Karlsruher Institut für Technologie

IPQ

# Vorlesung 03: Zeitharmonische ebene Wellen und Poynting-Vektor

**Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22**

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 16. November 2021

# Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Der Poynting-Vektor

4. Was Sie gelernt haben sollten

# Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

1. Wiederholung

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Der Poynting-Vektor

4. Was Sie gelernt haben sollten

# Fourierreihe



- Jede periodische reellwertige Funktion $f(t)$ mit der Periode $T$ kann angenähert werden durch die Fourierreihe

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\left(2\pi nt/T - \varphi_n\right)$$

wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ and $\varphi_n = \arctan\left(b_n/a_n\right)$ und

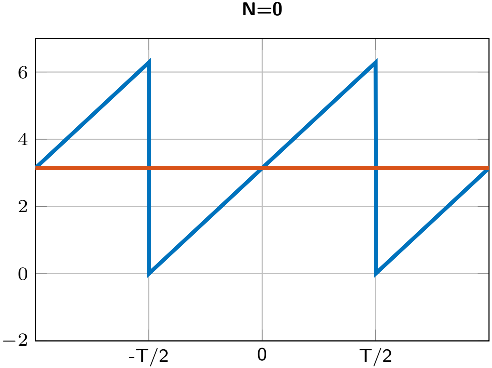
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(2\pi nt/T\right)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(2\pi nt/T\right)\mathrm{d}t$$

- Die Funktion $f(t)$ kann also als Überlagerung von $N$ gewichteten zeitharmonischen Schwingungen und ihrem Mittelwert angenähert werden.

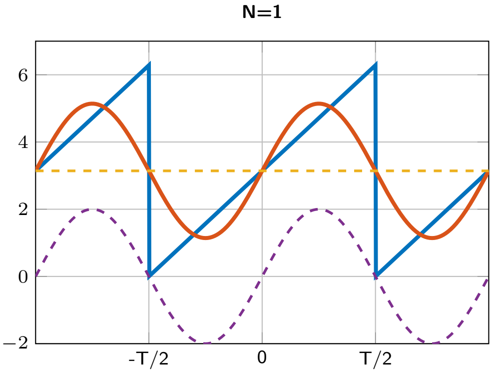
# Beispiel: Fourierreihenentwicklung Sägezahn

- Für periodische Funktionen mit der Periode $T$ ist eine solche orthonomale Funktionenbasis gegeben durch die Sinus- und Cosinusschwingungen



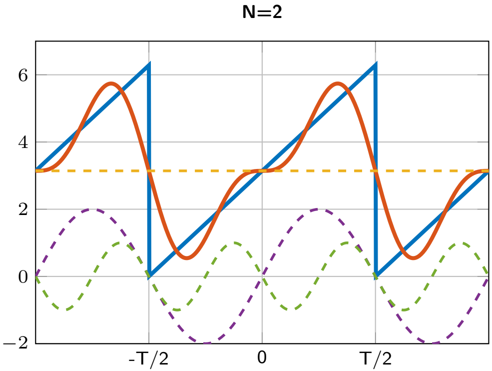
# Beispiel: Fourierreihenentwicklung Sägezahn

- Für periodische Funktionen mit der Periode $T$ ist eine solche orthonomale Funktionenbasis gegeben durch die Sinus- und Cosinusschwingungen



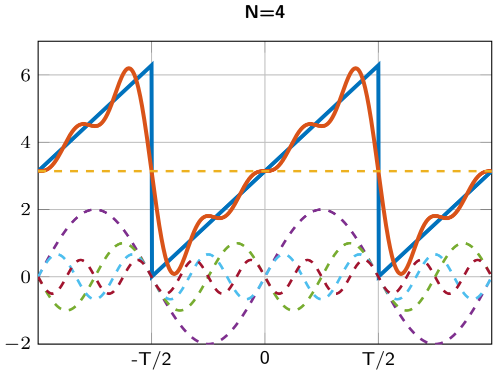
# Beispiel: Fourierreihenentwicklung Sägezahn

- Für periodische Funktionen mit der Periode $T$ ist eine solche orthonomale Funktionenbasis gegeben durch die Sinus- und Cosinusschwingungen



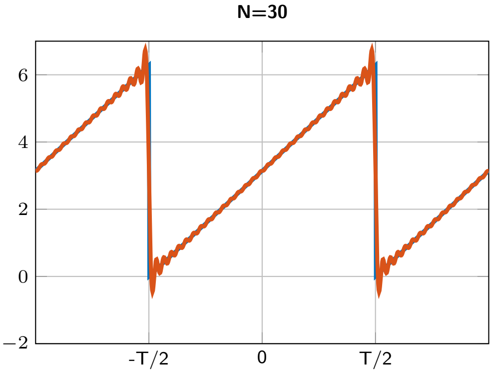
# Beispiel: Fourierreihenentwicklung Sägezahn

- Für periodische Funktionen mit der Periode $T$ ist eine solche orthonomale Funktionenbasis gegeben durch die Sinus- und Cosinusschwingungen



# Beispiel: Fourierreihenentwicklung Sägezahn

- Für periodische Funktionen mit der Periode $T$ ist eine solche orthonomale Funktionenbasis gegeben durch die Sinus- und Cosinusschwingungen



# Superpositionsprinzip

- Bei einer Vielzahl von Problemstellungen soll die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen ausgehend von einem zeitabhängigen Quellenfeld mit den Feldvektoren $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t)$ am Ort $\mathbf{r}_0$ berechnet werden.
- Sofern das Ausbreitungsmedium *linear* ist, kann dabei das Superpositionsprinzip verwendet werden.
- Hierbei kann das Quellensignal in eine beliebige Reihendarstellung überführt werden, z.B. in die Fourierreihendarstellung.
- Die Wellenausbreitung kann nun für einzeln jeden Summanden berechnet werden. Die Gesamtlösung ergibt sich dann als Überlagerung bzw. Superposition der Einzellösungen.
- Bei vielen Problemstellungen lässt sich die Berechnung auf diese Weise deutlich vereinfachen.
- Es gilt zu beachten, dass das Superpositionsprinzip für*nichtlineare* Medien nicht gilt.

# Komplexe Zeigerschreibweise

Karlsruher Institut für Technologie

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ lässt sich beispielsweise das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke separieren in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

  wobei der Vektor $\mathbf{r}$ den Ortsvektor in einem gegebenen Koordinatensystem darstellt.
- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den obigen Ausdruck mittels des *komplexen Zeigers* darzustellen als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t + \varphi\right]\right)$$

- Dabei zeigt der Unterstrich an, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.
- Der reellwertige Feldvektor ergibt sich als Realteil des komplexen Zeigers zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t)\right]$$

  wobei der hochgestellte Asterisk $^*$ für die komplexe Konjugation steht.

# Komplexe Amplitudenschreibweise

- Bei harmonischer Zeitabängigkeit ergibt sich die Ableitung des komplexen Zeigers nach $t$ zu

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t + \varphi\right]\right)}{\partial t} = \mathrm{j}\,\omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$$

- Die komplexe Zeigerschreibweise für zeitharmonische Größen lässt sich noch weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit nur noch durch die gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ impliziert wird.
- Wir können den komplexen Zeiger dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}[\omega t + \varphi]) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\varphi) \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

wobei $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\varphi)$ die komplexe Amplitude implizit bezogen auf die Kreisfrequenz $\omega$ angibt.

# Maxwellsche Gleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- Die Maxwellschen Gleichungen für homogene Medien mit $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{B}} = \mu\underline{\mathbf{H}}$ gelten also, bei harmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz $\omega$, entsprechend auch für die komplexen Amplituden:

$$
\begin{array}{lll}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \kappa\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\,\dfrac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & (\mathrm{I}) & \textit{Durchflutungsgesetz} \\
\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) & (\mathrm{II}) & \textit{Induktionsgesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{\varepsilon}\,\underline{\rho}(\mathbf{r}) & (\mathrm{III}) & \textit{Gaußsches Gesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 & (\mathrm{IV}) &
\end{array}
$$

- Bei der Verwendung der komplexen Amplitude entfällt also die explizite Zeitabhängigkeit.
- Für leitfähige Medien können wir die komplexe Permittivität einführen als:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)$$

# Die Helmholtz-Gleichung

- Die Wellengleichungen ergeben sich auch für komplexe Amplituden aus den Maxwellschen Gleichungen.
- Dafür wird analog zu den zuvor betrachteten reellwertigen Vektorfeldern die Rotation über das Induktions- bzw. das Durchflutungsgesetz gebildet:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}) - \Delta \underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\mu\,(\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = -\mathrm{j}\,\omega\mu\,(\mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{E}}) = \omega^2\mu\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{E}} = \underline{k}^2\underline{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}) - \Delta \underline{\mathbf{H}} = \mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}\,(\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = \mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}\,(-\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}) = \omega^2\mu\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{H}} = \underline{k}^2\underline{\mathbf{H}}$$

- Dabei wird die komplexe Wellenzahl mit $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ und der Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ zu

$$\underline{k} = \pm\omega\sqrt{\mu\underline{\varepsilon}} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}} = \pm\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}}$$

- Ist das Medium ferner raumladungsfrei, so dass neben $\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0$ auch $\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$ und

$$\Delta\underline{\mathbf{E}} + \underline{k}^2\underline{\mathbf{E}} = 0$$

$$\Delta\underline{\mathbf{H}} + \underline{k}^2\underline{\mathbf{H}} = 0$$

- In dieser Form wird die Wellengleichung auch Helmholtz-Gleichung genannt.

# Vorlesungsinhalte


1. Wiederholung

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Der Poynting-Vektor

4. Was Sie gelernt haben sollten

# Zeitharmonische ebene Wellen: Helmholtzgleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- Für zeitharmonische ebene Wellen in homogenen, linearen Medien hängen die komplexen Zeiger $\underline{\mathbf{H}}(z,t) = \underline{\mathbf{H}}(z)\exp(\mathrm{j}\,\omega t)$ und $\underline{\mathbf{E}}(z,t) = \underline{\mathbf{E}}(z)\exp(\mathrm{j}\,\omega t)$ nur von der Ortskoordinate $z$ und der Zeit $t$ ab. Die Helmholtz-Gleichungen werden somit zu

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{E}} = 0$$

- Diese gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben die Lösungen

$$\underline{\mathbf{H}}(z,t) = \underline{\mathbf{H}}_0^+ \exp(\mathrm{j}[\omega t - \underline{k}z]) + \underline{\mathbf{H}}_0^- \exp(\mathrm{j}[\omega t + \underline{k}z])$$
$$\underline{\mathbf{E}}(z,t) = \underline{\mathbf{E}}_0^+ \exp(\mathrm{j}[\omega t - \underline{k}z]) + \underline{\mathbf{E}}_0^- \exp(\mathrm{j}[\omega t + \underline{k}z])$$

- Dabei sind $\underline{\mathbf{H}}_0^+$ und $\underline{\mathbf{E}}_0^+$ die Feldvektoren zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $z = 0$ für die sich in $+z$-Richtung ausbreitende Welle und $\underline{\mathbf{H}}_0^-$ und $\underline{\mathbf{E}}_0^-$ die entsprechenden komplexen Amplituden für die sich in $-z$-Richtung ausbreitende Welle.

# Zeitharmonische ebene Wellen: Maxwellsche Gleichungen

- Neben den Helmholtzgleichungen gelten weiterhin das Durchflutungsgesetz

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(z,t) = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y}} \end{pmatrix} g = \quad \mathrm{j}\,\omega \underline{\varepsilon} \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix}$$

und das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(z,t) = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = -\mathrm{j}\,\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(z,t) = -\mathrm{j}\,\omega\mu \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ \underline{H}_z \end{pmatrix}$$

# Zeitharmonische ebene Wellen: Feldkomponenten

- Setzen wir nun die obigen Lösungen der Wellengleichung ein, so erhalten wir...
- ...für die in $+z$-Richtung laufende Welle

$$\underline{E}_x^{+} = -\frac{1}{\mathrm{j}\,\underline{k}}\frac{\partial \underline{E}_x^{+}}{\partial z} = -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}}\frac{\partial \underline{H}_y^{+}}{\partial z} = \underline{Z}\,\underline{H}_y^{+}$$

$$\underline{E}_y^{+} = -\frac{1}{\mathrm{j}\,\underline{k}}\frac{\partial \underline{E}_y^{+}}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}}\frac{\partial \underline{H}_x^{+}}{\partial z} = -\underline{Z}\,\underline{H}_x^{+}$$

$$\underline{E}_z^{+} = 0$$

$$\underline{H}_z^{+} = 0$$

- ...für die in $-z$-Richtung laufende Welle

$$\underline{E}_x^{-} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\underline{k}}\frac{\partial \underline{E}_x^{-}}{\partial z} = -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}}\frac{\partial \underline{H}_y^{-}}{\partial z} = -\underline{Z}\,\underline{H}_y^{-}$$

$$\underline{E}_y^{-} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\underline{k}}\frac{\partial \underline{E}_y^{-}}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\underline{\varepsilon}}\frac{\partial \underline{H}_x^{+}}{\partial z} = \underline{Z}\,\underline{H}_x^{-}$$

$$\underline{E}_z^{-} = 0$$

$$\underline{H}_z^{-} = 0$$

- Dabei verwenden wir den komplexen Wellenwiderstand $\underline{Z} = \sqrt{\mu/\underline{\varepsilon}} = \underline{k}/(\omega\underline{\varepsilon})$.
- In jede Richtung sind also jeweils $\underline{E}_x$ und $\underline{H}_y$ bzw. $\underline{E}_y$ und $\underline{H}_x$ miteinander gekoppelt. Beide Feldkomponenten überlagern sich linear.

# Zeitharmonische ebene Wellen: Wellenvektor

- Bisher haben wir ebene Wellen betrachtet, welche sich entlang der $z$-Achse ausgebreitet haben.
- Die Ausbreitung in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{e}_\mathrm{a}$ kann beschrieben werden durch den Wellenvektor

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{k}\,\mathbf{e}_\mathrm{a}$$

- Mit dem gegebenen H-Feldvektor $\underline{\mathbf{H}}_0$ bei $t = 0$ und $z = 0$ erhalten wir

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r})}$$

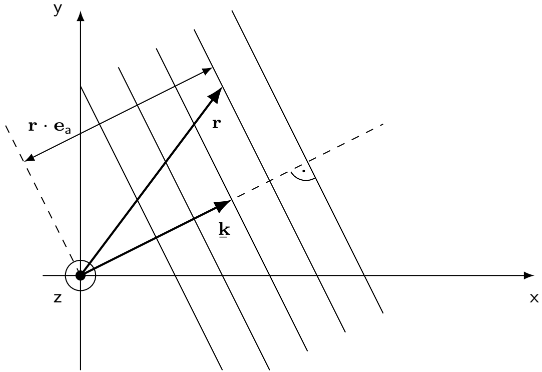
- Den E-Feldvektor erhalten wir gemäß

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{Z}\,(\underline{\mathbf{H}} \times \mathbf{e}_\mathrm{a})$$

- Die Vektoren $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ und $\mathbf{e}_\mathrm{a}$ bilden dabei ein Rechtsschraubensystem.

# Zeitharmonische ebene Wellen: Phasenfronten

- Für eine harmonische ebene Welle mit der Kreisfrequenz $\omega$ erhalten wir senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zu einem gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ für $\omega t_0 \pm \Re\{\underline{\mathbf{k}}\} \cdot \mathbf{r} = \phi_0 \pm n2\pi$ im Abstand $\lambda = 2\pi c/\omega$ Ebenen konstanter Phase, welche auch als Phasen- oder Wellenfronten bezeichnet werden.



# Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Der Poynting-Vektor

4. Was Sie gelernt haben sollten

# Elektromagnetische Feldenergie

- Elektrische und magnetische Felder speichern Energie (vgl. Plattenkondensator bzw. Spule).
- Die in einem Volumen $V$ gespeicherte elektrische bzw. magnetische Energie kann bestimmt werden aus

$$W_\mathrm{e} = \int_V w_\mathrm{e} \,\mathrm{d}V \qquad \text{und} \qquad W_\mathrm{m} = \int_V w_\mathrm{m} \,\mathrm{d}V$$

- Dabei sind $w_\mathrm{e}$ und $w_\mathrm{m}$ auf das Volumen bezogene *Energiedichten*, die bestimmt werden können aus

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \qquad \text{und} \qquad w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$$

- Die gesamte elektromagnetische Feldenergie ergibt sich als Summe der elektrischen und der magnetischen Feldenergie zu $W_\mathrm{em} = W_\mathrm{e} + W_\mathrm{m}$ und $w_\mathrm{em} = w_\mathrm{e} + w_\mathrm{m}$

# Der Satz von Poynting (I)

- Der *Satz von Poynting* besagt, dass jede Änderung $\mathrm{d}W_{\text{em}}$ der in einem Volumen $V$ gespeicherten elektromagnetischen Feldenergie in einem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ beschrieben werden kann als

$$\mathrm{d}W_{\text{em}} = -\underbrace{\int_O \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{O}\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{durch die Hüllfläche } O \\ \text{abgestrahlte Feldenergie}}} - \underbrace{\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{in Wärmeenergie} \\ \text{umgewandelte Feldenergie} \\ \text{(d.h. Ohmsche Verluste)}}}$$

- Der Vektor $\mathbf{S}$ wird hierbei als *Poynting Vektor* bezeichnet. Er beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten elektromagnetischen Feldenergie. Er hat somit die Einheit $\mathrm{W}/\mathrm{m}^2$.

# Der Satz von Poynting (II)

- Bezogen auf das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ lässt sich der *Satz von Poynting* auch als Leistungsbilanz ausdrücken:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} = -\int_O \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{O} - \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V$$

- Mit Hilfe des Gaußschen Satzes und mittels der Energiedichte ergibt sich daraus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w_{\text{em}}\,\mathrm{d}V = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{S}\,\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V$$

- Dies lässt sich mit den Energiedichten für das elektrische und das magnetische Feld schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) = -\nabla\cdot\mathbf{S} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \tag{1}$$

# Der Satz von Poynting (III)

- Mit $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ sowie unter der Annahme, dass $\varepsilon$ und $\mu$ nicht von der Zeit abhängen, lässt sich zeigen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) = \mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

- Aus (1) und (2) ergibt sich somit

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$$

- Und schließlich mit den Maxwellschen Gleichungen für die Rotation von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

# Der Poynting-Vektor

- Wird nun die Divergenz auf beiden Seiten der Gleichung weggelassen, so ergibt sich für den *Poynting Vektor*

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- Merke: Der *Poynting-Vektor* $\mathbf{S}$ beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten Feldenergie. Er hat die Einheit $\mathrm{J/s/m^2}$ bzw. $\mathrm{W/m^2}$.

# Der Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (I)



- Bei harmonischer Zeitabhängigkeit mit Kreisfrequenz $\omega$ und den reellen Feldvektoren

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cos(\omega t) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \phi)$$

  ergibt sich der Poynting-Vektor zu

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]\cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi)$$

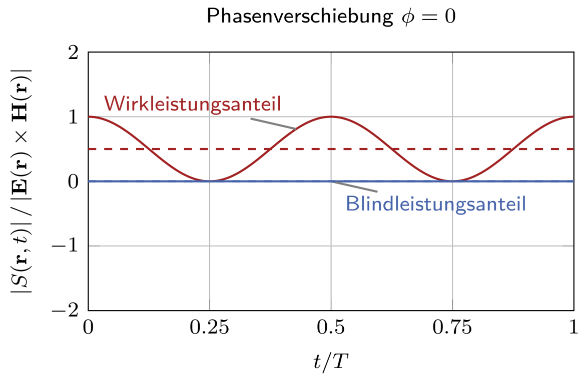
- Mit den Rechenregeln der Trigonometrie lässt sich dies auch schreiben als

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]\left[\underbrace{(1+\cos(2\omega t))\cos(\phi)}_{\text{Wirkleistungsanteil}} - \underbrace{\sin(2\omega t)\sin(\phi)}_{\text{Blindleistungsanteil}}\right]$$

- Abhängig von der Phasenverschiebung $\phi$ ergibt sich ein Wirkleistungs- und ein Blindleistungsanteil.

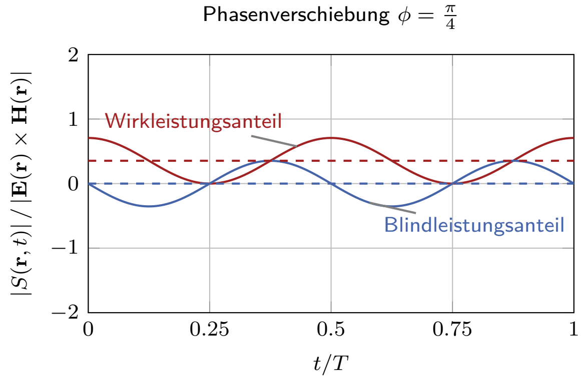
# Der Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (II)

- Normierte Darstellung des reellen instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in Wirkleistungs- und Blindleistungsanteil.
- Die gestrichelten Linien stellen die jeweiligen Mittelwerte dar.



# Der Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (II)

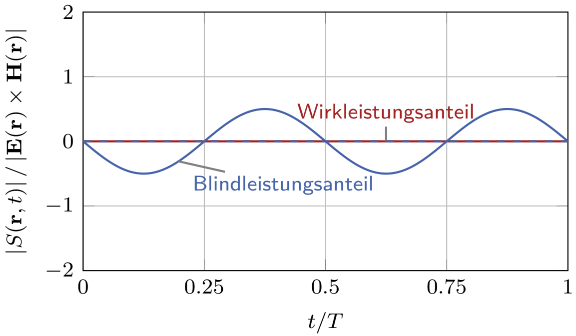
- Normierte Darstellung des reellen instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in Wirkleistungs- und Blindleistungsanteil.
- Die gestrichelten Linien stellen die jeweiligen Mittelwerte dar.



# Der Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (II)

- Normierte Darstellung des reellen instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in Wirkleistungs- und Blindleistungsanteil.
- Die gestrichelten Linien stellen die jeweiligen Mittelwerte dar.

Phasenverschiebung $\phi = \frac{\pi}{2}$



# Der Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (III)



- Sowohl die Wirkleistung als auch die Blindleistung oszillieren mit der Kreisfrequenz $2\omega$.
- Im zeitlichen Mittel über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ bleibt allein die Wirkleistung

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})\right]$$

# Poynting Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (I)

Karlsruher Institut für Technologie

- Bei Feldern mit harmonischer Zeitabhängigkeit und somit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right]$$

ergibt sich der Poynting Vektor zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{4}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right] \times \left[\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\omega t} + \left(\underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

# Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (II)

- Im zeitlichen Mittel ergibt sich

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right\}$$

- Somit ist der komplexe Poynting Vektor definiert als

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right]$$

- Real- und Imaginärteil des komplexen Poynting-Vektors geben dabei den Wirk- und den Blindleistungsanteil an.
- Man beachte, dass bei der obigen Herleitung zwei komplexe Zeiger auf nichtlineare Weise verknüpft werden. Es kann daher nicht direkt mit den komplexen Amplituden gerechnet werden!

# Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (III)

- bei

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right\}$$

- Somit ist der komplexe Poynting Vektor definiert als

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right]$$

- Real- und Imaginärteil des komplexen Poynting-Vektors geben dabei den Wirk- und den Blindleistungsanteil an.
- Man beachte, dass bei der obigen Herleitung zwei komplexe Zeiger auf nichtlineare Weise verknüpft werden. Es kann daher nicht direkt mit den komplexen Amplituden gerechnet werden!

# Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung
2. Zeitharmonische ebene Wellen
3. Der Poynting-Vektor
4. Was Sie gelernt haben sollten

# Was Sie gelernt haben sollten

- Wieso die Maxwellschen Gleichungen ohne explizite Zeitabhängigkeit und nur mit der komplexen Amplitude formuliert werden können.
- Was der Zusammenhang der allgemeinen Wellengleichungen und der Helmholtz-Gleichung unter Berücksichtigung der komplexen Zeigerschreibweise ist.
- Wie die abgestrahlte Feldenergie durch den Poynting-Vektor beschrieben wird.
- Wie zeitharmonische ebene Wellen mit der komplexen Zeigerschreibweise und der komplexen Wellenzahl beschrieben werden können.