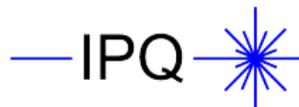


Elektromagnetische Wellen

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel

Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Photonik und Quantenelektronik

Wintersemester 2019/20



Wellenleiter

Beispiele für Wellenleiter

- Wellenleiter sind wesentliche Komponenten in einer Reihe von Anwendungen wie der Kommunikationstechnik oder der Energieübertragung.
- Beispiele für Wellenleiter sind:
 - Parallelplattenleitung
 - Dielektrische Platte
 - Hohlleiter
 - Optische Faser
 - Sommerfelddraht
 - ...

- Im Folgenden betrachten wir Wellenleiter, die in z -Richtung unendlich ausgedehnt sind und deren Querschnitt sich in z -Richtung nicht verändert.
- Wir betrachten dabei den quellenfreien Fall, d.h. Wellenleiter in denen weder eingeprägte Ströme noch Raumladungen existieren.
- Bei harmonischer Zeitabhängigkeit werden die Maxwellschen Gleichungen in diesem Fall zu

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega \underline{\varepsilon} \underline{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0$$

- Für leitende Medien können wir dabei mit der komplexen Permittivität $\underline{\varepsilon} = \varepsilon [1 - j\kappa/(\omega\varepsilon)]$ rechnen.

Geführte Wellen in Wellenleitern

- Im Folgenden wollen wir für einen Wellenleiter mit gegebenem Querschnitt die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschreiben.
- Hierbei sind wir insbesondere an geführten Wellen interessiert, welche sich ungedämpft in $+z$ -Richtung ausbreiten
- Wir können zeigen, dass im Fall von geführten Wellen nur zwei der insgesamt sechs Feldkomponenten voneinander unabhängig sind. Die Maxwell'schen Gleichungen stellen in unserem Fall also ein überbestimmtes Gleichungssystem dar.
- In den meisten Fällen ist es zielführend, die longitudinalen Feldkomponenten \underline{E}_z und \underline{H}_z als gegeben anzusetzen und die transversalen Feldkomponenten daraus abzuleiten.
- Ein eleganter Lösungsansatz ergibt sich mit der Einführung der Vektorpotentiale $\underline{\mathbf{A}}^E$ und $\underline{\mathbf{A}}^H$, welche jeweils nur eine z -Komponente aufweisen. Die Vektorpotentiale sind dabei als mathematische Hilfsgrößen zu verstehen.

Vektorpotentiale für E- und H-Wellen

- Alle Feldkomponenten lassen sich aus den Vektorpotentialen ableiten

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{A}}^E &= A_z^E \mathbf{e}_z & \underline{\mathbf{A}}^H &= A_z^H \mathbf{e}_z \\
 \underline{\mathbf{H}}^E &= \nabla \times \underline{\mathbf{A}}^E & \underline{\mathbf{E}}^H &= \nabla \times \underline{\mathbf{A}}^H \\
 j\omega\epsilon \underline{\mathbf{E}}^E &= \nabla \times \underline{\mathbf{H}}^E & -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}^H &= \nabla \times \underline{\mathbf{E}}^H
 \end{aligned}$$

- Da die Vektorpotentiale nur über Komponenten in longitudinale z -Richtung verfügen, folgt aus der Definition der Rotation, dass die Feldvektoren $\underline{\mathbf{H}}^E$ bzw. $\underline{\mathbf{E}}^H$ nur transversale Feldkomponenten aufweisen.
- Daher werden E -Wellen auch als transversal magnetische (TM) Wellen und H -Wellen als transversal elektrische (TE) Wellen bezeichnet.
- Das gesamte elektrische bzw. magnetische Feld ergibt sich als Überlagerung von E -Welle und H -Welle zu

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}^E + \underline{\mathbf{E}}^H \quad \text{sowie} \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}^E + \underline{\mathbf{H}}^H$$

- In kartesischen Koordinaten ergeben sich die Feldkomponenten zu

$$\underline{\mathbf{H}}^E = \frac{\partial A_z^E}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z^E}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

$$\underline{\mathbf{E}}^H = \frac{\partial A_z^H}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z^H}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

$$\underline{\mathbf{E}}^E = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 A_z^E}{\partial x \partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 A_z^E}{\partial y \partial z} \mathbf{e}_y + \Delta_t A_z^E \mathbf{e}_z \right]$$

$$\underline{\mathbf{H}}^H = \frac{1}{-j\omega\mu} \left[\frac{\partial^2 A_z^H}{\partial x \partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 A_z^H}{\partial y \partial z} \mathbf{e}_y + \Delta_t A_z^H \mathbf{e}_z \right]$$

- mit dem transversalen Laplace Operator

$$\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1)$$

Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

- In Zylinderkoordinaten ergeben sich die Feldkomponenten zu

$$\underline{\mathbf{H}}^E = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^E}{\partial \phi} \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial A_z^E}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi$$

$$\underline{\mathbf{E}}^H = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^H}{\partial \phi} \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial A_z^H}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi$$

$$\underline{\mathbf{E}}^E = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 A_z^E}{\partial \rho \partial z} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z^E}{\partial \phi \partial z} \mathbf{e}_\phi + \Delta_t A_z^E \mathbf{e}_z \right]$$

$$\underline{\mathbf{H}}^H = \frac{1}{-j\omega\mu} \left[\frac{\partial^2 A_z^H}{\partial \rho \partial z} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z^H}{\partial \phi \partial z} \mathbf{e}_\phi + \Delta_t A_z^H \mathbf{e}_z \right]$$

- mit dem transversalen Laplace Operator

$$\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2)$$

Wellengleichung (I)

- Aus der Definition der Vektorpotentiale und mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen folgt, dass

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}}^E &= -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}^E = -j\omega\mu(\nabla \times \underline{\mathbf{A}}^E) \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}}^H &= j\omega\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{E}}^H = j\omega\underline{\varepsilon}(\nabla \times \underline{\mathbf{A}}^H)\end{aligned}$$

- Diese Gleichungen werden gelöst durch

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}^E &= -j\omega\mu\underline{\mathbf{A}}^E + \nabla\phi^E \\ \underline{\mathbf{H}}^H &= j\omega\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{A}}^H + \nabla\phi^H\end{aligned}$$

wobei die Gradienten der Skalarpotentiale ϕ^E und ϕ^H die Integrationskonstanten bilden (beachte, dass $\nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0$).

Wellengleichung (II)

- Bilden wir nun die doppelte Rotation über die Vektorpotentiale, so erhalten wir

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}^E) = \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}^E) - \Delta \underline{\mathbf{A}}^E = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}^E = j\omega \underline{\epsilon} \underline{\mathbf{E}}^E$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}^H) = \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}^H) - \Delta \underline{\mathbf{A}}^H = \nabla \times \underline{\mathbf{E}}^H = -j\omega \underline{\mu} \underline{\mathbf{H}}^H$$

- Mit obigen Ausdrücken für $\underline{\mathbf{E}}^E$ und $\underline{\mathbf{H}}^H$ und der Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}^E = j\omega \underline{\epsilon} \phi^E$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}^H = -j\omega \underline{\mu} \phi^H$$

sowie der Wellenzahl $\underline{k}^2 = \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon}$ erhalten wir die Helmholtzgleichungen

$$\Delta \underline{\mathbf{A}}^E + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{A}}^E = 0$$

$$\Delta \underline{\mathbf{A}}^H + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{A}}^H = 0$$

Wellengleichung für geführte Wellen

- Wir wollen geführte Wellen beschreiben, welche sich ungedämpft in $+z$ -Richtung ausbreiten. Dies ist der Fall für Vektorpotentiale der Form

$$\underline{\mathbf{A}}^E = A_z^E \mathbf{e}_z = A_{z,t}^E e^{-j k_z z} \mathbf{e}_z$$

$$\underline{\mathbf{A}}^H = A_z^H \mathbf{e}_z = A_{z,t}^H e^{-j k_z z} \mathbf{e}_z$$

wobei $A_{z,t}^E$ und $A_{z,t}^H$ jeweils nur von den transversalen Feldkomponenten abhängen.

- Für die zweite Ableitung der Vektorpotentiale nach z ergibt sich damit

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}^E}{\partial z^2} = -k_z^2 \underline{\mathbf{A}}^E \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}^H}{\partial z^2} = -k_z^2 \underline{\mathbf{A}}^H$$

- Also gilt $\Delta = \Delta_t - k_z^2$ und mit $\underline{K}^2 = \underline{k}^2 - k_z^2$ ergeben sich aus den obigen Helmholtzgleichungen die zweidimensionalen Helmholtzgleichungen

$$\Delta_t A_{z,t}^E + \underline{K}^2 A_{z,t}^E = 0$$

$$\Delta_t A_{z,t}^H + \underline{K}^2 A_{z,t}^H = 0$$

Transversale Feldkomponenten (I)

- Kommen wir nun nochmals zurück auf die oben diskutierten Vektorfelder, so erhalten wir mit Hilfe von $\Delta_t \underline{A}_z^E = -\underline{K}^2 \underline{A}_z^E$ bzw. $\Delta_t \underline{A}_z^H = -\underline{K}^2 \underline{A}_z^H$

$$\underline{H}_z = \underline{H}_z^H = j \frac{\underline{K}^2}{\omega \mu} \underline{A}_z^H \quad \text{und} \quad \underline{E}_z = \underline{E}_z^E = -j \frac{\underline{K}^2}{\omega \underline{\epsilon}} \underline{A}_z^E$$

- Für kartesische Koordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right] \\ \underline{E}_y &= \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right] \\ \underline{H}_x &= \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} - \omega \underline{\epsilon} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right] \\ \underline{H}_y &= \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + \omega \underline{\epsilon} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Transversale Feldkomponenten (II)

- Und für zylindrische Koordinaten gilt entsprechend

$$\underline{E}_\rho = \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \phi} \right]$$

$$\underline{E}_\phi = \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[\frac{k_z}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \right]$$

$$\underline{H}_\rho = \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[k_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} - \frac{\omega \underline{\epsilon}}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \phi} \right]$$

$$\underline{H}_\phi = \frac{1}{j \underline{K}^2} \left[\frac{k_z}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \phi} + \omega \underline{\epsilon} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \right]$$

- Sind somit die longitudinalen Feldkomponenten \underline{E}_z und \underline{H}_z gegeben, so können wir somit sowohl in kartesischen als auch in zylindrischen Koordinaten die vier transversalen Feldkomponenten daraus ableiten.

Separation in kartesischen Koordinaten

- Da wie oben gezeigt, die longitudinalen Feldkomponenten proportional zu den jeweiligen Vektorpotentialen sind, muss die skalare Wellengleichung auch für \underline{E}_z und \underline{H}_z gelten. Im nächsten Schritt gilt es nun also, die 2D-Helmholtzgleichungen

$$\Delta_t \underline{E}_z + \underline{K}^2 \underline{E}_z = 0 \quad \text{und} \quad \Delta_t \underline{H}_z + \underline{K}^2 \underline{H}_z = 0$$

im gegebenen Koordinatensystem zu lösen.

- In kartesischen Koordinaten wird dafür der Produktansatz gewählt

$$\underline{E}_z = \underline{X}^E(x) \underline{Y}^E(y) e^{-j k_z z} \quad \text{und} \quad \underline{H}_z = \underline{X}^H(x) \underline{Y}^H(y) e^{-j k_z z}$$

- Eingesetzt erhalten wir für die E - und die H -Welle (hochgestellter Index sei weggelassen) die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\underline{X}(x)} \frac{\partial^2 \underline{X}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\underline{Y}(y)} \frac{\partial^2 \underline{Y}(y)}{\partial y^2} + \underline{K}^2 = 0$$

Lösungen in kartesischen Koordinaten

- Mit den Separationskonstanten \underline{k}_x und \underline{k}_y wobei $\underline{K}^2 = \underline{k}^2 - k_z^2 = \underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2$ lässt sich diese separieren in die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \underline{X}(x)}{\partial x^2} + \underline{k}_x^2 \underline{X}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{Y}(y)}{\partial y^2} + \underline{k}_y^2 \underline{Y}(y) = 0$$

- Diese werden gelöst durch

$$\underline{X}(x) = \begin{cases} \underline{a} \cos(\underline{k}_x x) + \underline{b} \sin(\underline{k}_x x) & \forall \underline{k}_x \neq 0 \\ \underline{a}_0 x + \underline{b}_0 & \forall \underline{k}_x = 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\underline{Y}(y) = \begin{cases} \underline{c} \cos(\underline{k}_y y) + \underline{d} \sin(\underline{k}_y y) & \forall \underline{k}_y \neq 0 \\ \underline{c}_0 y + \underline{d}_0 & \forall \underline{k}_y = 0 \end{cases}$$

Separation in Zylinderkoordinaten

- In Zylinderkoordinaten wählen wir den Produktansatz

$$\underline{E}_z = \underline{R}^E(\rho)\underline{\Phi}^E(\phi)e^{-j k_z z} \quad \text{und} \quad \underline{H}_z = \underline{R}^H(\rho)\underline{\Phi}^H(\phi)e^{-j k_z z}$$

- Mit der Definition des Laplace Operators in Zylinderkoordinaten erhalten wir für die E - und die H -Welle (hochgestellter Index sei weggelassen) die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\underline{R}(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{R}(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\underline{\Phi}(\phi)} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}(\phi)}{\partial \phi^2} + \underline{K}^2 = 0$$

Diese lässt sich mit der Separationskonstanten m^2 separieren in

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \underline{R}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \underline{R}(\rho) \frac{\partial \underline{R}(\rho)}{\partial \rho} + (\underline{K}^2 \rho^2 - m^2) \underline{R}(\rho) = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}(\phi)}{\partial \phi^2} + m^2 \underline{\Phi}(\phi) = 0$$

Lösungen in Zylinderkoordinaten

- Üblicherweise muss die Winkelabhängigkeit periodisch mit 2π sein. Daher muss m eine ganzzahlige reellwertige Zahl sein und wir erhalten für die Winkelabhängigkeit $\Phi(\phi) = \underline{c} \cos(m\phi) + \underline{d} \sin(m\phi)$
- Für $\underline{K} = K$ (reellwertig) wird die Gleichung für die radiale Abhängigkeit als Besselsche Differentialgleichung bezeichnet. Sie hat die allgemeine Lösung

$$\underline{R}(\rho) = \underline{a}J_m(K\rho) + \underline{b}N_m(K\rho)$$

wobei $J_m(K\rho)$ und $N_m(K\rho)$ als Besselfunktionen erster und zweiter Art bezeichnet werden. (letztere werden auch Neumann Funktionen genannt).

- Für $\underline{K} = jK'$ (imaginär) wird die Gleichung für die radiale Abhängigkeit als modifizierte Besselsche Differentialgleichung bezeichnet. Sie hat die allgemeine Lösung

$$\underline{R}(\rho) = \underline{a}I_m(K'\rho) + \underline{b}K_m(K'\rho)$$

wobei $I_m(K'\rho)$ und $K_m(K'\rho)$ als modifizierte Besselfunktionen erster und zweiter Art bezeichnet werden.

Beispiel: Dielektrischer Rundstab

- Der dielektrische Rundstab (z.B. eine Glasfaser) ist ein zylindrischer Wellenleiter bei dem innerhalb eines Radius $\rho \leq a$ ein dielektrisches Medium mit ε_1 , μ_0 und $\kappa = 0$ vorliegt sowie für $\rho > a$ ein zweites dielektrisches Medium mit ε_2 , μ_0 und $\kappa = 0$.
- Typischerweise wird $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ gewählt, um eine ungegämpfte Wellenausbreitung gemäß dem Prinzip der Totalreflexion zu ermöglichen.
- Ausbreitungskonstante $k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1} > k_z > k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$
- Im Kern für $\rho \leq a$ ist $\underline{K}^2 = k^2 - k_z^2 > 0$ und somit $\underline{K} = K$ rein reell. Für die radiale Abhängigkeit muss also die Besselfgleichung erfüllt sein. Da die Besselfunktionen zweiter Art bei $\rho = 0$ eine Singularität aufweisen, kommen als physikalisch sinnvolle Lösungen nur die Besselfunktionen erster Art in Frage.
- Für $\rho > a$ ist $\underline{K}^2 = k^2 - k_z^2 < 0$ und somit $\underline{K} = jK'$ rein imaginär. Für die radiale Abhängigkeit muss also die modifizierte Besselfgleichung erfüllt sein. Da die modifizierten Besselfunktionen erster Art für $\rho \rightarrow \infty$ gegen unendlich konvergieren, kommen als physikalisch sinnvolle Lösungen nur die modifizierten Besselfunktionen zweiter Art in Frage.

Beispiel: Dielektrischer Rundstab (II)

- Im Kern für $\rho \leq a$ ist $\underline{K}^2 = k^2 - k_z^2 > 0$ und somit $\underline{K} = K$ rein reell. Für die radiale Abhängigkeit muss also die Besselgleichung erfüllt sein. Da die Besselfunktionen zweiter Art bei $\rho = 0$ eine Singularität aufweisen, kommen als physikalisch sinnvolle Lösungen nur die Besselfunktionen erster Art in Frage.
- Für $\rho > a$ ist $\underline{K}^2 = k^2 - k_z^2 < 0$ und somit $\underline{K} = j K'$ rein imaginär. Für die radiale Abhängigkeit muss also die modifizierte Besselgleichung erfüllt sein. Da die modifizierten Besselfunktionen erster Art für $\rho \rightarrow \infty$ gegen unendlich konvergieren, kommen als physikalisch sinnvolle Lösungen nur die modifizierten Besselfunktionen zweiter Art in Frage.
- Für die Winkelabhängigkeit beschränken wir uns, ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Lösungen den Fall $\Phi(\phi) \sim \cos(m\phi)$.

Beispiel: Dielektrischer Rundstab (III)

- Damit erhalten wir für die tangentialen Feldkomponenten

$$\underline{E}_z = \begin{cases} A_1 J_m(K\rho) \cos(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho \leq a \\ A_2 K_m(K'\rho) \cos(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho \geq a \end{cases}$$

$$\underline{H}_z = \begin{cases} B_1 J_m(K\rho) \sin(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho \leq a \\ B_2 K_m(K'\rho) \sin(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho > a \end{cases}$$

$$\underline{E}_\phi = \begin{cases} j \left[A_1 \frac{m}{K^2 \rho} J_m(K\rho) + B_1 \frac{\omega \mu_0}{K} J'_m(K\rho) \right] \sin(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho \leq a \\ j \left[A_2 \frac{m}{K'^2 \rho} K_m(K'\rho) + B_2 \frac{\omega \mu_0}{K'} K'_m(K'\rho) \right] \sin(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho \geq a \end{cases}$$

$$\underline{H}_\phi = \begin{cases} -j \left[B_1 \frac{m}{K^2 \rho} J_m(K\rho) + A_1 \frac{\omega \varepsilon_1}{K} J'_m(K\rho) \right] \cos(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho \leq a \\ -j \left[B_2 \frac{m}{K'^2 \rho} K_m(K'\rho) + A_2 \frac{\omega \varepsilon_2}{K'} K'_m(K'\rho) \right] \cos(m\phi) e^{-j k_z z} & \forall \rho \geq a \end{cases}$$

Beispiel: Dielektrischer Rundstab (IV)

- An der Grenzfläche, d.h. bei $\rho = a$, müssen die tangentialen Feldkomponenten stetig ineinander übergehen.
- Daraus folgt für \underline{E}_z mit $\xi = Ka$ und $\eta = K'a$

$$A_1 J_m(\xi) = A_2 K_m(\eta)$$

- und für \underline{H}_z

$$B_1 J_m(\xi) = B_2 K_m(\eta)$$

- und für \underline{E}_ϕ

$$\left[A_1 \frac{mk_z}{\xi^2} J_m(\xi) + B_1 \frac{\omega\mu_0}{\xi} J'_m(\xi) \right] = \left[A_2 \frac{mk_z}{\eta^2} K_m(\eta) + B_2 \frac{\omega\mu_0}{\eta} K'_m(\eta) \right]$$

- und für \underline{H}_ϕ

$$\left[B_1 \frac{mk_z}{\xi^2} J_m(\xi) + A_1 \frac{\omega\varepsilon_1}{\xi} J'_m(\xi) \right] = \left[B_2 \frac{mk_z}{\eta^2} K_m(\eta) + A_2 \frac{\omega\varepsilon_2}{\eta} K'_m(\eta) \right]$$

Beispiel: Dielektrischer Rundstab (V)

- In Matrixschreibweise erhalten wir damit

$$\begin{bmatrix} J_m(\xi) & 0 & -K_m(\eta) & 0 \\ 0 & J_m(\xi) & 0 & -K_m(\eta) \\ \frac{mk_z}{\xi^2} J_m(\xi) & \frac{\omega\mu_0}{\xi} J'_m(\xi) & -\frac{mk_z}{\eta^2} K_m(\eta) & -\frac{\omega\mu_0}{\eta} K'_m(\eta) \\ \frac{\omega\varepsilon_1}{\xi} J'_m(\xi) & \frac{mk_z}{\xi^2} J_m(\xi) & -\frac{\omega\varepsilon_2}{\eta} K'_m(\eta) & -\frac{mk_z}{\eta^2} K_m(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Damit dieses Gleichungssystem eine Lösung besitzt, muss seine Determinante Null ergeben. Daraus ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{K'_m(\xi)}{K_m(\xi)} - K \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{K'}{K} \frac{J'_m(\xi)}{J_m(\xi)} \right) \left(\frac{K'_m(\xi)}{K_m(\xi)} - K \frac{K'}{K} \frac{J'_m(\xi)}{J_m(\xi)} \right) \\ & = \left(\frac{mk_z}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 K' a} \right)^2 \left(1 - \frac{K'^2}{K^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Beispiel: Dielektrischer Rundstab (V)

- Für den Fall $m = 0$ wird die linke Seite der charakteristischen Gleichung Null. In diesem Fall ergeben sich E -Wellen, für

$$\left(\frac{K'_0(\xi)}{K^o(\xi)} - K \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{K'}{K} \frac{J'_0(\xi)}{J_0(\xi)} \right) = 0$$

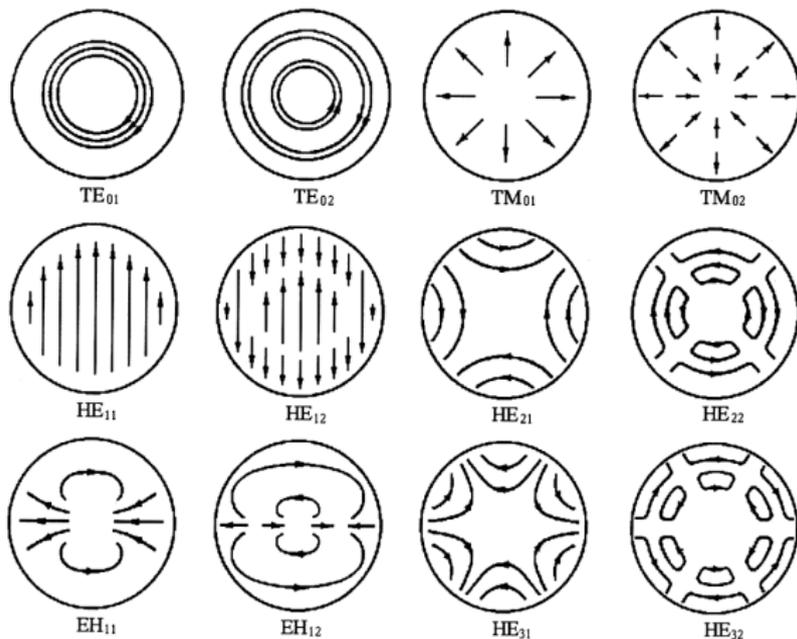
und H -Wellen, wenn

$$\left(\frac{K'_0(\xi)}{K^o(\xi)} - K \frac{K'}{K} \frac{J'_0(\xi)}{J_0(\xi)} \right) = 0$$

- Für $m > 0$ ergeben sich keinen reinen E - oder H -Wellen, sondern sogenannte hybride Moden. Je nachdem ob die longitudinale Komponente des H -Feldes oder des E -Feldes dominiert werden sie als EH - oder als HE -Wellen bezeichnet.

Feldlinien

- Feldlinien für ausgewählte Moden



(b) 2-D electric field patterns in a cross section

Dispersionsdiagramm

- Normierte Ausbreitungskonstante $k_z = \beta$ über der normierten Frequenz V

