

Vorlesung 02: Die Wellengleichung

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 10. November 2021

Vorlesungsinhalte

1. Der Laplace Operator
2. Die Wellengleichung
3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen
4. Zeitharmonische Felder und Wellen
5. Was Sie gelernt haben sollten

Vorlesungsinhalte

1. Der Laplace Operator

2. Die Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Zeitharmonische Felder und Wellen

5. Was Sie gelernt haben sollten

Der Laplace Operator (I)

- Der Laplace Operator kann gemäß

$$\Delta\phi \triangleq \nabla \cdot (\nabla\phi) = (\nabla \cdot \nabla)\phi = \nabla^2\phi$$

als zweifache Anwendung des Nabla Operators verstanden werden.

- Im Unterschied zum Nabla Operator kann der Laplace Operator als skalare Rechengröße betrachtet werden. Auf einen Vektor wird er komponentenweise angewendet.
- Allgemein gilt die Rechenregel

$$\Delta\mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \iff \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$$

Der Laplace Operator (II)

- Je nach Koordinatensystem gilt für ein Skalarfeld f

- Kartesische Koordinaten:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Kugelkoordinaten:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Vorlesungsinhalte

1. Der Laplace Operator

2. Die Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Zeitharmonische Felder und Wellen

5. Was Sie gelernt haben sollten

Materialgleichungen

- In linearen, isotropen und näherungsweise gedächtnisfreien Medien gelten die Materialgleichungen $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_s$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_s$ sowie das Ohmsche Gesetz $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$.
- Die meisten Medien weisen keine spontante Polarisation $\mathbf{P}_s$ und keine spontane Magnetisierung $\mathbf{M}_s$ auf. Es gilt dann $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Ausnahmen sind ferroelektrische bzw. ferromagnetische Materialien.
- Ist ein Medium räumlich homogen, so gilt $\nabla \varepsilon = 0$, $\nabla \mu = 0$ und $\nabla \kappa = 0$.
- Ist es auch noch zeitinvariant, so gilt außerdem: $\partial \varepsilon / \partial t = 0$, $\partial \mu / \partial t = 0$ und $\partial \kappa / \partial t = 0$.

Die Maxwellschen Gleichungen

- In den oben beschriebenen Medien können die Maxwellschen Gleichungen durch die Vektorfelder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ ausgedrückt werden als

$$\nabla \times \mathbf{H} = \kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{I}) \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{II}) \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{III}) \quad \text{Gaußsches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{IV})$$

Die Wellengleichung (I)

- Bilden wir nun zunächst die Rotation über das Induktionsgesetz, so erhalten wir mit dem Durchflutungsgesetz

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

- Nehmen wir nun ferner an, dass das Medium nicht leitend ($\kappa = 0$) und raumladungsfrei ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) sei, so erhalten wir mit

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

die vektorielle *Wellengleichung* für die elektrische Feldstärke.

Die Wellengleichung (II)

- Bilden wir nun die Rotation über das Durchflutungsgesetz, so erhalten wir in nichtleitenden ($\kappa = 0$) Medien mit Hilfe des Induktionsgesetzes

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

- Daraus resultiert mit

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

die vektorielle *Wellengleichung* für die magnetische Feldstärke.

Vorlesungsinhalte

1. Der Laplace Operator

2. Die Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Zeitharmonische Felder und Wellen

5. Was Sie gelernt haben sollten

Ebene Wellen (I)

- Lösungen der Wellengleichung, bei denen Betrag und Richtung des elektromagnetischen Feldes allein von einer kartesischen Koordinate und der Zeit abhängen, werden als ebene Wellen bezeichnet.
- Beispielsweise ergibt sich mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t)$ und $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z, t)$ für ein homogenes, nichtleitendes und raumladungsfreies Medium

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial z}} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Ebene Wellen (II)

- Da bei ebenen Wellen sich die Ableitungen der Feldkomponenten nach x und y zu Null ergeben, erhalten wir zwei jeweils unabhängige Paare gekoppelter Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

- Leiten wir diese nach z bzw. t ab, so ergeben sich nach gegenseitigem Einsetzen die skalaren Wellengleichungen:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

- Während einerseits die Feldkomponenten H_y und E_x miteinander verknüpft sind, ergibt sich eine entsprechende Verknüpfung von H_x und $-E_y$.

Lösungsansatz nach d'Alembert (I)

- Nach d'Alembert hat die skalare Wellengleichung z.B. für H_y , eine Lösung der Form

$$H_y = f(z - ct) + g(z + ct)$$

wobei f und g zwei beliebige zweifach differenzierbare Funktionen sind und $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

- Beweisen lässt sich dies mit Hilfe der Ableitungen:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial H_y}{\partial z} = f' + g' & \text{und} & \frac{\partial H_y}{\partial t} = -cf' + cg' \text{ sowie} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = f'' + g'' & \text{und} & \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = c^2 f'' + c^2 g'' \end{array}$$

Lösungsansatz nach d'Alembert (II)

- Entsprechend folgt für E_x

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \mu c (f' - g') \quad \text{und} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon} (f' + g')$$

- Nach Integration über z bzw. über t ergibt sich

$$E_x = \mu c (f - g) + F(t) \quad \text{und} \quad E_x = \frac{1}{\varepsilon c} (f - g) + G(z)$$

wobei die Integrationskonstanten $F(t)$ und $G(z)$ gleich (und somit konstant über t bzw. z) sein müssen. Da wir hier jedoch nicht an statischen Feldern interessiert sind, können wir $F(t) = G(z) = 0$ annehmen.

- Wir erhalten also folgende Lösung der gekoppelten Wellengleichungen:

$$H_y = f(z - ct) + g(z + ct) \quad \text{und} \quad E_x = Z f(z - ct) - Z g(z + ct)$$

wobei $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ als Wellenwiderstand bezeichnet wird.

Lichtgeschwindigkeit und Wellenwiderstand

- Im Vakuum werden die elektrische und die magnetische Feldkonstante zu

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{A s}}{\text{V m}}$$

$$\mu = \mu_0 = 1,256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-16} \frac{\text{V s}}{\text{A m}} \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}$$

- Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx \left(\frac{4\pi}{36\pi} \cdot 10^{-16} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- und für den Wellenwiderstand im Vakuum

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx \left(4\pi \cdot 36\pi \cdot 10^2 \frac{\text{V}^2}{\text{A}^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 120\pi \, \Omega \approx 377 \, \Omega$$

Ausbreitung von ebenen Wellen (I)

- Betrachten wir weiterhin ebene Wellen mit $H_y = f(z - ct) + g(z + ct)$. Für Punkte konstanten Arguments für f bzw. für g , also für $z \mp ct = \text{konst.}$ ergibt sich nach Umstellen und Differentiation nach der Zeit die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \pm c$$

- Dies bedeutet, dass sich die Lösung zusammensetzt aus einer ebenen Welle mit den Feldkomponenten $H_y^+ = f(z - ct)$ und $E_x^+ = Z f(z - ct)$, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit in $+z$ -Richtung ausbreitet und einer ebenen Welle mit den Feldkomponenten $H_y^- = g(z + ct)$ und $E_x^- = -Z g(z + ct)$, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit in $-z$ -Richtung ausbreitet.

Ausbreitung von ebenen Wellen (II)

■ Die Vektorfelder $\mathbf{E}^+ = \begin{pmatrix} E_x^+(z, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{H}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y^+(z, t) \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie der Einheitsvektor $\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ergeben ein Rechtsschraubensystem.

- Gleiches gilt für $\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H}^-$, und $-\mathbf{e}_z$. Allgemein lässt sich schreiben:

$$\mathbf{E} = Z (\mathbf{H} \times \mathbf{e}_a) ,$$

wobei der Einheitsvektor $\mathbf{e}_a$ die Ausbreitungsrichtung angibt.

- Da $\mathbf{E}$ (und somit $\mathbf{H}$) nur in einer Ebene schwingt, hier die xz -Ebene, nennt man, ausgehend von der E-Feldkomponente, eine solche Welle linear in x -Richtung polarisiert.

Vorlesungsinhalte

1. Der Laplace Operator

2. Die Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Zeitharmonische Felder und Wellen

5. Was Sie gelernt haben sollten

Fourierreihe (I)

- Jede periodische reellwertige Funktion $f(t)$ mit der Periode T kann angenähert werden durch die Fourierreihe

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos(2\pi nt/T - \varphi_n)$$

wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ and $\varphi_n = \arctan(b_n/a_n)$ und

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi nt/T) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi nt/T) dt$$

- Die Funktion $f(t)$ kann also als Überlagerung von N gewichteten zeitharmonischen Schwingungen und ihrem Mittelwert angenähert werden.

Fourierreihe (II)

- Bei linearen Rechenoperationen kann die Ausgangsgröße bestimmt werden, indem zunächst alle Eingangsgrößen mittels der Fourierreihenentwicklung in ihre zeitharmonischen Komponenten separiert werden. Die Rechenoperation wird nun komponentenweise angewendet. Die Überlagerung der einzelnen Ausgangskomponenten ergibt dann die Ausgangsgröße.
- Bei nicht periodischen Funktionen kann anstelle der Fourierreihe die Fouriertransformation angewendet werden.

Komplexe Zeigerschreibweise

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ lässt sich beispielsweise das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke separieren in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

wobei der Vektor $\mathbf{r}$ den Ortsvektor in einem gegebenen Koordinatensystem darstellt.

- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den obigen Ausdruck mittels des *komplexen Zeigers* darzustellen als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j[\omega t + \varphi])$$

- Dabei zeigt der Unterstrich an, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.
- Es gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.}]$, wobei der Ausdruck c.c. für die komplex konjugierte (engl. „complex conjugate“) Version des vorstehenden Terms steht.

Maxwellsche Gleichungen für komplexe Zeiger

- Für die Ableitungen von $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ und $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)$ nach der Zeit erhalten wir

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = j \omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = j \omega \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) .$$

- Somit können die Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe der komplexen Zeiger $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)$ und $\underline{\rho}(\mathbf{r}, t)$ formuliert werden als

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = j \omega \varepsilon \left(1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I}) \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -j \omega \mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II}) \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{III}) \quad \text{Gaußsches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{IV})$$

Komplexe Amplitudenschreibweise (I)

- Die komplexe Zeigerschreibweise für zeitharmonische Größen lässt sich noch weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit nur noch durch die gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ impliziert wird.
- Wir können den komplexen Zeiger dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j[\omega t + \varphi]) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t)$$

wobei $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j \varphi)$ die komplexe Amplitude bezogen auf die Frequenz ω angibt.

Komplexe Amplitudenschreibweise (II)

- Die Maxwell Gleichungen für lineare, homogene Medien gelten also, bezogen auf ω , auch für die komplexen Amplituden (d.h. ohne explizite Zeitabhängigkeit) entsprechend

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon \left(1 - j\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad (\text{I}) \quad \textit{Durchflutungsgesetz}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \quad (\text{II}) \quad \textit{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \underline{\rho}(\mathbf{r}) \quad (\text{III}) \quad \textit{Gaußsches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{IV})$$

Vorlesungsinhalte

1. Der Laplace Operator

2. Die Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Zeitharmonische Felder und Wellen

5. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

- Wie die vektoriellen Wellengleichungen für die elektrische und magnetische Feldstärke aus den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet werden.
- Wieso die Wellengleichungen aus den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet wurden.
- Warum der Lösungsansatz von d'Alembert vorhersagt, dass jede Welle als eine Überlagerung aus einer hin- und einer rücklaufenden Welle dargestellt werden kann.
- Wie eine periodische Funktion als Superposition von Cosinus- und Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz sowie einem Mittelwert dargestellt werden kann.
- Welchen mathematischen Vorteil die Beschreibung der Feldstärken durch die komplexe Zeigerdarstellung bietet.