. Besselfunktionen 1. und 2. Art

$$\phi^E = \begin{cases} A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi) & \forall m \neq 0 \\ A_0 \varphi + B_0 & \forall m = 0 \end{cases}$$

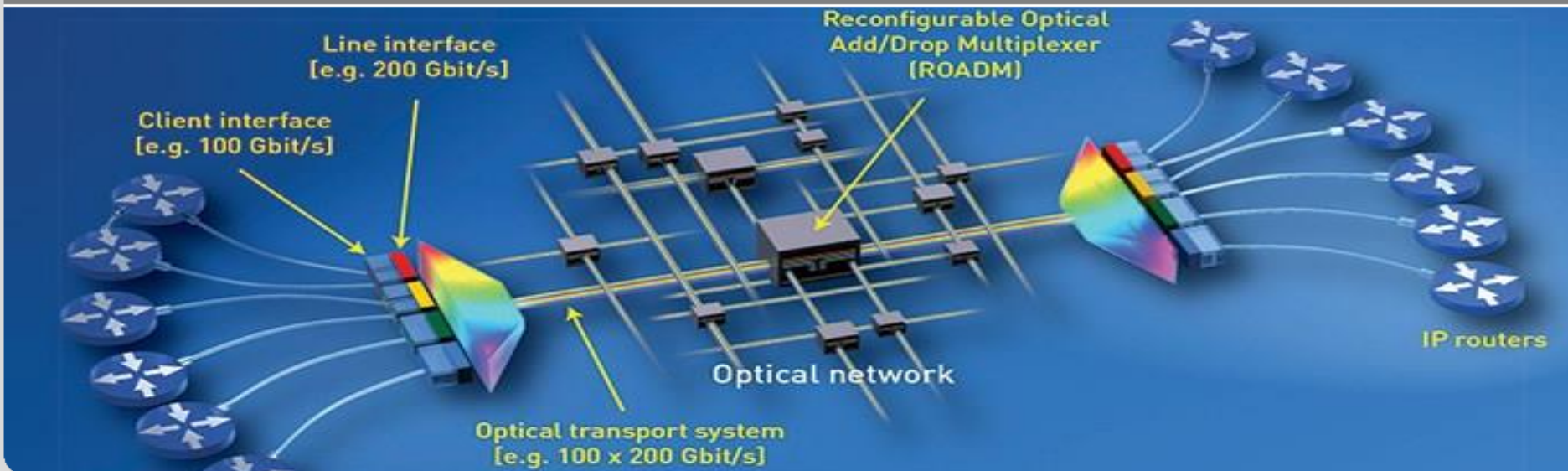
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 13

WS 2019/2020

Hertzscher Dipol

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Kugelkoordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[\frac{\partial A_\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

Kugelwellen

$$\begin{array}{l|l} \vec{A}^E = A_r^E \vec{e}_r & \vec{A}^H = A_r^H \vec{e}_r \\ \vec{H}^E = \nabla \times \vec{A}^E & \vec{E}^H = \nabla \times \vec{A}^H \\ j\omega \epsilon_0 \vec{E}^E = \nabla \times \vec{H}^E & -j\omega \mu_0 \vec{H}^H = \nabla \times \vec{E}^H \end{array}$$

Korrektur:

Die angegebene Formel der Rotation in Kugelkoordinaten ist fehlerhaft. Richtig ist die folgende Formel, vgl. auch EMF-Formelsammlung.

$$\text{rot}(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned} & \vec{e}_r \left[\frac{1}{r \sin(\vartheta)} \left(\frac{\partial (A_\varphi \sin(\vartheta))}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \right] \\ & + \vec{e}_\vartheta \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \right] \\ & + \vec{e}_\varphi \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) \right] \end{aligned}$$

E-Wellen in Kugelkoordinaten

damit erhalten wir für E-Wellen

$$\vec{H}^E = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$j\omega \epsilon_0 \vec{E}^E = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi^E}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial H_\vartheta^E}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r - \frac{\partial H_r^E}{\partial r} \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial H_\vartheta^E}{\partial r} \vec{e}_\varphi$$

analog für H-Wellen!

Korrektur:

Daraus ergeben sich auch in den Gleichungen für $\vec{H}^E$ und $j\omega \epsilon_0 \vec{E}^E$ zusätzliche Terme, die hier fehlen. Für die weiteren Folien ist dies jedoch nicht relevant, da auf Folie 4 bereits das korrekte Ergebnis der Herleitung gezeigt wird.

- Für das Vektorpotential $\vec{A}^E$ muss die Wellengleichung gelten.

- Mit einer geschickten Eichung (hier nicht Lorenz!) erhalten wir mit $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + k^2 A_r = 0$$

Produktansatz von Bernoulli: $A_r = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$

E-Wellen in Kugelkoordinaten

$$\frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\sin \vartheta}{\theta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + r^2 \sin^2 \vartheta k^2 = 0$$

Diese Gl. lässt sich separieren in

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + m^2 \phi = 0$$

mit Separationskonstante m^2

E-Wellen in Kugelkoordinaten

und

$$\frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + r^2 \sin^2 \vartheta k^2 - m^2 = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + r^2 k^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = 0$$

Separation in

$$\boxed{\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + r^2 k^2 - \underbrace{n(n+1)}_{\text{Separationskonstante}} = 0}$$

und

$$\boxed{\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} + n(n+1) = 0}$$

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$N_{3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin x + \frac{\cos x}{x} \right]$$

III Die Bestimmungsgleichung für $\Theta(r)$ wird durch die Kugelflächenfunktionen gelöst

$$\Theta(r) = e P_n^m(\cos r) + f Q_n^m(\cos r)$$

für $m=0$ ist $P_n^0(\cos r)$ gegeben durch Legendre Polynome

E-Wellen in Kugelkoordinaten

Damit erhalten wir

$$A_r^E = \sqrt{kr} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \Theta(n) \phi(\varphi)$$

$$H_\varphi^E = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r^E}{\partial n}$$

$$j\omega\epsilon_0 E_r^E = \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi^E}{\partial n}$$

$$j\omega\epsilon_0 E_n^E = -\frac{\partial H_\varphi^E}{\partial r}$$

E-Wellen in Kugelkoordinaten

Lösungen für R, θ, ϕ sind

$$\text{I) } \phi(\varphi) = \begin{cases} a \cos(m\varphi) + b \sin(m\varphi) & \forall m \neq 0 \\ a_0 \varphi + b_0 & \forall m = 0 \end{cases}$$

II) Die Bestimmungsgleichung für $R(r)$ kann in die Besselsche DGL überführt werden

mit der Lösung

$$R(r) = \sqrt{k_r} Z_{n+1/2}(k_r)$$

Besselfunktion 1. Art *Besselfunktion 2. Art*

$$= \sqrt{k_r} \left[c J_{n+1/2}(k_r) + d N_{n+1/2}(k_r) \right]$$

Konstanten

SL

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right]$$

Strahlung des Hertzschen Dipols

- Eine Antenne können wir als Zusammensetzung von differentiell kleinen Dipolen auffassen
- Für ein Dipol der Länge Δs

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) = I_0 e^{j\omega t}$$

$$Q(t) = \frac{I_0}{j\omega} e^{j\omega t} = Q_0 e^{j\omega t}$$

Dipolmoment ist

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p}_e &= Q_0 \Delta s e^{j\omega t} \vec{e}_z \\ &= \frac{I_0 \Delta s}{j\omega} e^{j\omega t} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Der Hertzsche Dipol

Sehr nah an der Dipolantenne
für $\omega t = \pi/2$ d.h. zu dem Zeitpunkt
wo die Ladungen sich bei $\pm \frac{\Delta S}{2}$ befinden
ist der Strom Null

Das Feld muss dem des elektro-
statischen Dipols entsprechen

$$E_r = \frac{\Delta p_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^3} \text{ und } E_\theta = \frac{\Delta p_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3}$$

Der Hertzsche Dipol

aus der Geometrie ergibt sich, dass wir nur
Kugelflächenfunktionen $P_n^m(\cos\theta)$ betrachten
für den Fall $m=0$
$$P_n^0(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)$$

für $n=1$ gilt
$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \leftarrow \text{gewünschte Abhängig-} \\ \text{keit von } \theta$$

Da E_r unabhängig von φ ist wählen wir
$$\Phi(\varphi) = 1$$

Der Hertzsche Dipol

Damit erhalten wir $m=0, n=1$

$$A_r = \sqrt{kr} Z_{3/2}(kr) \cos\vartheta$$

$$= \sqrt{kr} \left[c J_{3/2}(kr) + d N_{3/2}(kr) \right] \cos\vartheta$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[c \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) + d \left(\sin kr + \frac{\cos kr}{kr} \right) \right] \cos\vartheta$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{1}{kr} \left[c \sin kr + d \cos kr \right] - \left[c \cos kr - d \sin kr \right] \right\} \cos\vartheta$$

Der Hertzsche Dipol

Wir erwarten Abstrahlung in r Richtung,
d.h. die Felder sollen $\sim e^{-jkr}$ sein

wir wissen: $e^{-jx} = \cos(x) - j \sin x$

$\Rightarrow$ mit $C = -jd$

$$A_r = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{kr} d e^{+jkr} - e^{-jkr} \right] \cos \theta$$

Lösung für das Nahfeld und Fernfeld

$$\Rightarrow A_r^E = c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{j}{kr} - 1 \right] e^{-jkr} \cos n\ell$$

daraus folgt

$$H_\varphi^E = -c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} \right] e^{-jkr} \sin n\ell$$

$$= -c' \left[\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-jkr} \sin n\ell$$

für die E-Feld Komponenten gilt

$$j\omega\epsilon_0 E_r = c' \left[\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right] e^{-jkr} \cos n\ell$$

$$j\omega\epsilon_0 E_\varphi = -c' \left\{ -jk \left[\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-jkr} + \left[\frac{-jk}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right] e^{-jkr} \right\} \sin n\ell$$

$$= -j2kc' \left[\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} - j \frac{1}{kr^3} \right] e^{-jkr} \sin n\ell$$

Im Fernfeld dominieren die Terme mit $\frac{1}{r}$, da für $r \rightarrow \infty$ die anderen Terme sehr klein werden. In diesem Fall verschwindet also näherungsweise die Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung E_r und die Welle lässt sich durch eine TEM-Welle bzw. ebene Welle approximieren.

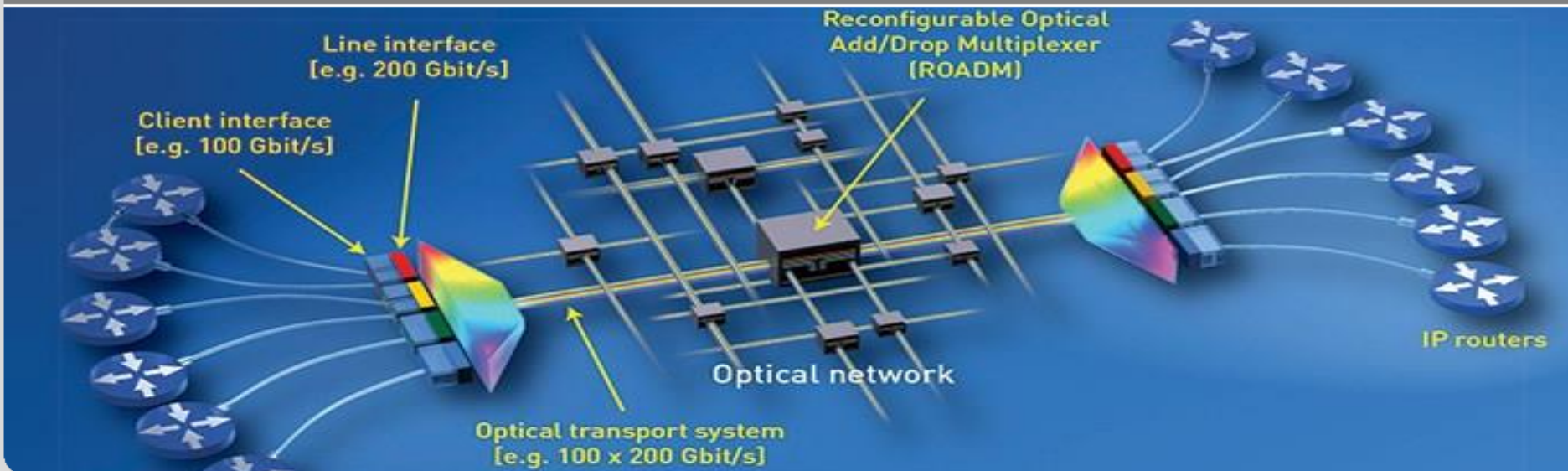
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 14

WS 2019/2020

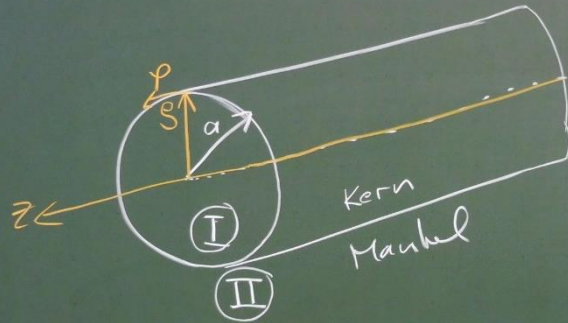
Dielektrischer Rundstab (Glasfaser)

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Übersicht: Dielektrischer Rundstab

Dielektrischer Rundstab (aka Glasfaser)



Medium I: Dielektrikum $\mu_0, \epsilon_1, \chi_1=0$

Medium II: " $\mu_0, \epsilon_2, \chi_2=0$

$\epsilon_1 > \epsilon_2$ d.h. $n_1 > n_2$ (Brechungsindex)

- Strahlenoptische Betrachtung nur gültig für Radien $a > \lambda$!
- Daher betrachten wir exakte Lösungen der Wellengleichung
- Beziehungen für die Feldkomponenten als Funktion der longitudinalen Komponenten ergeben sich aus den Vektorpotentialen $\vec{A}^E$ und $\vec{A}^H$ (mathematische Hilfsgrößen!)

Abhängig von S_1, φ in z-Richtung geführte Wellen

$$\begin{aligned} \text{E-Wellen: } \vec{A}^E &= A_z^E \vec{e}_z = A_{z,t}^E e^{-jk_z z} \vec{e}_z & \vec{E} &= \vec{E}^E + \vec{E}^H \\ \text{H-Wellen: } \vec{A}^H &= A_z^H \vec{e}_z = A_{z,t}^H e^{-jk_z z} \vec{e}_z & \vec{H} &= \vec{H}^E + \vec{H}^H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^E &= \nabla \times \vec{A}^E & \vec{E}^H &= \nabla \times \vec{A}^H \quad (\text{keine } z\text{-Komponente}) \\ j\omega\epsilon \vec{E}^E &= \nabla \times \vec{H}^E & -j\omega\mu \vec{H}^H &= \nabla \times \vec{A}^E \end{aligned}$$

Zusammenhang der longitudinalen Feldkomponente und des Vektorpotentials

Mithels der Lorenz Eichung können wir für die Vektorpotentiale die skalaren Wellengleichungen herleiten

$$\Delta \underline{\vec{A}}_z^E + k^2 \underline{\vec{A}}_z^E = 0$$

$$\Delta \underline{\vec{A}}_z^H + k^2 \underline{\vec{A}}_z^H = 0 \quad \text{mit der Wellenzahl}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

Für geführte Wellen $\sim e^{-jk_z z}$ gilt

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}^{E/H}}{\partial z^2} = -k_z^2 \underline{\vec{A}}^{E/H}$$

Zusammenhang der longitudinalen Feldkomponente und des Vektorpotentials

Damit erhalten wir die 2D Helmholtzgleichung

$$\Delta_t A_{z,t}^E + K^2 A_{z,t}^E = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta_t = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta_t A_{z,t}^H + K^2 A_{z,t}^H = 0 \quad \text{mit} \quad K^2 = k^2 - k_z^2$$

Da die Vektorpotentiale proportional zu $\underline{E}_z$ bzw. $\underline{H}_z$ sind, müssen

$$\Delta \underline{E}_z + K^2 \underline{E}_z = 0$$

$$\Delta \underline{H}_z + K^2 \underline{H}_z = 0$$

gelten.

Transversale Feldkomponenten (ρ, φ)

Für Zylinderkoordinaten erhalten wir für geführte Wellen

$$\underline{H}_z = \underline{H}_z^H = j \frac{K^2}{\omega \mu} \underline{A}_z^H$$

$$\underline{E}_z = \underline{E}_z^E = -j \frac{K^2}{\omega \epsilon} \underline{A}_z^E$$

← longitudinale Komponenten sind proportional zu Vektorpotentialen

Für die transversalen Feldkomponenten gilt dann

$$\underline{E}_\varphi = \frac{1}{jK^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} + \frac{\omega \mu}{s} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial s} \right]$$

$$\underline{E}_s = \frac{1}{jK^2} \left[\frac{k_z}{s} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} - \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial s} \right]$$

$$\underline{H}_\varphi = \frac{1}{jK^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\omega \epsilon}{s} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial s} \right]$$

$$\underline{H}_s = \frac{1}{jK^2} \left[\frac{k_z}{s} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} - \omega \epsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial s} \right]$$

Separationsansatz zur Berechnung der longitudinalen Feldkomponente

Die Lösung erfolgt über Produktansatz von Bernoulli

$$E_z = R^E(s) \cdot \phi^E(r) e^{-jk_z z}$$

$$H_z = R^H(s) \phi^H(r) e^{-jk_z z}$$

eingesetzt erhalten wir jeweils

$$\frac{1}{R(s)} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial R(s)}{\partial s} \right) + \frac{1}{\phi(r)} \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial r^2} + \overset{k^2 - k_z^2}{\downarrow} \underline{K^2} = 0$$

Mit der Separationskonstanten m^2 gilt

$$s^2 \frac{\partial^2 R(s)}{\partial s^2} + s R(s) \frac{\partial R(s)}{\partial s} + (\underline{K^2} s^2 - m^2) R(s) = 0$$

→ für $\underline{K^2} \geq 0$ (d.h. $\underline{K}$ ist reell) ist dies die Besselsche DGL

→ für $\underline{K^2} < 0$ (d.h. $\underline{K}$ ist imaginär) ist die modifizierte Besselsche DGL

Winkelabhängigkeit der Lösung

für Winkelabhängigkeit gilt

$$\frac{\partial^2 \phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + m^2 \phi(\varphi) = 0$$

⇒ für die Winkelabhängigkeit muss eine Periodizität mit 2π vorliegen. Damit ergeben sich Lösungen für ganzzahlige $m \in \mathbb{Z}$

$$\phi(\varphi) = a \cos(m\varphi) + b \sin(m\varphi)$$

Radiale Abhängigkeit der Lösung

Für die Ausbreitungskonstante k_z muss gelten

$$k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 > k_z^2 > k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$$

das bedeutet, dass für $s < a$ ist $k^2 > 0$
und wir erhalten Lösungen der Form

$$R(s) = c \overset{\text{Bessel-funktionen}}{J_m(Ks)} + d N_m(Ks)$$

für $s > a$ ist $k^2 < 0$ und die Lösungen werden

$$R(s) = c I_m(Ks) + d K_m(Ks)$$

modifizierte Besselfunktionen

Da für $s > a$ $k^2 < 0$ gilt, ist k rein imaginär
und wir schreiben $k = j K^I$

Lösungsgleichung

Wir sind interessiert an der Bestimmung der Konstanten a, b, c, d und der Ausbreitungskonstante k_z .
Wir erhalten physikalisch sinnvolle Lösungen für

$$E_z = \begin{cases} A_1 J_m(K \cdot s) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} & \forall s \leq a \\ A_2 K_m(K^I \cdot s) \cos(m\varphi) e^{-jk_z z} & \forall s \geq a \end{cases}$$

$$H_z = \begin{cases} B_1 J_m(K s) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} & \forall s \leq a \\ B_2 K_m(K^I s) \sin(m\varphi) e^{-jk_z z} & \forall s \geq a \end{cases}$$

$$E_y = \begin{cases} j \left[A_1 \frac{m}{K^2 s} J_m(Ks) + B_1 \frac{\omega \mu_0}{K} J_m'(Ks) \right] \sin(mp) e^{-jk_z z} & \forall s \leq a \\ j \left[A_2 \frac{m}{K^2 s} K_m(Ks) + B_2 \frac{\omega \mu_0}{K^I} K_m'(Ks) \right] \sin(mp) e^{-jk_z z} & \forall s > a \end{cases}$$

$$H_y = \begin{cases} -j \left[B_1 \frac{m}{K^2 s} J_m(Ks) + A_1 \frac{\omega \epsilon_1}{K} J_m'(Ks) \right] \cos(mp) e^{-jk_z z} & \forall s \leq a \\ -j \left[B_2 \frac{m}{K^2 s} K_m(Ks) + B_1 \frac{\omega \epsilon_2}{K^I} K_m'(Ks) \right] \cos(mp) e^{-jk_z z} & \forall s > a \end{cases}$$

Stetigkeitsbedingungen

Für die Lösungen müssen die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein bei $S=a$ (Grenzfläche)

$$E_z^I(S=a, \varphi, z) = E_z^II(S=a, \varphi, z)$$
$$H_z^I(\dots) = H_z^II(\dots)$$
$$E_\varphi^I(\dots) = E_\varphi^II(\dots)$$
$$H_\varphi^I(\dots) = H_\varphi^II(\dots)$$

→ Fortsetzung im Foliensatz
„Wellenleiter“, ab Folie 21

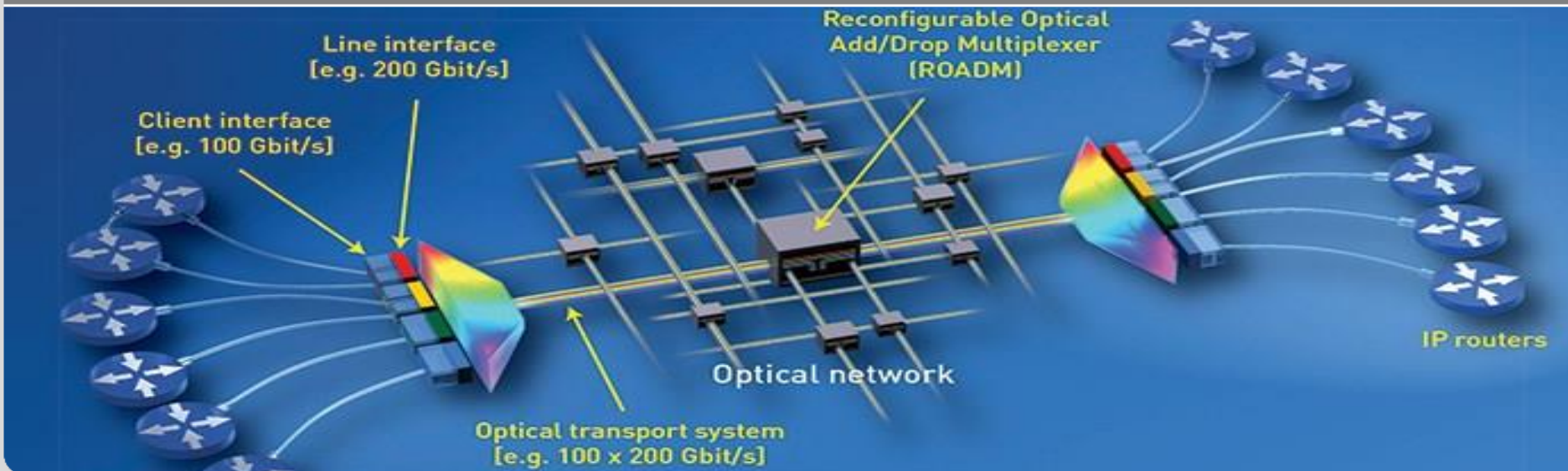
Elektromagnetische Wellen (EMW)

Vorlesung 15

WS 2019/2020

Fourier-Transformation; komplexe Permittivität

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



①

Die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

Alle Größen sind reellwertig!

Anmerkung: Diese Inhalte wurden als Exkurs bereits in den Übungsfolien zur Übung 3 (Folie 12-14) angeschnitten.

②

Wir können eine reellwertige periodische Funktion als Fourierreihe darstellen.

Z.B. für das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mit Periode T gilt

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{2} + \sum_{n=1}^N \vec{E}_{n,0}(\vec{r}) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} + \varphi_n\right)$$

⇒ Überlagerung von Cosinusschwingungen mit Amplitude $E_{n,0}(\vec{r})$, Frequenz $\frac{n}{T}$, Phase φ_n

③

Bei gegebener Aufgabenstellung, können die Maxwell'schen Gleichungen für jede einzelne Cosinusschwingung

$$\vec{E}_n(\vec{r}, t) = \vec{E}_{n,0}(\vec{r}) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} + \varphi_n\right)$$

sowie für den Mittelwert $\frac{\vec{E}_0}{2}$ gelöst werden

Die Gesamtlösung ergibt sich als Überlagerung der Frequenzkomponenten.

Fourier-Transformation und harm. Wellen

①

Im Fall von harmonischer Zeitabhängigkeit nehmen wir an, dass alle Größen die Abhängigkeit gemäß $\cos(2\pi \frac{nt}{T} + \varphi_n)$ besitzen.
Wir können z.B. schreiben ($\omega = \frac{2\pi n}{T}$)

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, t) &= \vec{E}_0(r) \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \vec{E}_0(r) \operatorname{Re}\{\exp(j(\omega t + \varphi))\} \\ &= \operatorname{Re}\{\vec{E}_0(r) \exp(j\varphi) \exp(j\omega t)\} \\ &= \operatorname{Re}\{\vec{E}(r, t)\}\end{aligned}$$

②

mit dem komplexen Zeiger $\vec{E}(r, t) = \vec{E}(r) \exp(j\omega t)$
und der komplexen Amplitude $\vec{E}(r) = \vec{E}_0(r) \exp(j\varphi)$
Für den komplexen Zeiger gilt $\frac{\partial \vec{E}(r, t)}{\partial t} = \vec{E}(r) j\omega \exp(j\omega t) = j\omega \vec{E}(r, t)$

③

Wir erhalten für die Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Diese Schreibweise gilt
Sowohl für

- 1) komplexe Zeiger
als auch für
- 2) komplexe Amplituden
- 3) Fouriertransformierte

Fourier-Transformation und harm. Wellen

①

Für zeitlich nicht periodische Größen, können wir die Fouriertransformation anwenden.

z.B. für die el. Feldstärke

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \exp(j\omega t) dt = \mathcal{F}\{\vec{E}(\vec{r}, t)\}$$

und die inverse

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \exp(j\omega t) d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega)\}$$

②

Analog zu den zeitharmonischen Feldern können wir eine Aufgabenstellung im Frequenzbereich lösen und anschließend in den Zeitbereich zurück transformieren.

③

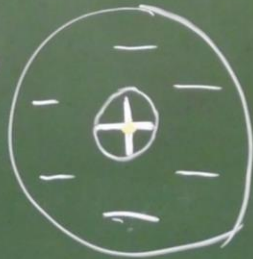
Für die Ableitung nach t erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t} \left[\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega)\}\right]\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\mathcal{F}^{-1}\{j\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega)\}\right\} = j\omega \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \end{aligned}$$

Dielektrikum

- Dielektrika sind Isolatoren ($\kappa=0$) in den Ladungen nicht frei beweglich sind
- Allerdings kommt es zu einer Verschiebung von Ladungen bei einem äußeren el. Feld
ohne el. Feld

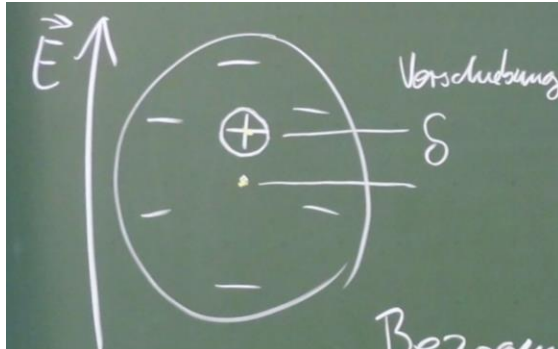
Atom
oder
Molekül



Schwerpunkte der positiven und negativen Ladungen liegen übereinander!

Im äußeren elektrischen Feld kommt es zu einer Verschiebung der Schwerpunkte

Komplexe Permittivität und dielektrische Verluste



Verschiebung
 δ

es ergibt sich das
Dipolmoment

$$\vec{p} = Q \delta \vec{e}_E \quad [\text{Asm}]$$

Bezogen auf N Atome bzw. Moleküle
pro Volumeneinheit erhalten wir die
Dielektrische Polarisation

$$\vec{P} = N \vec{p} = N Q \delta \vec{e}_E = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Dies führt zu einer Erhöhung der Dielektrischen
Verschiebungsdichte

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Bei statischen bzw. sehr langsam veränderlichem $\vec{E}(\vec{r}, t)$
wirkt die Verschiebung instantan!

Komplexe Permittivität und dielektrische Verluste

Für schnell veränderliche äußere Felder muss berücksichtigt werden, dass die Ladungen eine endliche Zeit benötigen um sich zu verschieben.

In diesem Fall gilt

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau}_{\text{Faltungsoperation}}$$

Gedächtnisfunktion
des Mediums

Die Fouriertransformation über eine Faltung von zwei Funktionen ergibt sich als Multiplikation ihrer Fouriertransformierten.

Wir erhalten somit

$$\underline{\vec{P}}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \underline{\vec{G}}(\omega) \underline{\vec{E}}(\vec{r}, \omega)$$

$$\text{wobei } \underline{\vec{G}}(\omega) = \mathcal{F}\{\vec{G}(\tau)\}$$

komplexe Funktion von ω

Komplexe Permittivität und dielektrische Verluste

Damit erhalten wir

$$\underline{\hat{D}} = \epsilon_0 \underline{\hat{E}} + \underline{\hat{P}} = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \hat{G}(\omega))}_{\epsilon_r(\omega)} \underline{\hat{E}} = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \underline{\hat{E}}$$

komplex!
↓

Bei der Wellenausbreitung führt der Imaginärteil von $\epsilon_r(\omega)$ zu dielektrischen Verlusten.

Die Gedächtnisfunktion $G(t)$ muss kausal sein, d.h. $G(t < 0) = 0$

Die Fouriertransformierte einer kausalen Funktion (z.B. $\hat{G}(\omega)$) ist eine analytische Funktion. D.h. ihr Real- und Imaginärteil sind nicht mehr unabhängig.

Die Kramers-Kronig-Beziehungen

Für den Real- und Imaginärteil von $\underline{\tilde{G}}(\omega)$
bzw. für $\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\tilde{G}}(\omega)$ gelten die

Kramers-Kronig Beziehungen

$$\operatorname{Re}\{\underline{\varepsilon}_r(\omega)\} = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{\underline{\varepsilon}_r(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\text{bzw. } \operatorname{Im}\{\underline{\varepsilon}_r(\omega)\} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{\underline{\varepsilon}_r(\omega')\} - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Cauchy Operator stellt sicher,
dass das Integral konvergiert.

Im Allgemeinen erhalten wir für komplexe $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$
auch einen komplexen Brechungsindex
bei $\mu = \mu_0$ gilt dann $\underline{n}(\omega) = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r(\omega)}$